

N° d'ordre : 2872

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Benjamin TATON**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

**Modèle déformable à densité adaptative
Application à la segmentation d'images.**

Soutenue le : 14 octobre 2004

Après avis des rapporteurs :

Laurent Cohen Directeur de Recherche

Francis Schmitt Professeur

Devant la commission d'examen composée de :

Christophe Schlick Professeur Président

Laurent Cohen Directeur de Recherche Rapporteur

Francis Schmitt Professeur Rapporteur

Jacques Henry Directeur de Recherche Examineur

Achille Braquelaire Professeur Examineur

Jacques-Olivier Lachaud Maître de Conférence Examineur

Remerciements

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Laurent Cohen Directeur de Recherche au Ceremade et M. Francis Schmitt Professeur à l'ENST, pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon travail et le temps qu'ils ont accordé à la lecture de ma thèse. Je les remercie également pour les remarques et conseils qu'ils ont formulés et qui ont largement contribué à augmenter la qualité du manuscrit.

J'exprime également mes remerciements à M. Christophe Schlick Professeur à l'université Bordeaux 2, qui a accepté de présider le jury de cette thèse, et à M. Jacques Henry, Directeur de Recherche à l'INRIA qui a accepté de prendre part au jury et dont les remarques ont également contribué à améliorer le présent manuscrit.

Je remercie aussi M. Achille Braquelaire, Professeur à l'université Bordeaux 1, pour m'avoir accueilli dans l'équipe *Analyse et Structuration d'Images* qu'il dirige au LaBRI.

Enfin, et bien sûr, je tiens à remercier tout particulièrement Jacques-Olivier Lachaud, Maître de Conférence à l'IUT de Bordeaux qui m'a convaincu d'entreprendre ce travail et qui, au cours de ces trois ans, m'a toujours soutenu, conseillé et écouté avec une bienveillance et une disponibilité sans faille.

Par ailleurs, cette travail n'aurait pas pu se réaliser sans l'aide et le soutien précieux et quotidien de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici :

- Myriam De Sainte Catherine, Gwenola Thomas, Bertrand Le Saëc, et Michel Marcus pour leur sympathie et pour la confiance qu'ils m'ont accordé en me confiant divers enseignements à l'ENSEIRB et à l'IUT de Bordeaux,
- Philippe Duchon, pour l'aide et les conseils précieux qu'il m'a apporté dans la préparation de ma soutenance,
- L'équipe administrative du LaBRI, et tout particulièrement Philippe Biais, Paule Delrue, et Cathy Roubineau pour leur très grande disponibilité, leur amabilité et leur sympathie,
- Mes collègues de tous les jours : Sylvie, David, Anthony, Marcien, Laurent, Bertrand, Jean-Baptiste, Aurélien, Didier, Afif, Olivier, Sébastien, Fabrice, Julien et de nombreux autres...
- Enfin mes anciens camarades de l'ENSEIRB et en particulier Thierry, Guillaume, Vincent, Stéphane, Nicolas, Jelloul, Christophe, Hoà, et, là encore, de nombreux autres...

Surtout, je remercie mes Parents et ma famille proche, pour leur soutien constant et la confiance qu'ils m'ont accordé tout au long de mes études.

Table des matières

Notations	9
Introduction	13
Motivations	13
Plan	15
1 Modèles déformables en analyse d'images	17
1.1 Introduction	17
1.2 Espaces des formes - Déformations	18
1.2.1 Modèles paramétriques de frontières	19
1.2.2 Modèles échantillonnés de frontières	19
1.2.3 Modèles implicites	25
1.3 Mise en adéquation avec l'image	26
1.3.1 Formulation énergétique	26
1.3.2 Formulation dynamique	29
1.3.3 Formulations probabilistes	31
1.3.4 Contours actifs géométriques	32
1.4 Conclusion	36
2 Réduction de la complexité des modèles	37
2.1 Introduction - Motivations	37
2.2 Changement de l'espace des paramètres	38
2.2.1 Patrons déformables	38
2.2.2 Décomposition sur une base de fonctions	41
2.3 Optimisation de la discrétisation	45
2.3.1 Utilisation de la dynamique	46
2.3.2 Modèles implicites	47
2.4 Accélération de la convergence	51
2.4.1 Approches coarse-to-fine	51
2.4.2 Forces supplémentaires	52
2.4.3 Méthodes numériques	53
2.5 Discussion	55

3	Modèle générique à résolution adaptative	59
3.1	Généralités	59
3.2	Notions de géométrie riemannienne	63
3.2.1	Généralités	63
3.2.2	Variété différentielle, cartes, atlas	64
3.2.3	Vecteurs tangents	67
3.2.4	Métrique, longueur, distance	69
3.2.5	Expressions locales	70
3.3	Adaptation de la résolution par changement de métrique	73
3.3.1	Espace image	73
3.3.2	Effet d'un changement de métrique	74
3.3.3	Calcul effectif des distances	76
3.4	Dynamique	78
3.4.1	Mouvement dans une variété Riemannienne	78
3.4.2	Adaptation des forces	80
3.5	Tests de collisions et changements de topologie	84
3.5.1	Cas bidimensionnel	84
3.5.2	Cas tridimensionnel	85
3.6	Résumé de l'algorithme	86
4	Construction des métriques	89
4.1	Motivations	89
4.2	Comportement souhaité	90
4.3	Géométrie des composantes images	94
4.3.1	Propriétés attendues	94
4.3.2	Méthode dérivative	96
4.3.3	Utilisation du tenseur de structure	97
4.3.4	Estimateur proposé	101
4.3.5	Validation expérimentale	104
5	Expérimentations	111
5.1	Introduction - rappels	111
5.2	Variation de la résolution avec la courbure et l'intensité de contours	111
5.2.1	Cas bidimensionnel	112
5.2.2	Cas tridimensionnel	113
5.3	Indépendance vis-à-vis de la résolution de l'image	116
5.4	Temps de calcul - comparaison entre adaptation locale et globale	116
5.4.1	Coût par itération	119
5.4.2	Nombre d'itérations avant convergence	126
5.4.3	Temps de calcul de la métrique	126
5.4.4	Bilan	131
5.5	Segmentation d'images synthétiques	132
5.6	Segmentations d'images biomédicales	133

5.6.1	Tomodensitométrie du crâne	133
5.6.2	Angiographie	134
5.6.3	Tomographie du thorax et de l'abdomen	135
5.7	Conclusion	136
6	Conclusion	149
6.1	Contributions	149
6.2	Limites et perspectives	150
6.2.1	Initialisation	150
6.2.2	Construction des métriques	152
6.2.3	Définition des forces	152
6.2.4	Applications possibles	153
6.2.5	Limite de stabilité	154
A	Géométrie riemannienne	157
A.1	Vecteur tangent comme opérateur différentiel	157
A.1.1	Définition	157
A.1.2	Équivalence avec la définition précédente	158
A.2	Géodésiques	158
A.3	Calcul de la métrique sur la sphère	160
B	Estimateurs de courbure	161
B.1	Courbure des lignes de niveau	161
B.2	Application de Knutsson	162

Notations

Ensembles

- \mathbb{N} Ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{Z} Ensemble des entiers relatifs.
- \mathbb{R} Ensemble des réels.
- \mathbb{R}^+ Ensemble des réels positifs ou nuls.
- \mathbb{R}^{+*} Ensemble des réels strictement positifs.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ Ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels.
- $|X|$ Cardinal de l'ensemble X , ou aire de la région X .

Images, signaux

- I Fonction Image.
- $|I|$ Taille de l'image, en nombre de pixels.
- n Dimension de l'espace image (pour une image bidimensionnelle $n = 2$, pour un volume de données $n = 3$).
- g_σ Fonction de Gauss d'écart-type σ .
- $f * g$ Produit de convolution du signal f par le signal g .
- $f_x, f_y \dots$ Dérivées partielles de f par rapport aux variables $x, y \dots$.

Vecteurs, Matrices

- a-z** Les vecteurs sont notés en gras.
- $\text{vec}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ L'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.
- ${}^t\mathbf{x}$ Transposé du vecteur \mathbf{x} .
- n** Vecteur normal à un contour ou une isosurface.
- t** Vecteur tangent à un contour ou une isosurface.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ Produit scalaire euclidien du vecteur **a** par le vecteur **b**.

- $\|\mathbf{v}\|_E$ Norme euclidienne du vecteur \mathbf{v} . Lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible on omettra le E en indice.
- $\|\mathbf{v}\|_R$ Norme riemannienne du vecteur \mathbf{v} . La dépendance par rapport à l'origine du vecteur est omise.
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ Matrice diagonale avec pour coefficients a_1, \dots, a_n .

Opérateurs différentiels

- ∇f Opérateur gradient.
- $\text{div} f$ Opérateur divergence.
- $\text{Hess}(f)$ Matrice hessienne de l'application f .

Maillages

- V Ensemble des sommets d'un maillage.
- E Ensemble des arêtes d'un maillage ($E \subset V \times V$).
- \otimes Relation d'adjacence sur l'ensemble des sommets.
- $\mathcal{N}(v)$ Voisinage du sommet v : $\mathcal{N}(v) = \{u \in V \mid u \otimes v\}$.

Géométrie différentielle et riemannienne

- $T_p M$ Espace tangent en un point p à une variété M .
- $\mathbf{v}_l, \mathbf{u}_k$ Les vecteurs sont notés en gras avec un éventuel indice en bas.
- v^1, \dots, v^n Les composantes des vecteurs dans une base, ou les formes linéaires sont notées avec leur indice en haut.
- $T_p^* M$ Dual de $T_p M$ (espace des formes linéaires sur $T_p M$).
- e_1, \dots, e_n Les composantes d'une forme linéaire sur une base de $T_p^* M$ sont notées avec leur indice en bas.
- $e \otimes f$ Produit tensoriel de deux formes linéaires.
- $T_p^* M \otimes T_p^* M$ Espace des formes bilinéaires sur $T_p M$.
- TM Fibré tangent à une variété M .
- $TM^{(0,2)}$ Fibré des tenseurs de type $(0, 2)$ sur M .
- g La métrique dont est muni l'espace.
- Γ_{ij}^k Les coefficients de *Christoffel*.
- $L_E(\gamma)$ Longueur euclidienne d'un chemin γ .
- $L_R(\gamma)$ Longueur riemannienne d'un chemin γ .

-
- $d_E(p, q)$ Distance euclidienne entre les deux points p et q de \mathbb{R}^n .
- $d_R(p, q)$ Distance riemannienne entre les deux points p et q .
- κ Courbure (d'une courbe).
- $\kappa_{\mathbf{v}}$ Courbure d'une surface dans la direction \mathbf{v} .
- κ_1, κ_2 Courbures principales d'une surface.

Introduction

Motivations

Depuis son apparition il y a une trentaine d'années, l'imagerie volumique a connu un essor très rapide. A la faveur des importants développements de l'électronique et de l'informatique elle est rapidement devenue un outil répandu dans de multiples domaines. Elle s'est par exemple imposée comme un outil indispensable au monde médical qui en fait maintenant un usage quotidien. Avec une innocuité presque totale, et une précision sans cesse croissante elle permet l'exploration et l'observation des structures internes de l'organisme. Cela fournit au praticien une information de grande valeur qui le guide dans son diagnostic et lui permet de vérifier l'effet des thérapies qu'il met en œuvre.

Au delà de la simple visualisation, les utilisations possibles se multiplient : aide au diagnostic, chirurgie assistée, synthèse d'implants, télé-médecine, archivage, simulation... Si un petit nombre de ces applications se satisfont de l'image seule, la plupart d'entre elles exploitent des représentations géométriques des structures échantillonnées dans les images. Ces modèles permettent de mesurer les structures d'intérêt, de les comparer, ou encore de suivre leur évolution dans le temps. Ils offrent également une alternative aux méthodes de visualisation classiques, coupe par coupe, et facilitent ainsi l'interprétation des données par des experts. En comparaison avec les images brutes, ces modélisations présentent donc un apport indéniable qui justifie le développement de méthodes automatiques pour les construire à partir des données produites par l'instrumentation.

Un très grand nombre de techniques ont été développées dans cet objectif. Souvent, on distingue deux étapes dans les processus qui aboutissent à la représentation géométrique de l'objet d'étude. La *segmentation* identifie les composantes de l'image : elle décompose l'image en différentes régions qui correspondent aux objets recherchés. La *reconstruction*, en second lieu, s'attache à construire des représentations géométriques des composantes identifiées pendant l'étape de segmentation.

Cette thèse s'intéresse plus particulièrement aux approches par *modèles déformables*. Cet ensemble de techniques fournit un contexte très général qui unifie la segmentation d'une composante de l'image et sa reconstruction au sein d'un même processus. Dans leur formulation classique, les modèles déformables peuvent être vus comme un simple sous-ensemble d'une classe plus large de méthodes classiquement regroupées sous le terme générique de *méthodes variationnelles* [45]. Le problème de segmentation/reconstruction est formulé comme la recherche d'un compromis entre deux exigences antagonistes. La première

privilégie la correspondance entre le modèle déformable, c'est-à-dire une représentation géométrique des objets, et les données à analyser. La seconde cherche à imposer la plus grande régularité possible à cette modélisation des composantes de l'image. Morel et Solimini [45] montrent que l'importance relative accordée à ces deux critères détermine l'échelle à laquelle l'image est analysée. Formellement ce compromis est écrit comme une fonctionnelle que la forme recherchée minimise. En pratique la recherche de cette forme consiste le plus souvent à déformer progressivement une représentation géométrique jusqu'à trouver la forme optimale, c'est-à-dire celle qui répond le mieux aux contraintes d'attache aux données et de régularité.

En comparaison avec d'autres, ces méthodes prennent en compte des connaissances de haut niveau sur les objets recherchés dès les premières étapes de l'analyse. La robustesse des ces approches est donc accrue, ce qui présente un avantage très significatif dans un contexte où les données sont bruitées et lacunaires. En outre, la généralité du formalisme employé permet de décliner ces approches en de très nombreuses variantes et de les spécialiser pour un très large spectre d'applications. Chacun des éléments qui composent un modèle déformable peut être adapté pour une tâche particulière : l'ensemble des formes accessibles, la mesure de la correspondance avec les données, les hypothèses et les contraintes *a priori* imposées aux modèles peuvent être modifiés et enrichis à volonté.

Dans le contexte biomédical qui demeure un domaine d'application privilégié de l'imagerie volumique, les tâches de segmentation et de reconstruction sont d'autant plus ardues que les objets à extraire peuvent exhiber des formes complexes, éventuellement anormales, et parfois difficiles voire impossibles à prévoir à l'avance. Pour les segmenter et les reconstruire aussi exactement que possible, certains modèles, dits *hautement déformables*, sont capables d'adapter leur topologie automatiquement en fonction de la forme des objets trouvés dans les images. Ils conservent un comportement cohérent, même lorsque les objets à extraire présentent une structure inattendue. La contrepartie réside dans une complexité plus importante, directement déterminée par la résolution des images. Elle est d'autant plus pénalisante que les moyens d'acquisition de plus en plus précis fournissent des volumes de données toujours plus importants.

Cette thèse propose et expérimente une méthode originale pour limiter la complexité d'un modèle hautement déformable existant proposé par Lachaud et Montanvert [35]. La stratégie envisagée est d'adapter localement la précision de la reconstruction, pour concentrer l'effort de calcul sur les zones intéressantes de l'image.

Le premier obstacle est d'y parvenir tout en conservant la capacité du modèle à adapter automatiquement et dynamiquement sa topologie. Il est surmonté en déformant virtuellement l'image pour agrandir les zones de l'image qui requièrent la précision la plus fine. Segmenter et reconstruire cette image déformée avec une précision uniforme revient à traiter l'image originale avec une résolution adaptée à l'intérêt porté à ses différentes structures. L'idée directrice consiste en réalité à laisser l'image invariante, mais à dilater localement les distances en remplaçant la métrique euclidienne par une métrique riemannienne judicieusement choisie.

Une seconde difficulté consiste à construire une métrique adaptée à la segmentation et la reconstruction des images. Il s'agit donc de détecter automatiquement les structures

intéressantes de l'image et déterminer pour chacune d'elle la précision la plus adaptée à sa reconstruction. La métrique qui est utilisée pour déformer artificiellement l'image est calculée de sorte que la précision soit la plus grande possible dans les parties les plus courbées des objets. En amont de la segmentation, les propriétés géométriques des composantes de l'image sont inconnues. Nous développons donc des méthodes qui s'efforcent de les déterminer directement à partir de l'image à traiter.

L'ensemble des outils développés dans cette thèse sont validés expérimentalement. Une série d'expériences sur des images synthétiques démontre l'adéquation entre les résultats effectifs et ce que prévoit la théorie. D'autres exemples sur des images biomédicales illustrent le fonctionnement du modèle sur des problèmes en vraie grandeur.

Plan

Le chapitre 1 rappelle le formalisme associé aux modèles déformables et les approches classiques du domaine. Trois caractéristiques sont utilisées pour classer les différentes approches proposées dans la littérature :

1. l'espace des formes qui sont représentables,
2. la méthode employée pour mesurer l'adéquation entre le modèle et les données et sa régularité,
3. l'algorithme utilisé pour déterminer sa forme optimale pour ce critère.

Chaque choix classique pour l'un ou l'autre de ces aspects est décrit succinctement.

Dans leur majorité, les travaux sur les modèles déformables visent deux objectifs antagonistes. Les uns élaborent des techniques entièrement génériques, réutilisables pour une variété d'applications aussi large que possible. Les autres mettent au point des méthodes rapides et robustes pour un contexte spécifique. Le plus souvent, les optimisations proposées exploitent un grand nombre de connaissances particulières à l'application visée. Le chapitre 2 examine les plus significatives de ces approches et montre qu'en règle générale la genericité d'une méthode n'est obtenue qu'au prix d'une complexité calculatoire significativement accrue. C'est en particulier vrai pour les modèles à topologie variable dont la complexité est directement liée à la résolution de l'image, en temps et en espace.

Le chapitre 3 étend l'un de ces modèles. Comme l'original, le modèle proposé représente explicitement les frontières des objets sous la forme de surfaces triangulées. Il conserve la capacité à segmenter et reconstruire des objets de topologie arbitrairement complexe mais s'affranchit en revanche d'une limitation imposée par le modèle de départ : la précision de l'analyse peut être adaptée localement à la demande d'un utilisateur ou pour refléter la complexité géométrique des objets de l'image. De cette manière, la complexité de la méthode de segmentation/reconstruction est rendue plus indépendante de la résolution de l'image. L'approche présentée consiste à modifier les estimations des distances en munissant l'espace image d'une métrique riemannienne qui étend les zones intéressantes et contracte les autres. En maintenant la longueur des arêtes pour cette métrique aussi uniforme que possible, on obtient une densité de sommets sur la maille variable et adaptée suivant

l'intérêt porté aux structures détectées dans l'image. La définition formelle de la métrique, et l'impact de sa modification sur le modèle déformable sont décrites en détail. L'ensemble des travaux présentés dans ce chapitre peuvent être retrouvés dans [58, 57, 36, 37].

Le chapitre 4 présente un procédé automatique pour la construction des métriques. L'idée directrice est d'adapter la résolution du modèle déformable en fonction de la géométrie des composantes images à reconstruire : la métrique est donc calculée de manière à ce que les parties les plus courbées des objets soient fortement dilatées et que, à l'inverse, les structures planes ou longilignes soient contractées. De la sorte, les sommets se répartissent harmonieusement à la surface du modèle déformable : la représentation des formes est améliorée et, dans le même temps la complexité de l'algorithme de segmentation/reconstruction est réduite. L'essentiel de la difficulté réside dans le calcul des propriétés géométriques des structures de l'image, et en particulier de leur courbure. En effet, avant la segmentation, aucune représentation de haut niveau des objets n'est disponible : ces caractéristiques doivent donc être déterminées à partir de l'information image seule, en étudiant localement la forme des isophotes. Deux méthodes tirées de la littérature sont décrites en détail. Comme elles ne répondent pas aux impératifs requis pour construire les métriques de manière appropriée, un nouvel estimateur est développé. Il est validé expérimentalement et comparé aux deux techniques existantes.

Le chapitre 5 valide expérimentalement le modèle proposé au chapitre 3 et la construction des métriques présentée au chapitre 4. Des expériences sur des images synthétiques montrent que les résultats sont conformes aux attentes. D'autres exemples sont présentés sur des images biomédicales et illustrent le comportement du modèle en conditions réelles.

L'annexe A présente quelques notions de géométrie riemannienne qui ne sont pas utilisées directement mais justifient un certain nombre de définitions et de notions utilisées. Elle détaille également certains calculs dont les résultats sont exploités pour définir le comportement du modèle déformable. Enfin, l'annexe B rappelle les démonstrations de certaines des propriétés utilisées pour estimer la courbure des objets directement à partir de l'image.

Chapitre 1

Modèles déformables en analyse d'images

1.1 Introduction

En plus de conditions d'acquisition parfois sous-optimales, chaque étape du processus d'acquisition des images peut introduire des distorsions par rapport aux données réelles. En dépit des efforts effectués pour en améliorer la qualité, les images obtenues sont donc en général dégradées et lacunaires. L'information qu'elles apportent est souvent insuffisante pour déterminer avec précision la forme et les caractéristiques des objets qu'elles représentent. Cette tâche ardue ne peut donc être entreprise qu'à l'aide de connaissances additionnelles sur les objets d'intérêt. La segmentation et la reconstruction sont alors un processus au cours duquel ces connaissances de haut niveau sont confrontées avec l'information fournie par les images.

Dans le contexte des modèles déformables, les hypothèses *a priori* portent sur la géométrie et éventuellement la topologie des objets à reconstruire : un ensemble de formes Σ est choisi, au sein duquel un critère distingue celle qui présente la meilleure adéquation avec les données à analyser. Des techniques efficaces et robustes sont alors mises en œuvre pour optimiser ce critère et extraire ainsi la forme qui approche le mieux les structures de l'image. Pour adapter le comportement d'un modèle déformable à des besoins donnés il est donc possible d'agir sur chacune de ces trois composantes :

1. L'espace des formes : Plus les connaissances sur les objets d'intérêt sont précises, plus l'espace des formes du modèle peut être restreint. Un faible nombre de paramètres suffit alors à décrire les objets. Les algorithmes de segmentation et de reconstruction sont donc robustes et efficaces. En contrepartie bien sûr, leur champ d'application est d'autant plus spécifique et limité que les hypothèses *a priori* sont contraignantes. En outre, suivant le domaine d'application visé, certaines représentations des objets peuvent être plus ou moins bien adaptées à la détermination de certaines propriétés des objets.
2. Le critère de sélection de la forme optimale : Pour trouver l'élément de Σ le plus

approprié pour représenter les objets, un critère mesure pour chaque forme sa vraisemblance et son adéquation avec les données. Ce critère est adapté suivant les applications, en tenant compte de l'espace des formes choisi, de la nature des données en entrée et d'éventuelles hypothèses sur les objets à extraire.

3. L'algorithme de minimisation : Partant d'une position initiale, le modèle est progressivement déformé de manière à optimiser le critère de qualité choisi. Différentes stratégies sont possibles pour atteindre le plus rapidement possible la forme recherchée.

Ces trois composantes sont rarement indépendantes : Souvent le critère qui décrit la forme optimale s'appuie sur la représentation choisie. De même, les algorithmes mis en œuvre pour le minimiser exploitent en général les propriétés de la représentation utilisée et du critère lui-même. Parfois même, le critère n'est pas défini explicitement mais découle de la dynamique du modèle. Il est donc difficile de décrire séparément chacun des ces trois aspects, et en particulier les deux derniers.

Le paragraphe 1.2 décrit différentes représentations des formes utilisées classiquement dans le contexte des modèles déformables appliqués à l'imagerie. Il montre en particulier que l'extension de Σ à des formes arbitraires requiert parfois la construction d'algorithmes élaborés et s'accompagne toujours d'une importante augmentation de la complexité. Le paragraphe 1.3 rappelle les définitions les plus courantes du critère qui mesure l'adéquation entre la forme et l'image. Pour chaque critère, il décrit également les méthodes usuellement employées pour déterminer la forme d'énergie minimale.

1.2 Espaces des formes - Déformations

D'une manière générale, une forme peut être représentée soit par le volume qu'elle occupe, soit par la localisation de sa frontière. Suivant l'application considérée, l'une ou l'autre de ces représentations peut se révéler plus pertinente.

Associées à une modélisation physique des phénomènes étudiés et à des méthodes numériques adaptées, les représentations volumiques permettent de simuler le comportement et les déformations des objets avec précision et réalisme. Naturellement cela induit des coûts généralement importants à la fois en temps et en espace. Une estimation raisonnable est de l'ordre de N^n , où N désigne le nombre de points utilisés pour la discrétisation du problème et n la dimension de l'espace.

A l'inverse, la représentation d'une frontière induit *a priori* des coûts inférieurs d'un ordre à ceux imposés par une représentation volumique (donc de l'ordre de N^{n-1}). En contrepartie, la simulation physiquement réaliste des déformations de l'objet étudié devient notablement plus compliquée.

Dans le contexte qui nous intéresse, le réalisme des déformations n'est pas un critère pertinent. Il s'agit en effet de reconstruire un objet statique dans l'image, et non de simuler son évolution. En revanche, avec l'accroissement constant des quantités de données à traiter, les temps de calcul requis pour la segmentation deviennent un facteur déterminant. C'est pourquoi la plupart des modèles déformables représentent les objets d'intérêt sous la forme

de courbes ou surfaces qui séparent l'intérieur de l'extérieur. Si des approches volumiques existent, leur utilisation reste essentiellement motivée par la simplicité de calcul et la flexibilité accrue qu'elles proposent. La simulation physique du comportement des objets en question n'est alors généralement pas prise en compte.

1.2.1 Modèles paramétriques de frontières

Pour ce type de modèles, les frontières des composantes images sont décrites paramétriquement sous la forme d'une application au moins continue et souvent de classe C^1 ou C^2 :

$$\begin{aligned} S : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto S(\mathbf{x}) = {}^t(s_1(\mathbf{x}), \dots, s_n(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Suivant la paramétrisation choisie, la genericité des formes est très variable. Elle peut être particulièrement restreinte [60] ou bien très étendue et permettre la reconstruction d'objets arbitrairement complexes [38]. Cependant, pour la grande majorité de ces modèles [14, 52, 53, 60, 65], l'espace des formes possibles est limitée à des topologies simples (celle de la droite ou du cercle en deux dimensions, celle du plan, de la sphère ou du tore en trois dimensions).

Le principal avantage des formulations paramétriques est la possibilité d'estimer des propriétés géométriques des modèles (comme par exemple le vecteur normal au contour ou encore sa courbure) en tout point de la forme.

La mise en œuvre de ces modèles soulève cependant un certain nombre des problèmes. En particulier, les paramétrisations classiques des surfaces ne possèdent en général pas les propriétés requises pour garantir la stabilité de certains calculs numériques (intégration le long des courbes et surfaces, évaluation de quantités différentielles...). Pour surmonter ces difficultés, plusieurs auteurs calculent une nouvelle paramétrisation de leur modèle plus appropriée que celle qui est utilisée habituellement. L'objectif est d'assurer qu'un échantillonnage régulier de Ω (voir (2.4)) conduise à un échantillonnage spatial régulier de la surface. Bardin *et al.* [6] calculent une transformation qui transforme la sphère unité en un super-ellipsoïde, et appliquent cette transformation à un échantillonnage régulier de la sphère, plus facile à obtenir. Vemuri *et al.* [64] posent le problème sous la forme d'une équation différentielle qui est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta. Székely *et al.* [55] déterminent aussi une paramétrisation de la surface déformable mieux adaptée à leur modèle. Là encore l'algorithme utilisé fait appel à des méthodes numériques élaborées, éventuellement coûteuses.

1.2.2 Modèles échantillonnés de frontières

Une autre approche propose de représenter les objets d'intérêt par un ensemble de sommets $V = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\}$ placés à leur surface.

Modèles non structurés

Ces sommets peuvent être indépendants les uns des autres et on parle alors de modèles non structurés. Szeliski et Tonnesen [56] proposent un modèle décrit par un ensemble de particules dont chacune est munie d'un repère local qui décrit l'orientation de la frontière des objets à son voisinage. Chaque particule induit sur les autres un ensemble de forces qui

- imposent aux particules de rester à une distance donnée les unes des autres,
- attirent chaque particule dans les plans tangents des particules situées à proximité,
- alignent entre eux les repères des particules situées dans un voisinage.

L'action de ces forces conduit les particules à se rassembler et s'aligner entre elles. Lorsque, de plus, les particules sont soumises à des forces externes appropriées, les particules s'organisent en morceaux de surfaces qui longent les frontières des objets d'intérêt.

La simplicité de ce modèle s'accompagne de contreparties importantes. D'une part la force induite par une particule s'applique *a priori* à toutes les autres, ce qui représente des coûts calculatoires potentiellement importants. D'autre part, la topologie des objets n'est pas représentée explicitement : le modèle ne fournit qu'un nuage de points qui échantillonne les frontières des objets d'intérêt. Il est donc impossible de garantir certaines propriétés topologiques du modèle. Par exemple, il n'est pas possible d'imposer au modèle de toujours représenter une surface fermée. De même certaines quantités géométriques (longueur ou aire, courbure. . .) des formes reconstruites ne sont pas directement calculables ce qui limite considérablement le champ d'application de ce type de modèles.

Courbes polygonales - Modèles triangulés - Mailles simplexes

Pour obtenir une description des formes plus exploitable, il est possible de relier entre eux les sommets de manière à obtenir une courbe polygonale ou une surface maillée. Formellement, il s'agit de munir l'ensemble V des sommets qui échantillonnent la forme d'une relation d'adjacence notée \otimes qui, pour chaque sommet, précise quels sont ses voisins. Connaissant la relation d'adjacence et certaines propriétés du modèle, il devient possible de déterminer certains invariants topologiques du modèle comme par exemple sa caractéristique d'Euler-Poincaré. De plus, certaines propriétés géométriques des formes, comme leur courbure ou leur normale deviennent calculables [20, 59].

Réciproquement, un choix judicieux de la relation d'adjacence, permet d'imposer une topologie donnée au modèle. En deux dimensions par exemple deux choix sont possibles : Tous les sommets peuvent posséder exactement deux voisins, auquel cas le modèle est une courbe polygonale nécessairement fermée. Ces exigences peuvent être assouplies en imposant seulement que chaque sommet possède un ou deux voisins. Il devient alors possible de représenter des lignes polygonales ouvertes.

En trois dimensions, un choix plus large est possible. Deux types de modèles sont plus fréquemment utilisés pour les propriétés intéressantes qui les accompagnent : les surfaces triangulées d'une part, les mailles simplexes d'autre part.

Les surfaces triangulées sont probablement les plus utilisées pour représenter les fron-

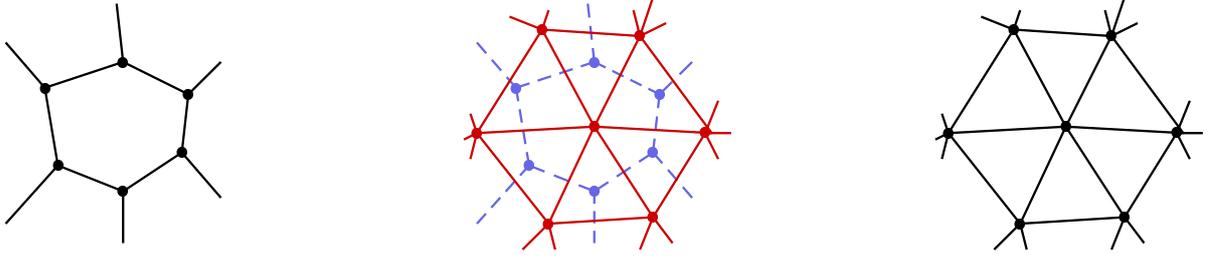


FIG. 1.1 – Dualité entre maille simplexe (à gauche) et surface triangulée (à droite)

tières des objets [34, 41, 59]. Pour cette représentation, la relation d'adjacence \otimes est définie de sorte que

- la relation \otimes soit symétrique et non réflexive,
- chaque sommet possède k voisins $\{v_0, \dots, v_{k-1}\}$, $k \geq 3$,
- il existe une permutation σ de l'ensemble $\{0, \dots, k-1\}$ telle que pour tout sommet $v_{\sigma(i)}$ du voisinage, $v_{\sigma(i) \bmod k} \otimes v_{\sigma(i+1) \bmod k}$.

Avec ces définitions, les surfaces représentées sont nécessairement sans bord.

Les mailles simplexes [18, 20, 22] sont une alternative aux surfaces triangulées. La relation d'adjacence est définie de manière à ce que tout sommet v possède un voisinage $\mathcal{N}(v)$ de taille égale à la dimension n de l'espace :

$$\forall v \in V, \quad |\mathcal{N}(v)| = n. \quad (1.2)$$

Dans le cas à deux dimensions, les mailles simplexes sont bien entendu des courbes polygonales, dans lesquelles chaque sommet possède deux voisins. Dans le cas tridimensionnel, chaque sommet possède trois voisins et il existe donc une relation de dualité entre mailles simplexes et surface triangulée (voir Fig. 1.1).

Le principal intérêt des mailles simplexes est qu'elles donnent un accès très simple à la géométrie locale du modèle. En particulier la position d'un sommet de la maille peut être facilement décrite à l'aide de paramètres géométriques locaux et des positions des sommets voisins sur la maille. En deux dimensions par exemple, avec les notations de la figure 1.2, la position du sommet \mathbf{p}_i est donnée par la relation :

$$\mathbf{p}_i = (1 - \epsilon_i)\mathbf{p}_{i-1} + \epsilon_i\mathbf{p}_{i+1} + \frac{r_i}{\tan \phi_i} \left(1 + \mu \sqrt{1 + 4\epsilon_i(1 - \epsilon_i) \tan^2 \phi_i} \right) \mathbf{n}_i. \quad (1.3)$$

Dans cette équation, $1 - \epsilon_i$ et ϵ_i désignent les coordonnées barycentriques de \mathbf{h}_i par rapport aux sommets \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} . Suivant que $|\phi_i|$ est inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$, μ vaut 1 ou -1 . Des expressions analogues existent en trois dimensions.

Pour manipuler ces deux types de modèles, différentes opérations sont disponibles. Elles modifient localement la maille du modèle et se révèlent particulièrement utiles pour adapter la représentation de la surface lorsqu'elle se déforme.

L'inversion d'arête (Fig. 1.3) est utilisée pour améliorer la structure de la surface triangulée ou, de manière équivalente de la maille simplexe. Elle peut en particulier être utilisée

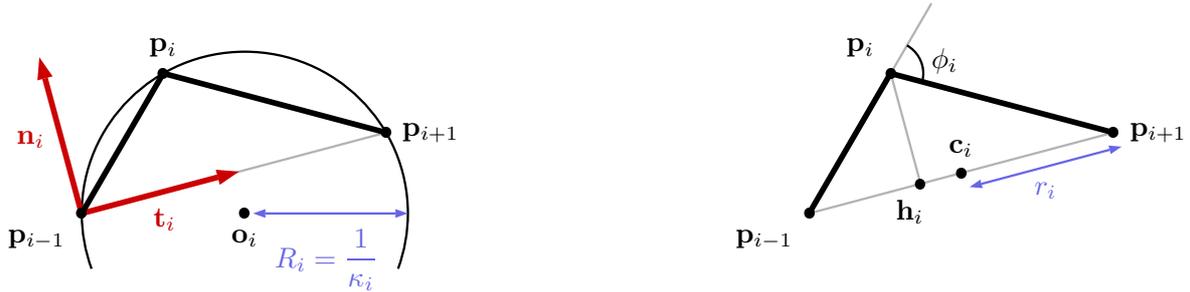


FIG. 1.2 – Paramètres géométriques des mailles simples en deux dimensions. Le centre du cercle circonscrit à \mathbf{p}_{i-1} , \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} est noté \mathbf{o}_i et son rayon R_i . La tangente \mathbf{t}_i au modèle est définie comme le vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$. La normale \mathbf{n}_i est le vecteur orthogonal. Le milieu du segment $\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$ est noté \mathbf{c}_i et sa demi-longueur r_i . Le projeté orthogonal de \mathbf{p}_i sur $\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$ est noté \mathbf{h}_i . L'angle formé par les vecteurs $\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ est appelé *angle simplexe* et est noté ϕ_i .

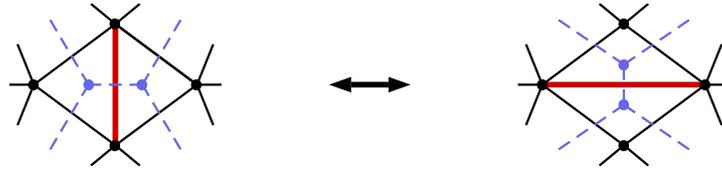


FIG. 1.3 – Inversion d'arête sur une surface triangulée et sur la maille simplexe duale (en pointillés).

lorsque les faces d'une surface triangulée s'aplatissent exagérément. Dans une maille simplexe, cette situation est caractérisée par de grandes disparités dans le nombre d'arêtes qui constituent les faces du modèle.

Pour affiner un modèle existant, il est possible de raffiner la maille du modèle déformable comme indiqué aux figures 1.4 et 1.5. Ces transformations sont particulièrement utiles dans le cadre d'approches “coarse to fine” (voir le paragraphe 2.4.1).

Il est également possible de diviser en deux une arête d'une surface triangulée, ce qui pour la surface simplexe duale équivaut à scinder une face en deux parties (Fig. 1.6 à gauche). Réciproquement, une arête d'une surface triangulée peut être contractée, ce qui équivaut à fusionner deux faces adjacentes sur la maille simplexe duale (Fig. 1.6 à droite). Toutefois cette dernière opération doit être menée en accordant une attention particulière à certains cas particuliers dans lesquels la transformation provoquerait l'apparition de singularités (voir Fig. 1.7).

Toutes ces opérations préservent la topologie de la forme représentée. D'autres, décrites à la figure 1.8, permettent par contre de changer le genre de la surface représentée. Cependant, rien garantit que la topologie de la maille soit concordante avec la géométrie de la forme : la surface échantillonnée peut présenter des auto-intersections et il n'est pas nécessairement possible de choisir une orientation valide du modèle. Pour garantir cette

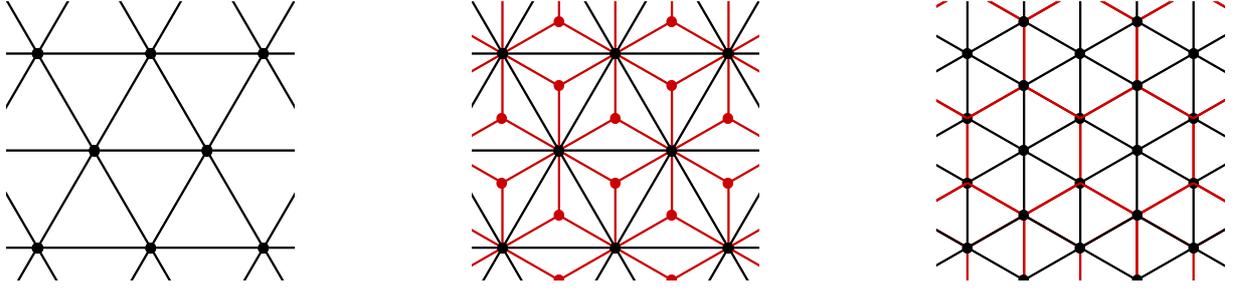


FIG. 1.4 – Raffinement d’une surface triangulée : un sommet est ajouté au centre de chaque face et connecté à chacun des ses sommets. Ensuite, toutes les arêtes de la surface originale sont inversées. La transformation équivalente de la maille simplexe duale est représentée à la figure 1.5.

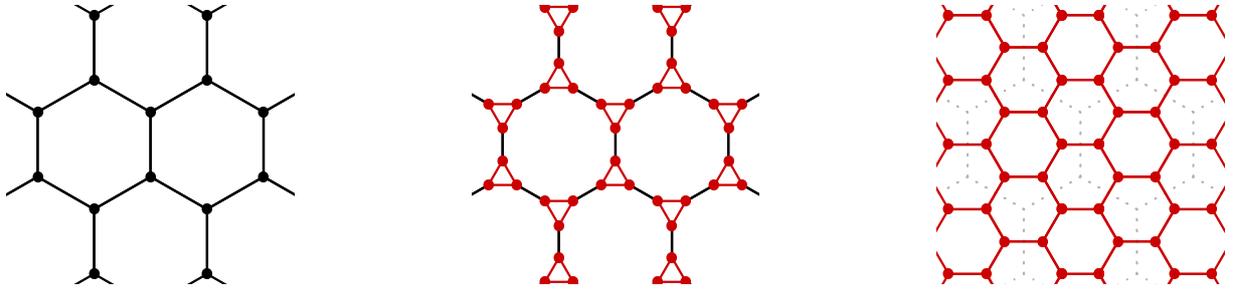


FIG. 1.5 – Raffinement d’une maille simplexe. Chaque sommet est remplacé par une face triangulaire. Les arêtes du modèle d’origine (en noir sur l’image centrale) sont ensuite inversées. Sur la figure de droite, les pointillés correspondent au maillage de départ. La transformation équivalente de la surface triangulée duale est représentée à la figure 1.4.

cohérence, des procédures spécifiques doivent être mises en œuvre de sorte que la topologie de la maille s’adapte en fonction de la géométrie des modèles.

Dans le cas de maillages simplesxes, les changements de topologie sont effectués sur indication de l’utilisateur à l’aide des transformations décrites à la figure 1.8. Si cette approche est satisfaisante pour des objets relativement simples, elle demeure inapplicable dans des cas plus compliqués et ne garantit pas la reproductibilité de la segmentation.

Dans le cas des surfaces triangulées, et également pour l’analyse d’images bidimensionnelles, Lachaud et Montanvert [35] utilisent les opérations décrites à la figure 1.6 pour maintenir des contraintes de distances entre les sommets voisins sur la maille :

$$\forall u, v \in V, \quad u \otimes v \quad \Rightarrow \quad \delta \leq d_E(u, v) \leq \zeta \delta \quad (1.4)$$

La constante δ détermine globalement la densité de sommets sur la maille. La constante $\zeta \geq 2$ spécifie dans quel intervalle la longueur des arêtes peut varier.

Lorsque les conditions (1.4) sont satisfaites, un sommet \mathbf{v} du modèle ne peut pas traverser une face $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sans pénétrer dans l’une des sphères de rayon judicieusement choisi $\lambda \zeta \delta$ et respectivement centrées en \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} . La détection des collisions peut alors être

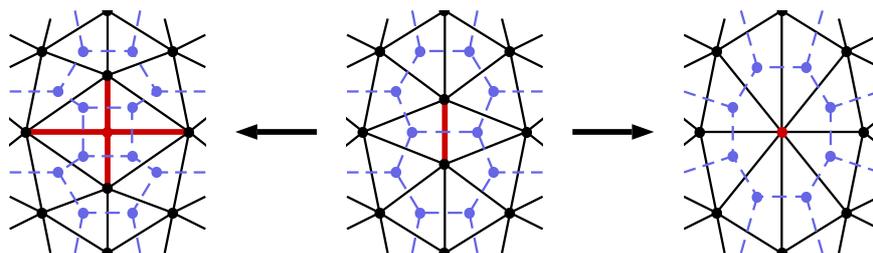


FIG. 1.6 – Division (à gauche) et contraction (à droite) d'une arête d'une surface triangulée. Opérations correspondantes sur la maille simplexe duale (en pointillés). Concernant la contraction d'arête, certains cas particuliers doivent être pris en compte pour garantir la cohérence de la représentation (voir Fig. 1.7).

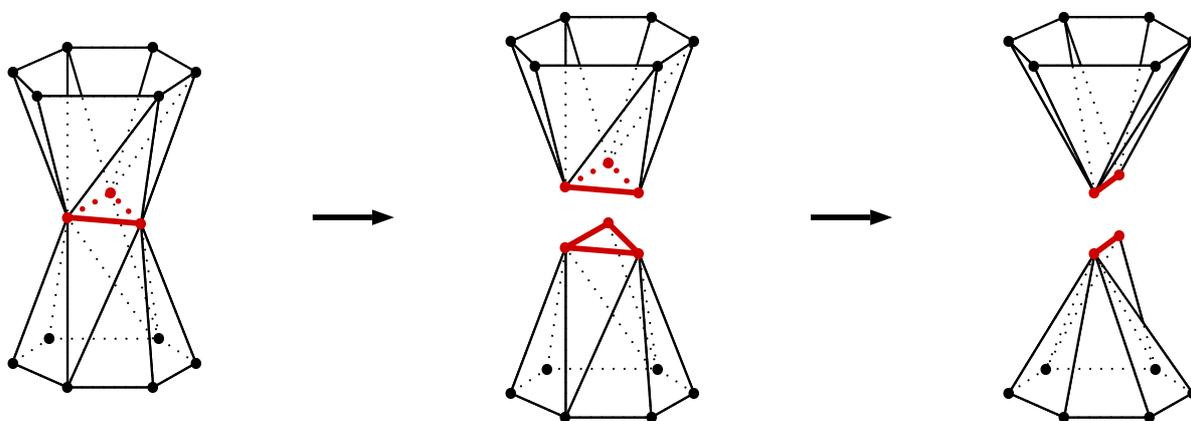


FIG. 1.7 – Cas particuliers à gérer pour garantir la cohérence de la représentation lors d'une contraction d'arête ou d'une fusion de faces.

effectuée par une simple estimation des distances entre sommets non voisins :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \not\sim \mathbf{v} \\ d_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \lambda\zeta\delta \end{cases} \Rightarrow \text{auto-intersection} \quad (1.5)$$

Ce procédé de détection des collisions du modèle avec lui-même est décrit plus en détail au paragraphe 3.1.

Lorsqu'une collision est détectée, la topologie du modèle est mise à jour en utilisant l'une des transformations décrites à la figure 1.8.

McInerney *et al.* proposent une autre approche, valide en dimension quelconque. Au cours de son évolution, leur modèle déformable est périodiquement rééchantillonné sur une grille simpliciale. Entre deux rééchantillonnages successifs le modèle déformable franchit un certain nombre de nœuds de la grille. Il est possible de déterminer lesquels et donc de maintenir un étiquetage qui, pour chaque nœud, indique s'il est à l'intérieur ou à l'extérieur

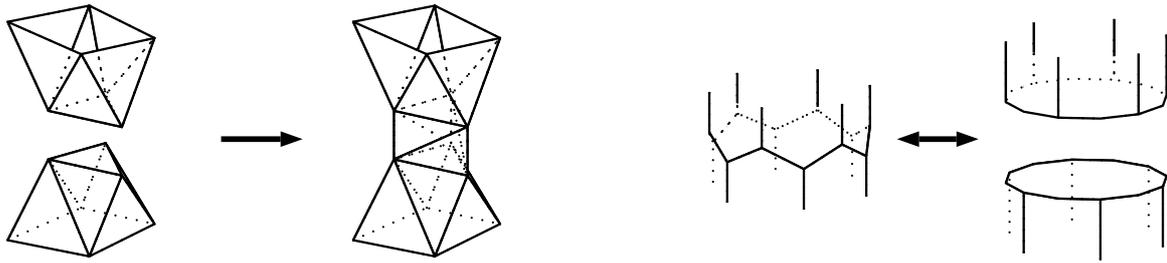


FIG. 1.8 – Transformations locales d’une maille triangulée ou d’une maille simplexe qui permettent de changer la topologie des modèles.

de la forme courante. Pour une cellule donnée de la décomposition simpliciale, il est toujours possible de trouver sans ambiguïté un hyperplan qui sépare les sommets intérieurs des sommets extérieurs. Cette propriété permet de construire une relation d’adjacence entre les sommets de la maille de sorte que la surface déformable conserve une topologie cohérente avec sa géométrie. Pour l’analyse d’images bidimensionnelles Montagnat et Delingette [22] proposent une méthode similaire. Toutefois ils utilisent la grille discrète classique plutôt que d’exploiter une décomposition simpliciale. Certaines des propriétés utilisées par McInerney *et al.* sont donc perdues ce qui rend leur modèle difficile à étendre en trois dimensions.

En comparaison avec les représentations paramétriques, l’intérêt de ces approches est donc qu’elles permettent de représenter des objets de topologie quelconque, et d’adapter dynamiquement la topologie du modèle à mesure qu’il évolue et se déforme. Cette généralité vis-à-vis de la forme à reconstruire s’accompagne toutefois de coûts calculatoires importants. De plus, les algorithmes mis en jeu peuvent être compliqués et nécessiter la gestion de nombreux cas particuliers.

1.2.3 Modèles implicites

Les modèles pour lesquels les changements de topologie sont effectués avec le plus de facilité sont sans doute ceux qui exploitent une représentation par ensemble de niveaux [9, 39, 71]. Ils reprennent les travaux d’Osher et Sethian [2, 46, 51] pour l’étude de la propagation d’interfaces. La frontière \mathcal{S} des objets d’intérêt est ainsi représentée comme l’ensemble de niveau 0 d’une application ϕ définie sur l’espace image et à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (1.6)$$

Le signe de $\phi(\mathbf{x})$ indique si \mathbf{x} est à l’intérieur ou à l’extérieur de l’objet représenté. Avec cette représentation, les caractéristiques géométriques locales d’un modèle se calculent très facilement. En particulier, la normale au contour s’écrit :

$$\mathbf{n}_{|\mathbf{x}} = -\frac{\nabla\phi_{|\mathbf{x}}}{\|\nabla\phi_{|\mathbf{x}}\|} \quad (1.7)$$

En deux dimension sa courbure s'écrit :

$$\kappa|_{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) |_{\mathbf{x}} = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_{xy}\phi_x\phi_y + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.8)$$

où les dérivées de ϕ sont évaluées au point \mathbf{x} . Des formules similaires existent en trois dimensions.

La mise en correspondance du modèle avec les structures de l'image est obtenue en modifiant itérativement ϕ (voir Sect. 1.3.4). Si ces méthodes permettent la représentation d'objets de topologies arbitrairement complexes, leur principal atout réside dans la simplicité avec laquelle les changements de topologie des modèles sont gérés. En effet, aucune procédure particulière n'est à mettre en œuvre pour maintenir un échantillonnage correct des contours, détecter les auto-intersections du modèle et maintenir son orientation cohérente.

Dans la pratique l'application ϕ est échantillonnée aux nœuds d'une grille cartésienne d'une résolution comparable à celle de l'image. Sans optimisation particulière, toutes les valeurs à tous les nœuds de la grille sont mises à jour à chaque déformation du modèle. Ces approches souffrent donc d'une complexité particulièrement importante, en temps comme en espace. Diverses méthodes permettent cependant d'obtenir des temps de calculs acceptables. Elles sont décrites au paragraphe 2.3.2.

1.3 Mise en adéquation avec l'image

1.3.1 Formulation énergétique

Dans la formulation originale de Kass et Terzopoulos [30] et dans un grand nombre de travaux ultérieurs [13, 14, 55] la recherche de la meilleure forme possible est exprimée comme la minimisation d'une fonctionnelle souvent appelée *énergie*. Classiquement l'énergie associée à une forme \mathcal{S} plongée dans une image I est exprimée comme somme de deux termes :

$$E(\mathcal{S}, I) = E_{\text{int}}(\mathcal{S}) + E_{\text{ext}}(\mathcal{S}, I), \quad (1.9)$$

dont l'un favorise les formes les plus régulières, et l'autre favorise la correspondance avec les structures recherchées dans les images.

Énergie interne

Le premier terme, E_{int} , favorise les formes les plus régulières. Dans le cas du modèle proposé par Kass et Terzopoulos, l'énergie interne associée à la courbe paramétrée \mathbf{S} est définie par

$$E_{\text{int}}(S) = \int_0^1 \left(\frac{\alpha(u)}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right\|^2 + \frac{\beta(u)}{2} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \right\|^2 \right) du. \quad (1.10)$$

Ces deux termes pénalisent respectivement la longueur de la courbe et sa courbure totale. Cette approche est étendue au cas tridimensionnel dans [14] où l'énergie de la surface paramétrée est définie par :

$$E_{\text{int}}(S) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(w_u \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right\|_{|(u,v)}^2 + w_v \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\|_{|(u,v)}^2 + w_{uu} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \right\|^2 + w_{uv} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} \right\|^2 + w_{vv} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} \right\|^2 \right) du dv. \quad (1.11)$$

L'avantage de ces deux formulations est que leurs discrétisations par les méthodes des différences ou des éléments finis conduisent à des systèmes linéaires relativement faciles à traiter numériquement. L'inconvénient est la dépendance de l'énergie avec la paramétrisation : deux paramétrisations distinctes de la même forme conduisent à des énergies différentes, ce qui n'est naturellement pas souhaitable. Il est possible de corriger ces défauts. Plusieurs alternatives sont par exemple proposées et comparées dans [21]. Toutefois, les approches proposées ne sont pas implémentées et certaines d'entre elles semblent difficiles à mettre en œuvre.

Énergie externe

Dans l'équation (1.9) le terme E_{ext} mesure l'adéquation entre le modèle et les données à analyser. Dans le contexte de la segmentation d'images la plupart des modèles calculent un champ de potentiel P à partir de l'image. Une fois P choisi, l'énergie d'interaction entre le modèle et l'image est définie par intégration le long de la courbe ou de la surface. Dans le cas d'une courbe paramétrée, cela s'écrit :

$$E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I) = \int_0^1 P(\mathbf{S}(u)) du. \quad (1.12)$$

Dans le cadre d'une approche contour, les frontières des objets sont caractérisées par des valeurs élevées du gradient de la fonction image. Il est donc naturel de définir P sous la forme :

$$P(\mathbf{x}) = f \left(\left\| \nabla (g_{\sigma} * I)_{|\mathbf{x}} \right\| \right), \quad (1.13)$$

où f désigne une fonction continue et décroissante. La valeur de σ détermine à la fois l'échelle à laquelle l'analyse de l'image est effectuée et la distance à laquelle l'information de contour est propagée.

Si la segmentation d'images exploite le plus souvent une information de contours, certaines applications peuvent tirer parti d'autres caractéristiques. En modifiant P il est possible d'adapter le comportement du modèle déformable pour prendre en compte ces autres informations. Kass et Terzopoulos [30] proposent par exemple un potentiel qui attire le modèle déformable vers les extrémités des contours. Ces points sont caractérisés par une

courbure importante des isocontours de la fonction image. Dans le cas d'une image en deux dimensions, le potentiel correspondant peut s'écrire sous la forme :

$$P(\mathbf{x}) = f(|\kappa_{|\mathbf{x}}|) = f\left(\left|\frac{I_{xx}I_y^2 - 2I_{xy}I_xI_y + I_{yy}I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\right), \quad (1.14)$$

où f désigne une fonction décroissante et $\kappa_{|\mathbf{x}}$ la courbure des isocontours de l'image au point \mathbf{x} . D'autres champs de potentiel ont ainsi été proposés pour différentes applications [30, 14]. Certains rendent les processus de segmentation et de reconstruction plus efficaces et robustes et sont décrits plus en détail au paragraphe 2.4.2.

Énergie de région

A l'origine, les modèles déformables étaient essentiellement des approches contours. Plus récemment, la prise en compte d'information de région a été intégrée dans le critère utilisé pour définir la forme la plus appropriée pour représenter les objets d'intérêt. Comme pour la recherche de contour, l'énergie s'écrit sous la forme d'une intégrale :

$$E_{\text{région}}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{R}} k(\mathbf{x}, \mathcal{R}) d\mathbf{x} \quad (1.15)$$

où \mathcal{R} désigne la partie de l'espace située à l'intérieur du modèle déformable. La région \mathcal{R} étant donnée, la quantité k mesure pour chaque point de la région son adéquation avec les propriétés générales de la région. Ce critère peut ne pas tenir compte de la forme de \mathcal{R} ni du point $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ considéré. Par exemple, en prenant :

$$k(\mathbf{x}, \mathcal{R}) = 1 \quad (1.16)$$

l'énergie correspond à l'aire $|\mathcal{R}|$ de la région \mathcal{R} .

Le critère peut au contraire prendre en compte des informations calculées sur l'intégralité de \mathcal{R} , comme par exemple la moyenne $\mu(\mathcal{R})$ et la variance $\sigma^2(\mathcal{R})$ du niveau de gris sur la région :

$$\begin{cases} \mu(\mathcal{R}) &= \frac{1}{|\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{R}} I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \sigma^2(\mathcal{R}) &= \frac{1}{|\mathcal{R}|} \int_{\mathcal{R}} (I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{R}))^2 d\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.17)$$

Les critères correspondants s'écrivent alors simplement comme la variance du niveau de gris sur \mathcal{R} :

$$k(\mathbf{x}, \mathcal{R}) = f(\sigma^2(\mathcal{R})), \quad (1.18)$$

ou bien l'écart du niveau de gris en \mathbf{x} au niveau de gris moyen sur la région :

$$k(\mathbf{x}, \mathcal{R}) = f((I(\mathbf{x}) - \mu(\mathcal{R}))^2), \quad (1.19)$$

où $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ désigne une fonction croissante.

Lorsque le critère a été choisi, il convient de mettre au point une méthode de minimisation efficace. Suivant la nature du critère différentes approches ont été proposées.

Cohen Bardin et Ayache [12, 11] proposent une méthode qui permet d'isoler des régions de niveau de gris homogène dans des images. L'énergie du modèle déformable est exprimée comme la somme des termes d'énergie classiques (régularisation et détection de contours) et de la variance du niveau de gris dans la région délimitée par le modèle déformable. Pour minimiser l'énergie, les auteurs définissent une force qui permet de faire décroître l'énergie de région. Cette force est exprimée en négligeant les variations entre deux itérations de l'intégrande $k(\mathbf{x}, \mathcal{R})$ en fonction de \mathcal{R} . La force exercée sur les points du contour déformable à l'itération i s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x}, \mathcal{R}_i) \mathbf{n}_{|\mathbf{x}}, \quad (1.20)$$

où \mathcal{R}_i désigne la région délimitée par le modèle à l'itération i . Après le déplacement du modèle, les termes calculés sur la région (dans ce cas la niveau de gris moyen) sont recalculés de manière à prendre en compte la nouvelle position du modèle déformable pour l'itération suivante.

Chakraborty, Staib et Duncan [10] utilisent le théorème de Green pour transformer l'intégrale sur \mathcal{R} en une intégrale le long du bord de \mathcal{R} c'est-à-dire du contour déformable. L'information de région prend donc une forme locale et l'énergie peut alors être minimisée avec les mêmes approches que pour une énergie définie sous la forme (1.12) (voir le paragraphe suivant). Cependant, cette approche n'est pas directement utilisable pour des fonctionnelles pour lesquelles k dépend de la région, comme dans (1.18) ou (1.19).

L'approche proposée par Jehan-Besson [29] surmonte la difficulté en exploitant le formalisme de la *dérivation de domaines*. Ces travaux définissent la dérivée d'une fonctionnelle de la forme de (1.15) dans la direction d'un champ de vecteurs $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donné. La condition d'optimalité de la fonctionnelle s'écrit comme une contrainte sur \mathbf{v} , ce qui permet de définir le champ des vitesses des points du modèle. L'évolution de la courbe déformable peut alors être calculée en utilisant les méthodes décrites au paragraphe 1.3.4.

1.3.2 Formulation dynamique

La formulation énergétique décrite aux paragraphes précédents peut être vue comme un problème stationnaire et la recherche de la forme optimale effectuée grâce à des méthodes numériques classiques. Cependant la minimisation de la fonctionnelle d'énergie est très souvent entreprise par une approche dynamique [13, 14, 30, 35, 40, 41]. Les équations d'Euler-Lagrange associées à (1.9) s'interprètent en effet comme les équations qui caractérisent les positions d'équilibre d'un système mécanique soumis à un ensemble de forces. Pour le modèle de Kass et Terzopoulos par exemple, la position d'équilibre du modèle déformable

est définie par :

$$\forall u \in [0, 1], \underbrace{-\frac{\partial}{\partial u} \left(\alpha(u) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right) \Big|_u}_{\mathbf{F}_{\text{élastique}}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\beta(u) \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \right) \Big|_u}_{\mathbf{F}_{\text{rigide}}} \underbrace{-\nabla P|_u}_{\mathbf{F}_{\text{image}}} = 0. \quad (1.21)$$

Partant d'une position initiale quelconque, la forme optimale est obtenue en laissant le modèle évoluer sous l'action de forces qui dérivent des différentes énergies. Le modèle déformable est donc vu comme une courbe ou une surface \mathcal{S}_t dépendante du temps dont chaque point suit la loi d'évolution :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} + \dots \quad (1.22)$$

Lorsque le modèle est discrétisé, il est également possible d'utiliser les lois de Newton pour décrire le mouvement de chacun des sommets. Comme les forces mises en jeu sont le plus souvent conservatives, il est nécessaire d'introduire un terme dissipatif pour empêcher le modèle d'osciller autour de sa position d'équilibre. Le mouvement de chaque sommet suit alors l'équation différentielle :

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} + \dots, \quad (1.23)$$

où m désigne la masse associée au sommet et γ un coefficient qui pondère la force de frottement visqueux utilisée pour dissiper l'énergie du modèle.

Si elle offre une méthode élégante pour trouver la forme optimale, cette interprétation physique permet aussi l'adjonction de contraintes supplémentaires au modèle déformable sous la forme de forces additionnelles qui ne dérivent pas d'une énergie (voir le paragraphe 2.4.2). Certains auteurs [20, 56] utilisent également cette approche pour définir leur modèle directement sous la forme d'un système dynamique sans utiliser la formulation énergétique.

En dépit de l'intérêt qu'elles présentent ces méthodes ne sont pas exemptes de défauts. En particulier la forme du champ de potentiel où d'un éventuel champ de forces additionnel peut avoir une influence néfaste sur la stabilité du modèle : alors que des forces trop faibles deviennent négligeables devant les forces de régularisation, des forces trop importantes risquent de rendre le modèle instable. Suivant les auteurs, différentes approches sont envisagées pour s'affranchir de ces problèmes : Kass et Terzopoulos [30] adaptent manuellement le pas de temps utilisé dans la discrétisation en temps des équations (1.22) et (1.23). Cohen et Cohen [13] proposent de normaliser la force de sorte que tous les points du modèle se déplacent à des vitesses comparables, ce qui rend le choix du pas de temps plus aisé. Enfin Lachaud [33] utilise la méthode de Runge-Kutta pour sa stabilité et montre qu'un ajustement approprié du coefficient de frottement γ dans (1.23) permet de stabiliser le système tout en conservant des temps de convergence raisonnables.

1.3.3 Formulations probabilistes

Ces approches modélisent la probabilité qu'une forme donnée représente avec précision les objets d'intérêt de l'image I à analyser. L'objectif est ensuite de déterminer parmi toutes les formes possibles, celle dont la probabilité est la plus élevée. La forme recherchée $\bar{\mathcal{S}}$ est donc définie comme :

$$\bar{\mathcal{S}} = \operatorname{argmax}_{\mathcal{S} \in \Sigma} \{ \operatorname{Prob}(\mathcal{S}|I) \}. \quad (1.24)$$

En appliquant la règle de Bayes et après quelques transformations élémentaires, cela se réécrit :

$$\bar{\mathcal{S}} = \operatorname{argmax}_{\mathcal{S} \in \Sigma} \{ \log(\operatorname{Prob}(I|\mathcal{S})) + \log(\operatorname{Prob}(\mathcal{S})) \}. \quad (1.25)$$

Le premier terme caractérise la correspondance entre le modèle et l'image. En général il peut être approché par une intégration numérique de l'information image le long du contour déformable.

Le second terme ne dépend que de la classe des objets d'intérêt. Si aucune hypothèse n'est disponible au sujet des formes à extraire il peut être supprimé. Cela revient à supposer que toutes les formes ont des probabilités d'apparition identiques. Dans les cas rares où la nature des objets d'intérêt le permet, ce terme peut être modélisé mathématiquement. Dans un dernier cas enfin, il peut être approché par des lois normales dont les paramètres sont estimés à partir d'un échantillon représentatif des formes attendues [52, 53, 55, 64]. De cette manière, la dynamique des modèles déformables peut donc être enrichie pour prendre en compte des connaissances *a priori* qu'il serait difficile de spécifier explicitement. C'est là un avantage important des modèles probabilistes. Cette possibilité n'est toutefois utilisable que pour des modèles décrits par un nombre de paramètres restreint et constant.

Par ailleurs, il est intéressant de signaler que les approches probabilistes et par minimisation d'énergie sont équivalentes. En effet, la statistique de Maxwell-Boltzmann relie l'énergie d'un système dans un état donné à la probabilité pour que ce système se trouve dans cet état. Dans le cas qui nous intéresse les relations qui en découlent s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Prob}(\mathcal{S}) = \frac{1}{Z_{\text{int}}} \exp(-E_{\text{int}}(\mathcal{S})) \\ \operatorname{Prob}(\mathcal{S}, I) = \frac{1}{Z_{\text{ext}}} \exp(-E_{\text{ext}}(\mathcal{S}, I)) \end{array} \right., \quad (1.26)$$

où Z_{int} et Z_{ext} sont des constantes de normalisation. Trouver la forme la plus probable revient donc à trouver le modèle de plus faible énergie. La recherche de la forme de probabilité maximale peut donc être effectuée à l'aide d'algorithmes de minimisation classiques (voir à ce sujet le paragraphe 2.4.3).

1.3.4 Contours actifs géométriques

Propagation de front

Les contours actifs géométriques [8, 9, 71, 29] appréhendent la segmentation non plus comme une minimisation d'énergie mais directement comme l'évolution d'une courbe ou d'une surface plongée dans l'espace image. L'évolution du modèle est déterminée en choisissant pour chacun de ses points une vitesse \mathbf{F} qui dépend à la fois de la forme du modèle et de l'image à segmenter. La définition de \mathbf{F} ne doit faire intervenir que des quantités géométriques, et doit donc rester indépendante de toute paramétrisation de la courbe ou de la surface.

Le champ des vitesses \mathbf{F} étant choisi, le mouvement d'un point \mathbf{x} du modèle est donc décrit par l'équation d'évolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_t = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t). \quad (1.27)$$

Il est en fait possible de montrer que seule la composante de \mathbf{F} le long de la normale au modèle influence l'évolution de \mathcal{S} . La composante tangentielle ne jouerait un rôle que si la paramétrisation du modèle était prise en compte, ce qui n'est pas le cas. Les lois d'évolution qui nous intéressent sont donc restreintes à celle de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_t = F(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_{|\mathbf{x}}, \quad (1.28)$$

où F définit la vitesse de propagation de la courbe dans la direction de sa normale.

Avec cette formulation, deux problèmes doivent être résolus :

1. Déterminer la forme à l'équilibre des courbes et surfaces qui suivent l'équation d'évolution (1.28). Comme cela a déjà été signalé, les modèles implicites permettent de représenter des objets de topologies quelconques sans qu'aucune paramétrisation des objets ne soit utilisée. En outre ces modèles adaptent leur topologie automatiquement et dynamiquement sans avoir recours à un algorithme particulier. Il sont donc particulièrement bien adaptés à la représentation de contours actifs géométriques. La difficulté consiste à transposer sur la fonction implicite ϕ l'équation d'évolution souhaitée pour son ensemble de niveau zéro. Le paragraphe suivant traite ce problème en détail.
2. Déterminer un champ de vitesse F qui conduise le modèle à se stabiliser sur la frontière des objets d'intérêt. Différentes approches ont été proposées et sont décrites au dernier paragraphe de ce chapitre.

Implémentation par ensemble de niveaux

Pour faire évoluer le modèle déformable, la fonction ϕ est rendue dépendante du temps. Il s'agit donc de construire une fonction ϕ :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.29)$$

dont l'ensemble de niveau zéro \mathcal{S} suit une loi d'évolution similaire à (1.22). La difficulté est donc de déterminer une équation d'évolution pour ϕ qui corresponde au mouvement choisi pour la courbe ou la surface déformable.

Pour déterminer une application ϕ dont le niveau zéro suit (1.28) il suffit de dériver l'identité $\forall t \in [0, +\infty[$, $\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$ par rapport à t . En utilisant (1.28) on obtient l'équation d'évolution de la fonction ϕ :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_t, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}, t} - F(\mathbf{x}, t) \|\nabla \phi|_{\mathbf{x}, t}\| = 0. \quad (1.30)$$

Cette équation n'est *a priori* valide que si \mathbf{x} appartient à l'ensemble \mathcal{S}_t de niveau zéro de l'application $\phi(\cdot, t)$. Elle peut cependant être étendue à tout l'espace image, et devient alors une équation aux dérivées partielles qui implique ϕ et assure que son ensemble de niveau zéro suit (1.28). Il peut être montré que l'évolution du modèle ne dépend pas de la forme de ϕ et que seul compte le fait que \mathcal{S} soit son niveau zéro. Il existe donc plusieurs méthodes pour étendre F de \mathcal{S} à toute l'image. Certaines présentent des propriétés intéressantes comme par exemple celle proposée dans [1] (voir le paragraphe 2.3.2).

Pour trouver la position d'équilibre du modèle déformable, l'équation (1.30) est discrétisée en temps et en espace. L'estimation des dérivées spatiales de ϕ par différences centrées conduit dans certains cas à des erreurs numériques. Des discrétisations mieux adaptées au problème [46] doivent être utilisées pour garantir la stabilité de la méthode d'intégration.

Une forme initiale \mathcal{S}_0 du modèle étant donnée (choisie par l'utilisateur, obtenue par un calcul préalable...), il est nécessaire de calculer une application $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, 0)$ qui s'annule pour $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_0$. La plupart des auteurs la définissent comme une carte de distance au modèle initial \mathcal{S}_0 . L'équation (1.30) ne garantit pas que ϕ reste une carte de distances à \mathcal{S} à mesure que le modèle évolue. Des discontinuités peuvent apparaître, c'est pourquoi il est nécessaire de recalculer périodiquement ϕ à partir de la position courante de son ensemble de niveau zéro.

Lois de propagation

Le premier modèle déformable géométrique, proposée par Caselles *et al.* [8] et Malladi *et al.* [39] suivait la loi de propagation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_t = c(\mathbf{x}) (v + \kappa|_{\mathbf{x}(t)}) \mathbf{n}|_{\mathbf{x}(t)}, \quad (1.31)$$

ou, dans la version implicite obtenue à partir de (1.30) :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}, t} = c(\mathbf{x}) (v + \kappa|_{\mathbf{x}, t}) \|\nabla \phi|_{\mathbf{x}, t}\|. \quad (1.32)$$

Dans ces deux équations, la constante v est un terme qui provoque l'inflation du modèle vers les objets d'intérêt. La prise en compte de la courbure κ dans l'équation d'évolution a un effet régularisant sur le modèle et évite ainsi l'apparition de singularités sur la courbe

ou la surface. L'application $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est choisie pour ralentir la progression du modèle déformable lorsqu'il se déplace au dessus d'une structure de l'image. Dans le cadre d'une approche contour, un choix classique [8, 39] est donné par :

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \left\| \nabla (g_\sigma * I)_{|\mathbf{x}} \right\|^p}, \quad (1.33)$$

avec $p = 1$ ou $p = 2$ suivant les auteurs.

Cette première formulation n'est pas entièrement satisfaisante pour deux raisons. D'une part, lorsque l'image est fortement dégradée, les frontières des objets ne sont pas toujours caractérisées par des valeurs importantes de la norme du gradient. Par conséquent, le modèle passe au travers de ces trous sans ralentir et la segmentation échoue. D'autre part, la fonction c ne s'annule que sur des contours idéaux. Dans le cas d'une image réelle, la courbe ou la surface déformable ne s'arrête jamais, et il est donc difficile de définir un critère pour stopper l'évolution du modèle. De plus si toutes les parties du modèle déformable n'atteignent pas les contours de l'image simultanément, le modèle peut passer au travers de certains contours avant que d'autres ne soit atteints.

Caselles *et al.* [9] et Yezzi *et al.* [71] ajoutent un terme de rappel qui impose au modèle de stopper sa progression et éventuellement de revenir en arrière lorsqu'il a traversé un contour.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_t = c(\mathbf{x}(t)) (v + \kappa_{|\mathbf{x}(t)}) \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)} + (\nabla c_{|\mathbf{x}(t)} \cdot \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)}) \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)}. \quad (1.34)$$

L'équation qui régit l'évolution de la fonction implicite s'écrit alors avec le terme additionnel $\nabla c_{|\mathbf{x}} \cdot \nabla \phi_{|\mathbf{x},t}$:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x},t} = c(\mathbf{x}) (v + \kappa_{|\mathbf{x},t}) \left\| \nabla \phi_{|\mathbf{x},t} \right\| + \nabla c_{|\mathbf{x}} \cdot \nabla \phi_{|\mathbf{x},t}. \quad (1.35)$$

Il est intéressant de noter que ce modèle peut être relié à la formulation classique par minimisation d'énergie. En effet, en deux dimensions, en notant f l'application telle que $c(\mathbf{x}) = f(\|\nabla I_{|\mathbf{x}}\|)$, on remarque qu'une fois la convergence atteinte, la courbe déformable minimise la fonctionnelle (voir [9, 71]) :

$$E(\mathbf{S}) = \alpha \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \Big|_u \right\|^2 du + \lambda \int_0^1 f(\|\nabla I_{|\mathbf{S}(u)}\|)^2 du, \quad (1.36)$$

où \mathbf{S} est un paramétrage de \mathcal{S} et α et λ deux constantes choisies de sorte que les deux termes de la somme soient égaux.

Une autre interprétation peut également être donnée à ce modèle en remarquant que minimiser (1.36) équivaut à minimiser la quantité L_R définie par :

$$\begin{aligned} L_R(\mathbf{S}) &= \int_0^1 f(\|\nabla I_{|\mathbf{S}(u)}\|) \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right\| du \\ &= \int_0^{L_E(\mathbf{S})} f(\|\nabla I_{|\mathbf{S}(s)}\|) ds, \end{aligned} \quad (1.37)$$

où $L_E(\mathbf{S})$ désigne la longueur euclidienne de \mathbf{S} supposée paramétrée par son abscisse curviligne s (euclidienne elle aussi). Cohen et Kimmel [15] proposent un modèle très similaire adapté du modèle de Kass et Terzopoulos [30] :

- L'énergie image classique est remplacée par un terme plus général \tilde{P} .
- Le terme de rigidité $\beta(u) \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} \right\|$ est omis, essentiellement parce que le terme du premier ordre suffit à régulariser la courbe déformable.
- L'influence du paramétrage du modèle est supprimée en utilisant l'abscisse curviligne (euclidienne) s pour définir l'énergie.

L'énergie du modèle déformable s'écrit donc :

$$\begin{aligned} L_R(\mathbf{S}) &= \int_0^{L_E(\mathbf{S})} \left(\underbrace{\alpha \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \right\|_s^2}_{=\alpha} + \tilde{P}(\mathbf{S}(s)) \right) ds \\ &= \int_0^{L_E(\mathbf{S})} P(\mathbf{S}(s)) ds, \end{aligned} \quad (1.38)$$

en posant $P(\mathbf{x}) = \alpha + \tilde{P}(\mathbf{x})$. On retrouve donc une forme similaire à (1.37). Dans les deux cas, la fonctionnelle L_R s'interprète comme la longueur de la courbe \mathbf{S} mesurée dans un espace où la métrique euclidienne est remplacé par une métrique riemannienne qui prend en compte l'information apportée par l'image : a une position donnée, les distances sont d'autant plus contractées que les contours sous-jacents sont forts. De cette manière les courbes les plus courtes sont celles qui longent les contours de l'image. Une interprétation similaire est proposée par Yezzi *et al.* [71] en trois dimensions où le modèle est vu comme une surface minimale pour une métrique définie à partir des structures de l'image.

Cette formulation est exploitée par Cohen et Kimmel [15] et Deschamps et Cohen [24] pour déterminer les contours des objets à partir de deux points \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 spécifiés par l'utilisateur. Le chemin minimal n'est toutefois pas déterminé en utilisant des modèles déformables : l'algorithme du *fast marching* [50] est utilisé pour construire une carte de distance riemannienne à partir de \mathbf{p}_0 jusqu'à ce que \mathbf{p}_1 soit atteint. Le chemin minimal entre \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_1 est obtenu en suivant le gradient de la carte des distances depuis \mathbf{p}_1 et jusque \mathbf{p}_0 .

Si les formulations de Caselles, Kimmel et Sapiro [9] ou Yezzi *et al.* [71] empêchent la courbe ou la surface déformable de traverser les contours bien détectés, elles n'évitent pas les fuites du modèle au travers des discontinuités des contours de l'image. Pour pallier ce problème, Xu *et al.* [69, 70] proposent un modèle géométrique plus général, capable en particulier de prendre en compte des forces de rigidité et des forces non conservatives. Le mouvement d'un point du modèle est décrit par l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_t = (\mathbf{F}_{\text{élastique}} \cdot \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)} + \mathbf{F}_{\text{rigide}} \cdot \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)} + \mathbf{F}_{\text{pres}} \cdot \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)}) \mathbf{n}_{|\mathbf{x}(t)}, \quad (1.39)$$

où $\mathbf{F}_{\text{élastique}}$, $\mathbf{F}_{\text{rigide}}$ désignent respectivement les forces d'élasticité, de rigidité proposées par Kass et Terzopoulos [30], calculées avec un paramétrage du modèle par l'abscisse curviligne. La force \mathbf{F}_{ext} est déterminée pour chaque point de l'espace image, indépendamment de la forme du modèle, et \mathbf{F}_{pres} déforme le modèle dans la direction de sa normale avec une intensité w_{pres} qui dépend de la position du modèle dans l'image. Les auteurs montrent qu'avec une représentation par ensembles de niveau, cette loi d'évolution s'écrit sous la forme :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x},t} = \left(\alpha(\mathbf{x})\kappa_{|\mathbf{x},t} + \beta(\mathbf{x})\kappa_{|\mathbf{x},t}^3 - \rho(\mathbf{x}) \right) \|\nabla \phi_{|\mathbf{x},t}\| + w_{\text{pres}}(\mathbf{x}) \|\nabla \phi_{|\mathbf{x},t}\| - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi_{|\mathbf{x},t}, \quad (1.40)$$

où ρ désigne une extension de la quantité $\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\beta(\mathbf{x}(s))\kappa(\mathbf{x}(s)))_{|\mathbf{x}(s)}$ à tout l'espace image. Cette quantité n'est en effet définie *a priori* que sur le contour de niveau zéro de ϕ , paramétré localement par son abscisse curviligne s .

En choisissant correctement les coefficients α et β on retrouve les modèles décrits précédemment. Il devient par contre possible d'exploiter pratiquement tous les types de forces additionnelles proposés pour améliorer les modèles déformables explicites [13, 67, 72]. L'utilisation de ce type de modèles reste cependant limitée par la complexité calculatoire inhérente aux approches par ensembles de niveau. Différentes méthodes permettent de réduire cette complexité. Elles sont décrites au paragraphe 2.3.2.

1.4 Conclusion

L'étude de tous ces modèles démontre qu'un compromis doit en général être trouvé entre la généricité du modèle et sa complexité. En particulier, les modèles entièrement génériques souffrent d'une complexité importante qui croît rapidement avec la résolution de l'image à traiter. Depuis leur introduction dans le domaine de l'imagerie, les modèles déformables ont fait l'objet de très nombreux travaux qui ont permis d'accroître leur domaine d'application, de les rendre plus robustes et plus efficaces. Certaines approches permettent d'abaisser les temps de calculs nécessaires à la convergence du modèle. Elles sont décrites en détail au chapitre 2.

Chapitre 2

Réduction de la complexité des modèles

2.1 Introduction - Motivations

Les outils d'acquisitions d'images numériques sont en continuelle évolution et fournissent des images de résolution toujours croissante. Parallèlement le besoin d'outils performants d'analyse automatique se fait de plus en plus pressant. Par ailleurs, la segmentation et la reconstruction ne sont souvent qu'une étape d'une chaîne de traitement plus grande. Le résultat de la segmentation est donc en général traité par différents algorithmes, éventuellement coûteux dans des buts de visualisation, mise en correspondance, indexation par exemple. Ces traitements sont d'autant plus rapides que la représentation des objets fournie par l'étape de segmentation est concise. Il est donc de première importance que la complexité des algorithmes destinés à analyser ces images reste aussi faible que possible, à la fois en temps, et en espace.

A chaque itération, l'ensemble des paramètres utilisés pour décrire la forme du modèle est mis à jour pour déplacer la courbe ou la surface vers sa position optimale. La complexité du procédé de segmentation/reconstruction est donc directement liée (i) à la taille de l'espace des paramètres utilisés pour décrire le modèle et (ii) au nombre d'itérations requis pour atteindre la position d'équilibre. Pour réduire la complexité des algorithmes, on peut donc agir sur ces deux composantes.

Pour réduire le nombre de paramètres d'un modèle déformable, deux approches ont été proposées :

- Formuler le problème de minimisation d'énergie dans un espace de formes restreint et dont les éléments sont décrits avec un nombre réduit de paramètres (Sect. 2.2).
- Discrétiser les courbes et surfaces avec une stratégie qui optimise le nombre d'échantillons tout en maintenant la qualité de représentation des objets (Sect. 2.3).

Pour réduire le nombre d'itérations avant convergence, il est également possible de modifier la dynamique des modèles. Trois classes de méthodes ont été proposées :

- Au lieu de travailler directement à la résolution la plus fine, il est possible d'effectuer

successivement des segmentations/reconstructions à des précisions croissantes. Le résultat obtenu à une résolution est alors raffiné puis utilisé comme initialisation pour la segmentation à la résolution suivante (Sect. 2.4.1).

- Des termes d'énergie (ou des forces) additionnels peuvent être introduites dans les équations d'évolution du modèle. Ces termes supplémentaires sont conçus pour guider le modèle plus efficacement vers sa position d'équilibre (Sect. 2.4.2).
- Enfin, dans nombre de cas, la recherche de la forme optimale est ramenée à un problème numérique particulièrement bien connu. Des méthodes de résolution très efficaces peuvent alors être utilisées pour calculer à moindre coût la position idéale du contour déformable (Sect. 2.4.3).

Chacune de ces approches est décrite plus en détails dans les paragraphes qui suivent. Avant cela, notons que si chacune d'elles améliore séparément la complexité des procédés de segmentation/reconstruction, elles sont souvent compatibles entre elles et sont même utilisées de manière conjointe par la plupart des auteurs.

2.2 Changement de l'espace des paramètres

Comme indiqué plus haut, une première approche consiste à restreindre l'espace des formes admissibles pour le modèle à un ensemble de formes qui peuvent être décrites avec un faible nombre de paramètres. Cette approche exploite nécessairement des hypothèses *a priori* sur la forme des objets d'intérêt. Naturellement, plus ces hypothèses sont fortes, plus l'espace de recherche, et donc la complexité de l'algorithme de segmentation peuvent être réduits. La contrepartie réside dans la spécificité du modèle obtenu, dont les conditions d'application sont d'autant plus restreintes que les connaissances exploitées sont nombreuses et précises.

En outre, la prise en compte de l'information apportée par l'image se ramène en général à une intégration numérique le long du contour déformable. Par conséquent, même si le nombre de paramètres à mettre à jour à chaque itération est réduit, la complexité du modèle reste largement dépendante de la résolution des images.

2.2.1 Patrons déformables

Dans certains cas, les objets d'intérêt sont particulièrement bien connus et peuvent être raisonnablement bien décrits par des primitives géométriques extrêmement simples. Le nombre de paramètres est alors réduit à l'extrême et on parle de patrons déformables (*deformable templates*).

Par exemple Yuille *et al.* [73] proposent des modèles pour représenter les structures d'un visage : un œil est représenté par deux arcs de paraboles et un disque, une bouche par quatre ou cinq arcs de paraboles suivant qu'elle est ouverte ou fermée (voir Fig. 2.1).

A chaque partie du modèle est associée une énergie particulière qui la caractérise. Par exemple, le disque qui représente l'iris et la pupille possède une énergie écrite sous la forme

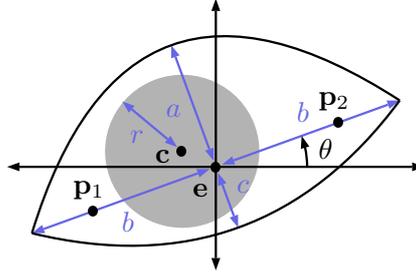


FIG. 2.1 – Exemple de patron déformable (voir [73]). Un œil est représenté par deux arcs de paraboles et un cercle. Les paramètres utilisés pour la représentation sont donc (x_e, y_e) pour la position du centre de l'œil, θ pour l'inclinaison de l'œil par rapport à l'horizontale, (x_c, y_c) pour le centre de l'iris, r pour le rayon de l'iris, a , b et c pour les dimensions des deux paraboles. Les auteurs utilisent également deux paramètres supplémentaires pour représenter deux points \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 qui doivent se trouver dans le blanc de l'œil.

de trois termes :

$$E(C) = E_{\text{région}}(C) + E_{\text{contour}}(C) + E_{\text{interne}}(C). \quad (2.1)$$

Le terme $E_{\text{région}}$ est d'autant plus faible que le niveau de gris moyen à l'intérieur du disque est sombre. Le terme E_{contour} est d'autant plus faible que l'intensité moyenne des contours de l'image sur le bord du disque est forte. Enfin, E_{interne} est d'autant plus faible que le centre du disque est proche du centre de l'œil entier modélisé à l'aide de paraboles.

Le processus de reconstruction est lui aussi découpé en phases au cours desquelles la position de chaque partie du modèle est déformée est déplacé indépendamment, en tenant compte seulement de certaines énergies. Dans le cas de l'œil par exemple, la position relative du disque et des paraboles est figée dans un premier temps et seule l'énergie de région associée au disque est optimisée. Cela permet de positionner l'iris au bon endroit dans l'image. Dans un second temps, les énergies de contours sont prises en compte, ce qui permet de placer les paraboles au bon endroit. Les auteurs présentent ainsi une séquence d'optimisation qui permet d'aboutir à la reconstruction attendue. Bien entendu, à la fois le modèle et les étapes de son évolution ne sont exploitables que pour l'analyse de visage. Leur utilisation pour d'autres tâches est exclue.

Diverses améliorations ont été proposées pour étendre l'expressivité de ces modèles. Souvent elles définissent des transformations simples, décrites avec peu de paramètres et qui sont appliquées à un patron déformable existant.

Terzopoulos et Metaxas [60], par exemple, proposent un modèle plus générique. Les frontières des objets d'intérêts sont représentées sous la forme :

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{c} + R \times (\mathbf{e}(u, v) + \mathbf{d}(u, v)), \quad (2.2)$$

où \mathbf{c} et R désignent une translation et une rotation appliquées au modèle tout entier, \mathbf{e} est une forme de base et \mathbf{d} un champ de déplacements superposé au modèle. La forme de base

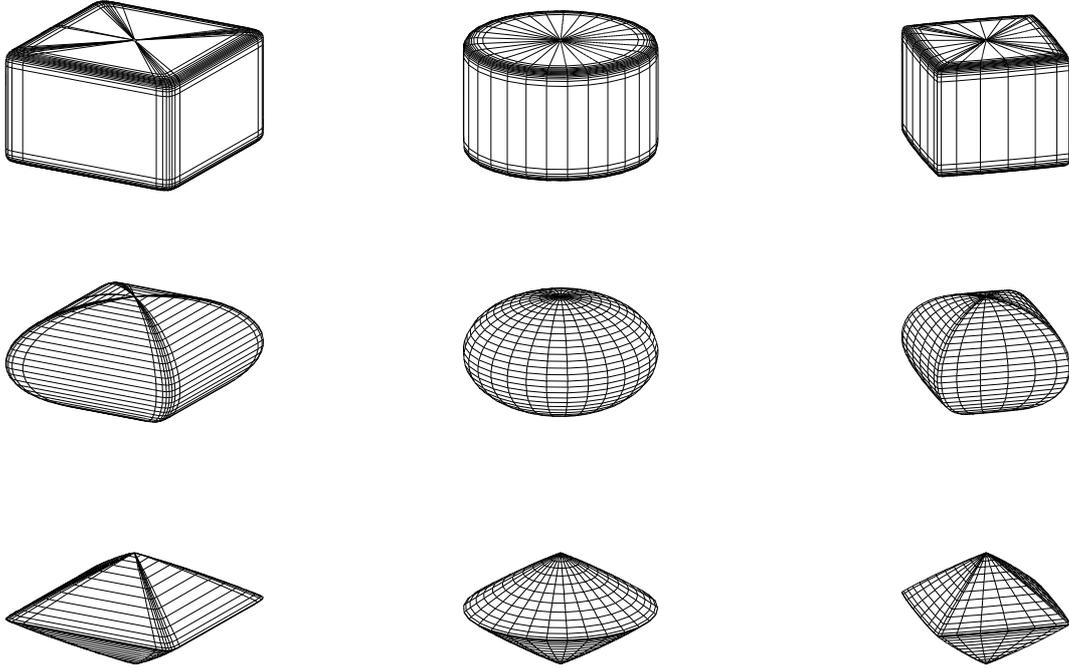


FIG. 2.2 – Variété des formes obtenues avec un super-ellipsoïde avec des coefficients ϵ_1 de 0.1, 1.0 et 1.9 (ligne par ligne) et des coefficients ϵ_2 de 0.1, 1.0 et 1.9 (colonne par colonne). Lorsque les coefficients s'écartent de 1.0 on remarque que l'échantillonnage régulier des paramètres u et v dans (2.3) induit un échantillonnage irrégulier de la forme.

choisie est en l'occurrence un super-ellipsoïde muni de sa paramétrisation classique :

$$\mathbf{e}(u, v) = \begin{pmatrix} a_x \times c_u^{\epsilon_1} \times c_v^{\epsilon_2} \\ a_y \times c_u^{\epsilon_1} \times s_v^{\epsilon_2} \\ a_z \times s_u^{\epsilon_1} \end{pmatrix} \text{ pour } (u, v) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi; \pi[, \quad (2.3)$$

où c_α^ϵ et s_α^ϵ désignent respectivement les quantités $\text{sign}(\cos \alpha) \times |\cos \alpha|^\epsilon$ et $\text{sign}(\sin \alpha) \times |\sin \alpha|^\epsilon$. La forme de base est donc décrite avec seulement onze paramètres : trois paramètres pour la translation, trois paramètres pour la rotation, les trois paramètres a_x , a_y et a_z , et enfin les deux paramètres ϵ_1 et ϵ_2 . Toutefois l'espace des formes possibles reste relativement étendu (voir la figure 2.2).

Le champ \mathbf{d} des déplacements est défini comme un élément d'un espace vectoriel engendré par une base de fonctions de $[-\pi/2; \pi/2] \times [-\pi; \pi[$ à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Le nombre d'éléments de la base détermine en même temps la finesse des détails représentables, et la complexité du modèle. Toutefois, lorsque la taille de la base devient plus conséquente, il est difficile de parler de patrons déformables (voir le paragraphe 2.2.2).

Bardinet *et al.* [6] proposent une approche similaire dans laquelle une super-quadrique est adaptée aux données par l'intermédiaire d'une *déformation libre*. La forme de base est plongée dans une grille de faible résolution, et dont les nœuds sont progressivement déplacés. La forme de base est alors transformée de manière à suivre les mouvements de la grille. Là encore la résolution de la grille détermine la complexité de l'algorithme de reconstruction (les auteurs utilisent des grilles de taille 4^3 ou 5^3).

Si les patrons déformables permettent une réduction considérable de la complexité, la variété des formes qu'ils peuvent représenter reste particulièrement limitée. Ces modèles sont donc bien adaptés à l'extraction d'objets (i) connus avec précision, (ii) faciles à modéliser, et (iii) dont les formes exhibent une variabilité particulièrement restreinte.

Si l'une de ces trois conditions n'est pas satisfaite, ces approches se révèlent inopérantes, soit parce que la formulation mathématique du problème devient trop compliquée (conditions (i) et (ii)), soit parce que l'ensemble des formes possibles pour le modèle est trop restreint pour pouvoir représenter précisément les objets (condition (iii)).

Par ailleurs, même si le nombre de paramètres du modèle déformable est réduit, le calcul de l'énergie d'interaction entre le modèle et l'image ne peut être effectué que par intégration le long de la frontière déformable. Pour prendre en compte toute l'information disponible, la pas de cette intégration doit être du même ordre de grandeur que la taille d'un pixel ou d'un voxel. La complexité du processus de segmentation et de reconstruction s'en trouve fortement pénalisée.

2.2.2 Décomposition sur une base de fonctions

Dans les cas où les techniques décrites au paragraphe précédent se révèlent inexploitable, des modèles plus expressifs doivent être utilisés. L'objectif est d'étendre l'espace de formes, tout en conservant une représentation aussi concise que possible. Pour y parvenir, plusieurs algorithmes recherchent la meilleure forme possible dans un espace vectoriel de faible dimension et muni d'une base connue. Les frontières des objets d'intérêt sont codées par leurs composantes dans cette base, composantes qui sont mises à jour itérativement pour déformer la courbe ou la surface jusqu'à sa position d'équilibre. Les modèles proposés diffèrent par les choix des bases : elles peuvent être adaptées à un problème particulier ou bien choisies arbitrairement pour obtenir, par exemple, une description multirésolution des formes.

Analyse en composantes principales

Cootes *et al.* [16] utilisent un ensemble d'apprentissage pour déterminer la forme moyenne des objets d'intérêt ainsi que leur principaux modes de variation. Ces informations sont utilisées pour construire l'espace vectoriel dans lequel la forme optimale sera recherchée par la suite.

Dans toutes les images de l'ensemble d'apprentissage, les formes sont représentées par un même nombre de sommets. Ces sommets sont numérotés de sorte qu'un même indice corresponde à la même structure dans tous les objets de l'échantillon. Un recalage rigide

(translation, rotation et mise à l'échelle) permet d'exprimer les positions des sommets dans un système de coordonnées commun. L'échantillon d'apprentissage peut donc être vu comme un nuage de points dans un espace à kn dimension, où k désigne le nombre des sommets utilisés pour décrire chaque forme et n la dimension de l'espace image. L'analyse en composantes principales de ce nuage de points permet de déterminer une forme moyenne. Elle permet également de trouver une base de déformations grâce à laquelle toutes les formes de l'ensemble d'apprentissage peuvent être atteintes à partir de la forme moyenne. L'ensemble des formes à explorer est alors défini en ne conservant que les combinaisons linéaires des déformations les plus significatives.

Conformément au paradigme des modèles déformables, la position idéale du modèle est atteinte itérativement. A chaque étape, et en fonction de l'information fournie par l'image, un déplacement est proposé pour chaque sommet du modèle. L'ensemble de ces déplacements définit une transformation globale qui est décomposée en une composante rigide et un résidu. La partie rigide est directement appliquée à la forme courante. Le résidu est d'abord projeté sur le sous-espace de recherche avant d'être utilisé pour mettre à jour le modèle.

Avec ce type d'approche, aucune description mathématique des objets d'intérêt n'est nécessaire. En comparaison avec les patrons déformables, le spectre des applications possibles est donc considérablement élargi. Toutefois, pour une application donnée, les formes recherchées doivent satisfaire un certain nombre de contraintes. Premièrement, il doit être possible de décrire correctement tous les objets à reconstruire avec un même nombre de sommets. En second lieu, lors de la constitution de l'ensemble d'apprentissage, il est nécessaire d'attribuer les mêmes numéros à des sommets en position analogues dans deux formes distinctes. Cela sous-entend que les objets doivent posséder des points caractéristiques qui peuvent être numérotés (*i.e.* détectés et identifiés) de manière reproductible d'une image à l'autre. Troisièmement, cette approche suppose implicitement que l'espace des formes de l'échantillon peut s'apparenter à un espace vectoriel (*i.e.* que le problème est linéaire). Dans le cas contraire, c'est-à-dire si les composantes du modèle sur la base de l'espace de recherche ne sont pas indépendantes (au sens statistique), l'algorithme peut générer des formes impossibles en réalité. Détecter et prendre en compte ces situations impose le recours à des méthodes plus complexes. Pour terminer, la génération de l'ensemble d'apprentissage peut être particulièrement fastidieuse si elle est réalisée manuellement, et bien qu'une procédure automatique soit envisageable, elle semble difficile à mettre en place.

Décomposition fréquentielle

Dans une autre approche, l'espace dans lequel la forme optimale est recherchée est choisi une fois pour toute, indépendamment des objets d'intérêt. Les modèles correspondants exploitent une représentation paramétrique (voir Sect. 1.2.1) dans laquelle chacune des applications coordonnées (s_0, \dots, s_{n-1}) est décomposée sur une base (ϕ_0, ϕ_1, \dots) :

$$s_k(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{k,l} \phi_l(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

La base peut être choisie en vue d'obtenir une représentation multirésolution des objets : alors que ses premiers éléments permettent une description grossière des formes, chaque nouvel indice apporte un niveau de détail supplémentaire.

Staib et Duncan [52, 53] représentent leur modèle dans une base de Fourier. Dans le cas bidimensionnel par exemple, les vecteurs de la base sont donc définis par¹ :

$$\begin{cases} \phi_{2l}(u) & = \frac{\cos lu}{\pi} \\ \phi_{2l+1}(u) & = \frac{\sin lu}{\pi} \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour représenter les objets, seuls les premiers termes de la série sont conservés. Un modèle similaire est proposé par Székely *et al.* [55] pour l'analyse d'images tridimensionnelles. Cette fois la base de fonctions n'est plus une base de Fourier, mais une base d'harmoniques sphériques. Toujours pour l'analyse d'images tridimensionnelles, Vemuri et Radisavljevic [64] étendent le modèle proposé par Terzopoulos et Metaxas [60]. Le champ des déformations superposées au super-ellipsoïde est décomposé sur une base d'ondelettes.

Dans tous ces cas, le nombre d'harmoniques utilisées pour le codage des formes détermine à la fois le niveau de détail global du modèle et la complexité du processus de segmentation/reconstruction. Le nombre de composantes utilisées dans la base de fonctions résulte donc d'un compromis entre précision et efficacité. Pour effectuer ce choix, Staib et Duncan proposent une approche empirique : chaque échantillon d'un ensemble d'apprentissage est segmenté plusieurs fois en augmentant itérativement le nombre d'harmoniques jusqu'à atteindre la précision souhaitée. Le nombre maximal d'harmoniques nécessaires sur l'échantillon est ensuite utilisé pour l'analyse de nouvelles images. Au passage, notons que la précision du modèle déformable est définie de manière globale pour toute la forme : toutes les parties des composantes de l'image sont reconstruites avec la même précision indépendamment de l'intérêt qu'elles présentent.

Outre leur aspect multirésolution, une autre propriété intéressante de ces modèles est leur capacité à prendre en compte des connaissances *a priori*. Lorsqu'un ensemble de formes représentatif d'une classe d'objets est disponible, il est facile de déterminer les composantes de chaque forme de l'échantillon dans la base de fonctions. L'analyse de ces données permet d'attribuer une probabilité d'apparition à chaque jeu paramètres possible. Associées à un modèle Bayésien et à une approche du type maximum *a posteriori*, ces connaissances sont incorporées à la dynamique du modèle dont la robustesse se trouve accrue. Cependant, comme pour le modèle de Cootes *et al.* [16], la constitution de l'ensemble d'apprentissage peut se révéler fastidieuse ou difficile.

Avec ce type de méthodes, la variété des objets qui peuvent être reconstruits est certes accrue en comparaison avec les modèles décrits précédemment, mais il demeure impossible de représenter certaines formes. En deux dimensions, seules les topologies du cercle ou de la droite sont accessibles. En trois dimensions, les modèles sont limités celle de la sphère, du tore ou du plan.

¹Le facteur $1/\pi$ peut sembler surprenant. Il est toutefois présent dans la publication de Staib et Duncan qui le rattachent aux fonctions de la base plutôt que de le faire apparaître dans les coefficients de Fourier comme c'est habituellement le cas.

En plus de ces limitations et des inconvénients liés à la représentation paramétrique des surfaces (voir le paragraphe 1.2.1), ces approches soulèvent un problème de régularisation des formes. Pour Staib et Duncan la suppression des harmoniques de fréquences élevées conduit naturellement à des formes plus lisses et peut donc être interprétée comme une régularisation du problème. Aussi, la fonctionnelle qu'ils optimisent ne tient compte que de l'adéquation entre le modèle et l'image. En dépit de ces remarques, Székely *et al.* [55] et Vemuri *et al.*[64] jugent nécessaire d'introduire des termes d'énergie interne qui pénalisent la courbure de leurs modèles respectifs.

Enfin, indexer la base de fonctions en fonction de leur fréquences permet un codage concis et multirésolution des formes. Cependant seules des descriptions globales sont possibles : la modification d'un seul paramètre modifie l'intégralité modèle. Inversement, une modification locale du contour actif requiert *a priori* la mise à jour de toutes les paramètres qui décrivent sa forme. L'initialisation manuelle des objets et l'interaction avec un utilisateur sont donc difficiles.

Eléments finis - splines

D'autres approches privilégient un contrôle local des formes. Dans ce cas, les fonctions de base ont un support fini et sont le plus souvent polynomiales par morceaux. Les composantes des formes sur ces bases ont donc une interprétation géométrique immédiate : suivant les cas, elles peuvent par exemple correspondre à des points de passage et des tangentes imposés au modèle, ou encore aux sommets d'un polygone de contrôle dont le modèle est une approximation. En comparaison avec les descriptions fréquentielles, les paramètres de forme ont donc une interprétation plus intuitive pour l'utilisateur.

En deux dimensions, Gavrilin [26] définit une base à l'aide de polynômes d'Hermite cubiques. Les paramètres de forme sont des points par lesquels le modèle est contraint de passer et les demi-tangentes au modèle en ces points. Il est donc possible de représenter des courbes régulières et des points d'inflexion. Toutefois, la minimisation de la fonctionnelle d'énergie est effectuée par programmation dynamique, ce qui induit des complexités importantes. D'autres auteurs exploitent différentes familles de splines, le plus souvent cubiques de manière à garantir une continuité C^2 des formes. Leurs modèles sont alors spécifiés par un polygone de contrôle. Suivant les auteurs la minimisation d'énergie est réalisée par programmation dynamique ou par des méthodes numériques de type descente de gradient. Ces approches ont fait l'objet de plusieurs améliorations dont l'objectif principal est d'étendre à peu de frais l'espace des formes représentables : Meegama et Rajapakse [42] utilisent des NURBS pour accroître l'expressivité de leur modèle tout en conservant un codage des formes relativement compact. Ils proposent en outre une méthode pour adapter dynamiquement le nombre de points contrôle en fonction de la géométrie de leur modèle. La variété des formes représentables est encore étendue par Leitner et Cinquin [38] ou Precioso et Barlaud [48] qui exploitent les propriétés des B-splines pour rendre possible la reconstruction d'objets de topologie complexe.

Dans une approche légèrement différente, Cohen et Cohen [14] utilisent une base d'éléments finis. Ce choix est surtout motivé par la stabilité numérique accrue et la réduction de

complexité qui l'accompagnent (en comparaison avec les approches classiques par différences finies [30, 13]). La complexité de la méthode de segmentation est directement déterminée par le nombre de points de contrôle utilisés pour coder la forme du modèle. Avec l'approche par éléments finis, de grandes parties de la frontière des objets peuvent être décrites avec très peu de sommets. Cela compense largement les coûts supplémentaires induits par cette approche et aboutit à une diminution significative des temps de calcul. Ainsi, dans le contexte de la segmentation d'images tridimensionnelles, les auteurs démontrent que l'approche par éléments finis est approximativement trois fois moins coûteuse que l'approche par différences finies.

Globalement, l'espace des formes représentables à l'aide de ces modèles est encore élargi par rapport à ce que permettent les modèles décrits aux paragraphes précédents. Malgré cela, quoique plus volumineux, le codage des formes reste relativement concis et les coûts des segmentations et des reconstructions restent modérés. Naturellement, ces modèles ne sont toutefois pas exempts d'inconvénients. Comme cela est signalé par Delingette [19] ceux-ci sont principalement liés à la représentation paramétrique de la frontière des objets.

D'une part, la reconstruction d'objets de topologies arbitraires, bien que possible, reste difficile. Ces topologies sont généralement obtenues par recollement de plusieurs morceaux de surfaces dont chacun est défini paramétriquement. La difficulté réside dans le maintien d'un bon niveau de continuité à la jonction entre les différentes parties qui composent le modèle complet. Ces recollements induisent de plus l'ajout de nombreux points de contrôles qui pénalise la complexité des modèles.

D'autre part, l'énergie interne qui privilégie les formes régulières fait en général intervenir la paramétrisation du modèle dans sa définition. La recherche de la forme optimale se ramène dans ce cas à un problème linéaire dont la résolution numérique reste relativement aisée. La contrepartie naturelle est une forte dépendance du résultat par rapport à la paramétrisation choisie. Ce problème peut être surmonté en prenant soin de n'exploiter que des caractéristiques géométriques intrinsèques. Cependant, le problème de minimisation n'est alors plus linéaire, ce qui complique considérablement la recherche de la forme optimale.

Enfin, comme dans le cas des modèles paramétriques basés sur une décomposition fréquentielle, la prise en compte de l'information apportée par l'image requiert une intégration numérique le long du contour. Bien que cette approche accroisse la stabilité numérique des algorithmes d'optimisation, elle implique des coûts calculatoires importants.

2.3 Optimisation de la discrétisation

Dans une autre approche, plutôt que d'utiliser une représentation paramétrique de la frontière des objets, il est possible de conserver un codage entièrement explicite des formes. Les courbes et surfaces sont donc échantillonnées pour former des lignes ou des mailles polygonales. Là encore, la complexité des modèles est directement liée aux nombres d'échantillons utilisés. Les coûts des algorithmes de segmentation et reconstruction peuvent donc être réduits en diminuant le nombre de sommets sur la maille.

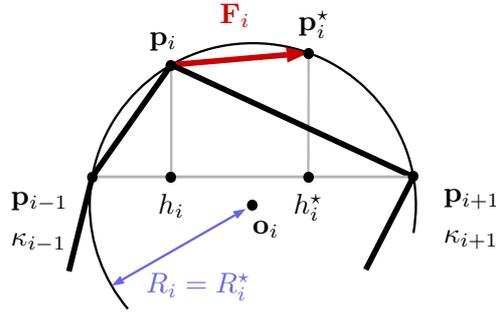


FIG. 2.3 – Position optimale \mathbf{p}_i^* du sommet \mathbf{p}_i , définie en fonction des courbures κ_{i-1} et κ_{i+1} aux sommets \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} . La composante tangentielle de \mathbf{F}_i est définie de sorte que \mathbf{p}_i dérive vers les zones les plus courbées du modèle. La composante normale de \mathbf{F}_i est calculée de sorte que \mathbf{p}_i^* soit situé sur le cercle circonscrit à \mathbf{p}_{i-1} , \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} . De cette manière la courbure en \mathbf{p}_i est laissée inchangée.

Bien entendu, un échantillonnage trop grossier des courbes et surfaces peut dégrader significativement la description des formes, en particulier dans les zones fortement courbées. À l'inverse, un échantillonnage trop fin constitue un gaspillage de ressources et risque dans certains cas d'accroître la sensibilité du modèle au bruit. L'élimination de sommets doit donc être menée en tenant le plus grand compte de la géométrie des objets.

2.3.1 Utilisation de la dynamique

Dans le contexte des modèles explicites, Delingette [18, 20, 22, 44] propose une méthode pour optimiser le nombre de sommets tout en préservant une représentation précise des objets. Son modèle est représenté par une maille simplexe (voir le paragraphe 1.2.2) qui évolue sous l'action d'un ensemble de forces.

Pour adapter l'échantillonnage de la frontière, il soumet chaque sommet \mathbf{p}_i à une force qui l'entraîne vers sa position idéale \mathbf{p}_i^* . Cette position idéale est définie à partir des positions des voisins de \mathbf{p}_i et de paramètres géométriques comme l'angle simplexe la courbure et les coefficients barycentriques du projeté orthogonal de \mathbf{p}_i sur l'hyperplan qui contient ses voisins.

Dans le cas d'un modèle à deux dimensions par exemple et avec les notations de la figure 1.2, la position idéale \mathbf{p}_i^* du sommet \mathbf{p}_i est définie par les paramètres :

$$\begin{cases} \epsilon_i^* &= \frac{1}{2} - 0.4 \times \frac{K_i^{i+1} - K_{i-1}^i}{K_i^{i+1} + K_{i-1}^i} , \\ \phi_i^* &= \phi_i \end{cases} \quad (2.6)$$

où K_i^{i+1} désigne la "courbure" de l'arête $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ définie comme la moyenne des courbures des sommets à ses extrémités :

$$K_i^{i+1} = \frac{1}{2} (|\kappa_i| + |\kappa_{i+1}|) . \quad (2.7)$$

Le coefficient 0.4 est choisi arbitrairement par Delingette et Montagnat [22]. Il impose à la projection \mathbf{h}_i de \mathbf{p}_i sur $\mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$ de rester entre $\mathbf{p}_{i-1} + 0.1 \times \mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$ et $\mathbf{p}_{i-1} + 0.9 \times \mathbf{p}_{i-1}\mathbf{p}_{i+1}$.

Ainsi définie, la position idéale \mathbf{p}_i^* est située sur le cercle circonscrit à \mathbf{p}_{i-1} , \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_{i+1} et s'éloigne d'autant plus de la position centrale (qui correspond à $\epsilon = \frac{1}{2}$) que la disparité de courbure entre \mathbf{p}_{i-1} et \mathbf{p}_{i+1} est importante. La force qui attire le sommet \mathbf{p}_i vers \mathbf{p}_i^* est alors définie comme la force ressort $\mathbf{F}_i = \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^*$. Des définitions similaires sont proposées en trois dimensions et permettent d'attirer les sommets vers les zones où la courbure du modèle est importante. En outre, en utilisant des estimateurs de courbure appropriés [59], il semble possible d'adapter ce type de forces pour des modèles représentés sous la forme de surfaces triangulées par exemple.

Pour éviter une trop forte raréfaction des sommets sur les zones rectilignes ou planes du modèle, un algorithme de régularisation est mis en place de manière à subdiviser les arêtes ou les faces lorsque leur taille devient déraisonnable.

Cette approche souffre de deux inconvénients. D'une part, elle exploite une information *a posteriori* et repose donc sur le bon comportement du modèle. Si l'algorithme de segmentation est induit en erreur (par le bruit par exemple), des sommets peuvent s'accumuler dans une zone de forte courbure sans correspondance avec une structure réelle de l'image. A l'inverse, si une structure est mal détectée, la résolution du modèle à son voisinage sera laissée inchangée alors qu'il serait souhaitable qu'elle augmente.

Par ailleurs, si les forces appliquées au modèle permettent de relier assez précisément sa forme finale à celle des objets à extraire, il est difficile de maîtriser l'ensemble des formes que prend la courbe ou la surface entre son initialisation et sa convergence. En particulier, et notamment au cours de changements de topologie, des formes contournées peuvent apparaître, avec des régions de forte courbure sans relation avec la forme des objets à extraire. L'application de la force définie dans ce paragraphe conduit à une accumulation injustifiée de sommets dans ces zones et donc à une hausse inutile de la complexité de l'algorithme.

2.3.2 Modèles implicites

Dans le contexte des méthodes implicites, la segmentation est réalisée en suivant l'évolution du niveau zéro d'une fonction ϕ dépendante du temps et définie et discrétisée sur tout l'espace image. A chaque itération, les valeurs de ϕ en chaque point de l'échantillonnage doivent être mises à jour, ce qui résulte en une complexité en $O(|I|)$, où $|I|$ désigne le nombre de pixels de l'image à analyser. Pour réduire les coûts en temps il est possible de focaliser au maximum l'effort de calcul sur un voisinage de l'ensemble de niveau zéro de ϕ .

D'autre part, rien ne garantit *a priori* qu'au cours de son évolution la fonction ϕ conserve une forme appropriée pour les calculs. Gomes et Faugeras [27] donnent des exemples où des discontinuités apparaissent. Il est également possible que le gradient de ϕ s'annule ce qui conduit à des instabilités numériques. Pour surmonter le problème, deux approches sont possibles. D'une part, l'équation d'évolution du modèle peut être modifiée pour éviter l'apparition de ces cas pathologiques. D'autre part ϕ peut être réinitialisée périodiquement pour supprimer les singularités qui seraient éventuellement apparues. En

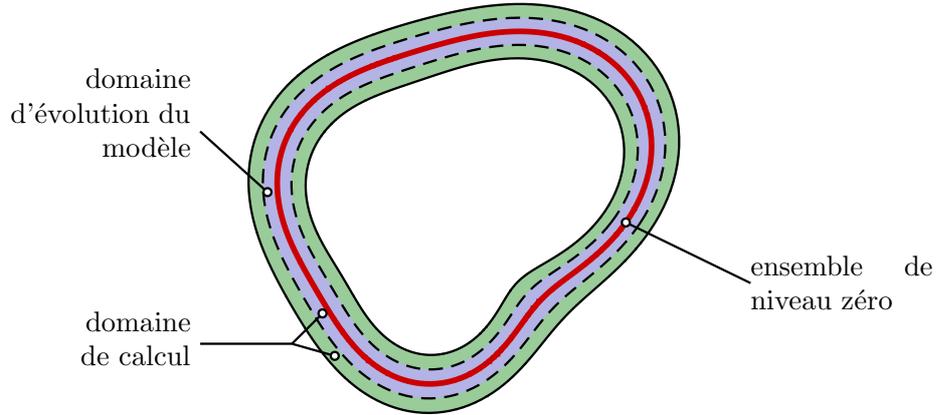


FIG. 2.4 – Algorithme de la “bande étroite”. Au lieu d’être calculée sur tout l’espace image, la fonction implicite n’est calculée et mise à jour que dans une bande qui entoure la ligne de niveau zéro (en gras). Lorsque l’ensemble de niveau zéro s’approche trop près du bord de la bande (en pointillés), une nouvelle bande est recalculée, et la fonction implicite est réinitialisée comme la distance au niveau zéro.

général ϕ est redéfinie comme la carte de distance à son niveau zéro et peut être recalculée très efficacement.

Réduction du domaine de calcul

Méthode de la bande étroite. La méthode de *la bande étroite* (ou *narrow band method*) proposée par Adalsteinsson et Sethian [2] consiste à réduire le domaine de calcul à une certaine zone autour de l’ensemble \mathcal{S} de niveau zéro comme dessiné à la figure 2.4. Si $|\mathcal{S}|$ désigne la longueur ou l’aire du modèle déformable, d la largeur d’un pixel ou la section d’un voxel, et k l’épaisseur (en pixels ou en voxels) de la bande de calcul, la complexité de la mise à jour de ϕ passe de $O(|I|)$ à $O(\frac{k|\mathcal{S}|}{d})$.

Dans un premier temps il est nécessaire de construire la bande de calcul : il s’agit de déterminer quels points de la grille d’échantillonnage sont situés à une distance de \mathcal{S} inférieure à un seuil choisi. Lorsque le domaine de calcul a été déterminé, l’application ϕ qui définit implicitement le modèle déformable est alors initialisée comme la carte de distance à l’ensemble \mathcal{S} .

Une fois initialisée l’application ϕ est itérativement mise à jour en accord avec les équations d’évolution données au paragraphe 1.3.4. Au cours de ces transformations, l’ensemble de niveau zéro de ϕ peut être amené à sortir du domaine de calcul choisi au départ. Il est donc nécessaire de

1. détecter quand la courbe s’approche trop près du bord de la bande autorisée (c’est-à-dire quitte la zone délimitée par des pointillés à la figure 2.4),
2. calculer une nouvelle bande adaptée à la nouvelle forme du modèle,

3. réinitialiser la fonction implicite dans le nouveau domaine de calcul.

Pour tout point \mathbf{x} , $\phi(\mathbf{x}) > 0$ si \mathbf{x} est à l'intérieur du modèle déformable, et $\phi(\mathbf{x}) \leq 0$ sinon. Par conséquent, si le contour déformable franchit un nœud situé sur le bord du domaine d'évolution autorisé, alors ϕ change de signe à cette position. En observant les signes de ϕ aux nœuds de la grille situés au bord de la région autorisée, il est donc possible de détecter si l'ensemble de niveau \mathcal{S} est sorti du domaine dans lequel son mouvement peut être calculé précisément. Cette méthode permet également de détecter certaines instabilités numériques qui peuvent se développer aux bords de la bande de calcul (voir [2]). Lorsque cela se produit, il est nécessaire de réinitialiser ϕ , comme dans le cas où le modèle sort de son domaine d'évolution autorisé.

Une difficulté des méthodes de type “bande étroite” est de trouver un choix approprié pour l'épaisseur de la bande de calcul. Choisir une bande fine réduit l'effort de calcul nécessaire à la mise à jour de ϕ . En contrepartie, le domaine doit être recalculé plus fréquemment, ce qui peut s'avérer coûteux. A l'inverse, une bande trop large sera reconstruite moins souvent, mais imposera des coûts de calcul plus importants pour faire évoluer ϕ .

Subdivision arborescente. Strain [54] propose d'utiliser un échantillonnage adaptatif de l'espace image. Plutôt que d'utiliser une grille discrète régulière, il propose une subdivision de l'espace en *quadtrees* ou *octrees* construite de sorte que l'échantillonnage soit très fin au voisinage du niveau zéro de ϕ et beaucoup plus large ailleurs.

La subdivision est construite en s'appuyant sur un critère de distance au modèle : une cellule de la décomposition est récursivement subdivisée si la longueur de son côté est plus grande que sa distance à l'ensemble de niveau zéro de ϕ . De cette manière, la densité de sommets diminue rapidement avec la distance par rapport à la partie “utile” de ϕ . L'effort calculatoire pour évaluer ϕ à l'étape suivante est donc réduit. Avec cette structure de données, l'algorithme de mise à jour du modèle est le suivant :

1. Construire un arbre en utilisant le critère décrit précédemment.
2. Calculer les nouvelles valeurs de ϕ aux nœuds de l'arbre.
3. Calculer un nouvel arbre toujours avec le critère précédent, mais avec la nouvelle position de l'interface.

Comme pour l'algorithme de la bande étroite, le recalcul de l'arbre à chaque itération induit un coût. En outre, l'adaptation de la discrétisation de ϕ est uniquement guidée par la distance à l'ensemble de niveau zéro. Elle reste donc uniforme le long de la frontière déformable et ne tient pas compte de la géométrie du modèle.

Réinitialisation de la fonction implicite

Algorithme de “Fast Marching”. L'algorithme de *fast marching* [50] peut être utilisé pour construire efficacement la carte de distances qui sert d'initialisation pour ϕ et pour déterminer dans la foulée les nœuds de la grille d'échantillonnage qui appartiennent au domaine de calcul (c'est-à-dire ceux qui sont situés à une distance de \mathcal{S} inférieure à un seuil d_{\max}).

L'algorithme étiquette progressivement tous les nœuds de la grille par leur distance à l'ensemble \mathcal{S} . Ces nœuds sont répartis en trois classes :

- la classe A des nœuds pour lesquels la distance à \mathcal{S} a été calculée et est définitivement connue,
- la classe T des nœuds adjacents à au moins un nœud de A ,
- enfin la classe F des nœuds qui ne sont adjacents à aucun nœud de A .

Comme chaque nœud de T est adjacent à au moins un nœud de A , sa distance à \mathcal{S} peut être estimée en utilisant une discrétisation de l'équation *eikonale* :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla \phi|_{\mathbf{x}}\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.8)$$

qui est satisfaite par la carte de distances. Une discrétisation appropriée permet de n'exploiter que des nœuds de A , de sorte que seule les informations obtenues "en amont" et donc considérées comme fiables sont utilisées.

A chaque itération le nœud de T dont l'étiquette est la plus petite est placé dans la classe A . Son étiquette est donc figée et ceux de ses voisins qui étaient jusqu'alors dans F entrent dans la classe T . Les étiquettes de ceux de ses voisins qui appartiennent à la classe T sont mises à jour, et une nouvelle itération peut commencer.

Deux propriétés contribuent à l'efficacité de l'algorithme :

- Une grande partie des calculs effectués aux itérations précédentes peut être réutilisée (à une itération donnée, seules les étiquettes des sommets voisins du sommet élu sont mises à jour).
- Le stockage des nœuds dans une structure de tas permet de trouver le nœud de T le plus proche de \mathcal{S} en temps constant. L'insertion des nœuds admis dans T à une itération donnée s'effectue en temps logarithmique par rapport au nombre de nœuds déjà présents dans le tas.

Globalement, le calcul de la carte de distances sur une bande de k nœuds de large peut donc être effectué en $O(\frac{k|\mathcal{S}|}{d} \log(\frac{k|\mathcal{S}|}{d}))$.

Kim [32] propose une version améliorée de l'algorithme, appelée *group marching*, dans laquelle les nœuds sont élus en groupe plutôt qu'un par un à chaque itération. La difficulté est alors de sélectionner des nœuds dont les distances à \mathcal{S} peuvent être calculées indépendamment les unes des autres.

Changement d'équation d'évolution. Il est également envisageable d'éviter le recalcul périodique de la carte de distances en choisissant une équation d'évolution différente pour ϕ . En effet, l'évolution du modèle déformable n'est pas liée à la forme de la fonction ϕ , il importe seulement que son niveau zéro suive la loi de propagation choisie. Gomes et Faugeras [27] proposent de remplacer la loi d'évolution (1.30) proposée par Osher [46] par une nouvelle équation qui garantit que si ϕ est une carte de distance dans la situation initiale, alors elle le reste au cours de son évolution. L'équation d'évolution proposée correspond à une manière particulière (proposée par Adalsteinsson et Sethian [1]) d'étendre le champ de vitesses du modèle à tout l'espace image.

2.4 Accélération de la convergence

Les méthodes exposées aux paragraphes précédents réduisent les coûts calculatoires de chaque itération des algorithmes de segmentation. Une seconde approche, souvent compatible avec la précédente vise à réduire le nombre d'étapes requises pour atteindre la convergence du modèle.

L'approche la plus fréquemment utilisée consiste à travailler d'abord à de faibles résolutions puis à utiliser les résultats obtenus à une résolution grossière comme initialisation pour une reconstruction plus détaillée.

Plusieurs auteurs ont également remarqué que les approches variationnelles pour la minimisation d'énergie facilitent l'intégration de forces additionnelles qui modifient la dynamique des modèles. Ces méthodes sont en général destinées à améliorer les résultats des segmentations ou à réduire la sensibilité des modèles par rapport à leur initialisation. En pratique, ces contraintes supplémentaires conduisent le modèle plus rapidement vers sa position d'équilibre et réduisent ainsi le nombre d'itérations avant convergence.

Enfin, la minimisation d'une fonctionnelle a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux dans le domaine des mathématiques appliquées. La forme d'énergie minimale peut être calculée en adaptant ces algorithmes particulièrement performants au cas particulier des modèles déformables.

2.4.1 Approches coarse-to-fine

Pour économiser du temps de calcul, une approche très répandue [64, 55, 44, 35] consiste à segmenter et reconstruire grossièrement les objets d'intérêt avant d'accroître progressivement la précision de l'analyse. Lorsque la convergence est obtenue à une résolution donnée, le modèle est raffiné puis sert d'initialisation pour une nouvelle minimisation d'énergie à une résolution plus fine. Ce procédé est réitéré jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte.

De cette manière, les coûts et le nombre des premières itérations sont réduits. Deux phénomènes sont mis en jeu. D'une part, la complexité de chaque itération est réduite du fait du faible nombre de paramètres à mettre à jour, ou du moindre coût d'éventuelles intégrations numériques le long des contours. D'autre part les déplacements des modèles à chaque itération peuvent être plus importants. Il en résulte une diminution du nombre d'itérations avant convergence.

Cette méthode très générale présente l'avantage d'être utilisable pour une large variété de modèles. De plus, elle n'implique en général que des investissements minimes en terme d'implémentation. Toutefois, pour sa plus grande partie, l'économie en temps de calcul est réalisée pendant les premières étapes de l'algorithme et si la précision requise est élevée, la complexité reste élevée.

Par ailleurs, il est nécessaire de conserver la résolution du modèle déformable en adéquation avec celle des images. Avant de procéder à la reconstruction avec un modèle grossier, l'image à traiter est donc en général lissée puis sous-échantillonnée. Au cours des premières étapes de l'algorithme, les structures les plus fines peuvent donc être détruites et par

conséquent ignorées. Il n'est ensuite pas garanti que les raffinements successifs de l'image et du modèle permettent de les retrouver.

2.4.2 Forces supplémentaires

Comme cela a déjà été signalé, la formulation énergétique de la segmentation est souvent transformée en un problème variationnel qui donne lieu à une interprétation physique : le contour déformable est identifié à un système mécanique soumis à l'action de forces qui d'une part maintiennent sa régularité, et d'autre part l'adaptent aux données à analyser.

Dans la formulation la plus courante, l'énergie image est définie directement à partir de la norme du gradient de l'image lissée. Lorsque la position initiale du contour déformable longe les structures d'intérêt avec une précision suffisante, la force qui dérive de cette énergie suffit à faire converger le modèle vers la forme attendue. Cependant, l'influence de la force image s'estompe très rapidement à mesure que le modèle est éloigné des contours de l'image. Si le modèle est initialisé à trop grande distance de l'objet à reconstruire, le processus de segmentation peut donc échouer ou exiger un nombre d'itérations très important pour converger.

Pour surmonter ces limitations, certains travaux remplacent la force image classique ou introduisent une force additionnelle. Dans les deux cas, l'influence de la nouvelle force est sensible à grande distance des objets d'intérêts. De cette manière, le modèle déformable est toujours guidé vers sa position d'équilibre, même lorsqu'il est positionné à grande distance des structures d'intérêt. Cela se traduit par une robustesse accrue, mais également par une réduction des temps de convergence, puisque le modèle est attiré plus rapidement vers sa position d'équilibre.

Cohen et Cohen [13] introduisent deux types de forces. D'une part une force d'inflation qui pousse le modèle dans la direction de sa normale :

$$\mathbf{F}_{\text{infl}} = \lambda \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

Dans le même article, les auteurs proposent également de calculer un champ de potentiel qui exploite les qualités d'un détecteur de contour robuste. Le potentiel en un point est défini par :

$$P(\mathbf{x}) = f(d(\mathbf{x})), \quad (2.10)$$

où f est une fonction croissante et $d(\mathbf{x})$ désigne la distance qui sépare le point \mathbf{x} du contour le plus proche. Dans le même article, les auteurs proposent et comparent différents choix pour la fonction f .

Dans une autre approche, Xu et Prince [68] construisent un champ de vecteurs $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, appelé *gradient vector flow* et qui, au voisinage des contours adopte le même comportement que la force image classique, et dont les variations sont minimisées à grande distance des structures d'intérêt. Le champ de vecteurs est défini comme le champ $\bar{\mathbf{v}}$ qui minimise la fonctionnelle

$$\bar{\mathbf{v}} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \iint \left(\mu \|\nabla \mathbf{v}|_{(x,y)}\|^2 + \|\nabla f\|^2 \|\nabla f|_{(x,y)} - \mathbf{v}|_{(x,y)}\|^2 \right) dx dy. \quad (2.11)$$

Pour déterminer $\bar{\mathbf{v}}$ les auteurs remarquent que le champ vérifie une équation de diffusion qui est résolue numériquement par des méthodes classiques. Cette approche pose un certain nombre de problèmes comme le lissage trop important au voisinage des contours ou l'annulation de $\bar{\mathbf{v}}$ le long de la ligne médiane des concavités profondes des objets. Ces problèmes sont en partie résolus dans [67, 72].

2.4.3 Méthodes numériques

Dans des approches purement énergétiques, la position d'équilibre d'un modèle déformable est très souvent déterminée par des méthodes numériques classiques. Dans ce cadre, le vecteur $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{n-1})$ des paramètres qui définissent la forme du modèle est mis à jour itérativement de sorte que la fonctionnelle d'énergie atteigne son minimum en un nombre d'itérations aussi faible que possible. A chaque étape il est donc nécessaire de calculer le vecteur $\Delta\mathbf{p}^i$ utilisé pour mettre à jour les paramètres du modèle. Ce vecteur est habituellement écrit sous la forme $\Delta\mathbf{p}^i = \epsilon^i \mathbf{d}^i$. Le réel ϵ^i désigne une longueur de pas et \mathbf{d}_i une direction dans l'espace des paramètres. La méthode itérative est donc décrite par l'équation d'évolution :

$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i + \Delta\mathbf{p}^i = \mathbf{p}^i + \epsilon^i \mathbf{d}^i. \quad (2.12)$$

Les différentes méthodes numériques disponibles correspondent à des constructions particulières des suites ϵ^i et \mathbf{d}_i , dont un choix judicieux réduit les temps de convergence.

Méthode de Powell

Lorsqu'il est difficile d'évaluer les dérivées de la fonction d'énergie, il est possible d'utiliser la méthode de Powell. Les n premiers déplacements sont effectués dans des directions arbitraires, en général suivant chacun des n vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . Les pas de ces déplacements $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ sont évalués par des méthodes numériques classiques de sorte que

$$\epsilon^i = \operatorname{argmin}_{\epsilon \in \mathbb{R}} E(\mathbf{p}^i + \epsilon \mathbf{d}^i). \quad (2.13)$$

A l'issue des ces n déplacements, la direction \mathbf{d}^1 est remplacée par \mathbf{d}^2 , \mathbf{d}^2 par \mathbf{d}^3, \dots et \mathbf{d}^{n-1} par \mathbf{d}^n . La direction \mathbf{d}^n est quant à elle remplacée par la direction globale $\mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^1$ des déplacements sur les itérations de 1 à n . A nouveau n déplacements sont effectués avec ces nouvelles directions et la procédure est répétée jusqu'à ce que l'énergie cesse de décroître.

Cette méthode souffre de deux inconvénients majeurs. Premièrement, après un certain nombre d'itérations, les vecteurs \mathbf{d}^i ne sont plus linéairement indépendants. L'espace de recherche du minimum d'énergie est donc artificiellement réduit et le point de convergence n'est pas le minimum recherché. Pour pallier ces insuffisances, l'algorithme doit donc être périodiquement réinitialisé, ou des procédures plus complexes doivent être mises en œuvre pour maintenir l'indépendance des \mathbf{d}^i . En second lieu, sans hypothèse particulière sur la fonction d'énergie, le calcul des pas ϵ^i peut requérir un grand nombre d'évaluations de E et se révéler particulièrement coûteux.

Descente de gradient continue - Méthode de plus grande descente

Lorsque le gradient de la fonction d'énergie peut être estimé, il devient un choix naturel pour les \mathbf{d}^i puisqu'il pointe dans la direction qui, localement, semble la plus prometteuse. En comparaison avec la méthode de Powell, la convergence des méthodes numériques est donc accélérée. L'équation (2.12) se réécrit alors :

$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i - \epsilon^i \nabla E|_{\mathbf{p}^i}. \quad (2.14)$$

Deux choix sont possibles pour construire la suite des ϵ^i . L'idée la plus simple consiste à prendre la même valeur ϵ pour toutes les itérations, on parle alors de *descente de gradient continue*. Notons que pour des modèles assimilés à des systèmes masse-ressort cette approche est équivalente à l'intégration des équations de Newton par la méthode d'Euler explicite. Elle présente donc le même type de défauts. La difficulté consiste en effet à sélectionner une valeur de ϵ acceptable : une valeur trop élevée risque de rendre la méthode de minimisation instable, alors qu'une valeur trop petite rend prohibitif le nombre d'itérations avant convergence.

La seconde approche consiste à approcher à chaque étape le meilleur ϵ^i possible comme indiquée dans (2.13). On parle alors de *méthode de plus grande descente*. Bien que cette seconde méthode semble plus efficace qu'une descente de gradient continue elle se révèle parfois plus coûteuse. En effet si le calcul du ϵ^i optimal est beaucoup plus coûteux que l'évaluation du gradient en un point, une seule itération de la méthode de plus grande descente peut consommer plus de ressources que plusieurs itérations de la méthode de descente de gradient continue. Pour cette raison Staib et Duncan [52] préfèrent se restreindre à la première approche. En outre, la direction du gradient n'est pas toujours la plus appropriée pour rejoindre le plus rapidement la position d'énergie minimale. Cette remarque est particulièrement justifiée lorsque la fonctionnelle d'énergie exhibe des vallées étroites. Dans ce cas en effet, l'essentiel des déplacements est effectué dans une direction transversale à la direction de la vallée et un grand nombre d'itérations peuvent être requises pour longer la vallée jusqu'à son point d'énergie minimale.

Méthode de Gradient Conjugué

Une connaissance plus précise de la fonction à minimiser rend possible l'utilisation d'algorithmes plus efficaces. En particulier, les méthodes de type *gradient conjugué* supposent qu'au moins dans un voisinage de \mathbf{p}^i , la fonction d'énergie s'écrit

$$E(\mathbf{p}) \simeq E(\mathbf{p}^i) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{p} - \mathbf{p}^i) H|_{\mathbf{p}^i} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^i) + {}^t \nabla E|_{\mathbf{p}^i} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^i), \quad (2.15)$$

où la matrice hessienne H est symétrique et définie-positive. Sous cette hypothèse il est possible de déterminer efficacement des suites ϵ^i et \mathbf{d}^i qui permettent de réduire considérablement le nombre d'itérations avant convergence.

La suite des \mathbf{d}^i est construite progressivement de sorte que $(\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^n)$ soit une base orthogonale pour la matrice H . Comme dans la méthode de plus grande descente chaque pas

ϵ^i est choisi de manière à minimiser l'énergie dans la direction pointée par \mathbf{d}^i . Cependant, grâce à l'hypothèse (2.15) ϵ^i s'exprime analytiquement en fonction de H et de quantités auxiliaires qui peuvent être calculées efficacement. Lorsque H est trop difficile ou coûteuse à calculer, ϵ^i peut également être approchée efficacement par des méthodes numériques classiques.

Lorsque l'équation (2.15) est exacte, le vecteur de paramètres optimal est atteint en n itérations. Si, au contraire, la forme quadratique n'est qu'une approximation locale de la fonction d'énergie, la matrice H est recalculée périodiquement pour le vecteur de paramètres courant puis est ensuite utilisée pour un certain nombre d'itérations. Là encore, le processus est stoppé lorsque l'énergie cesse de décroître. Pour encore accélérer la convergence, la méthode du *gradient conjugué préconditionné* remplace H par une matrice proche de H , facile à calculer, mieux conditionnée, et facile à inverser (voir [65] pour un exemple).

Si la méthode du gradient conjugué réduit le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer la forme d'énergie minimale, elle reste néanmoins limitée à des modèles décrits par des jeux de paramètres de tailles raisonnables et fixée. Elle se révèle en particulier inapplicable pour des modèles comme ceux proposés dans [40, 41, 35, 18], dont la maille contient un grand nombre de sommets et dont le nombre de paramètres peut varier à chaque itération. En outre le problème de segmentation doit être formulé entièrement sous la forme d'une minimisation d'énergie. Ces méthodes sont donc inutilisables pour des formulations dynamique [14, 39] ou qui font intervenir des forces non conservatives [13, 68, 67, 72].

2.5 Discussion

L'étude de ces méthodes montre qu'un compromis est inévitable entre la généralité du modèle d'une part, et sa complexité d'autre part. Pour décrire les objets d'une classe restreinte et leurs déformations, peu de paramètres sont nécessaires. La complexité du processus de segmentation est donc considérablement réduite. Au contraire, lorsque peu d'hypothèses sont disponibles sur les objets à reconstruire, un grand nombre de paramètres est requis pour représenter les formes. Il en résulte une importante complexité des méthodes de segmentation et de reconstruction. Quelle que soit la méthode utilisée, la gestion des changements de topologie ajoute encore un coût supplémentaire. L'ensemble des complexités des modèles décrits dans ce chapitre et le précédent sont rassemblées dans le tableau 2.1.

Dans ce tableau, le nombre de paramètres utilisés pour le codage de la forme est noté P . La taille de l'image (en nombre de pixels ou de voxels) est notée $|I|$. Un autre paramètre pertinent est noté N . Il représente le rapport $N = \frac{|S|}{d}$ entre la longueur ou l'aire du modèle déformable et la largeur ou la section d'un pixel ou d'un voxel. Ce paramètre intervient dans les intégrations numériques effectuées le long du modèle déformables. Par ailleurs il apparaît comme le nombre de sommets nécessaire pour échantillonner correctement un modèle surfacique. En effet, sans information supplémentaire et pour garantir que tous les détails disponibles seront exploités, l'image doit être segmentée avec une précision équivalente à la taille du pixel. Dans le cas de modèles de surfaces échantillonnées, on a donc $P \simeq N$.

Cette quantité peut également être reliée aux dimensions de l'image : pour un objet géométrique de forme raisonnablement complexe, le modèle peut aussi être vu comme une sous-variété de dimension immédiatement inférieure à celle de l'image. Dans le cas d'une image bidimensionnelle de taille $|I| = l^2$, N est du même ordre de grandeur que l . De manière similaire, pour une image tridimensionnelle de taille $|I| = l^3$, N sera du même ordre de grandeur que l^2 .

En observant l'ensemble de ces complexités, on constate qu'en dépit des optimisations exposées dans ce chapitre, la plupart des méthodes de segmentation et de reconstruction conservent une complexité fortement couplée à la résolution de l'image. Ceci est dû au fait que l'échantillonnage de la frontière (ou au voisinage de la frontière pour les modèles implicites) reste uniforme et d'une finesse équivalente à celle de l'échantillonnage de l'image.

L'idée proposée par Delingette [20] (et décrite au paragraphe 2.3.1) exploite une information complémentaire de celle de l'image. La densité de sommets sur sa maille est fonction de la géométrie de l'objet reconstruit. Localement dans les zones rectilignes ou planes, la résolution de la maille du modèle déformable peut donc descendre considérablement au dessous de celle de l'image. Comme cela a déjà été signalé toutefois, l'information exploitée par ce modèle est connue *a posteriori* seulement lorsque la segmentation est terminée. En outre, en trois dimensions, aucun algorithme n'est à notre connaissance capable d'adapter dynamiquement la topologie des mailles simplexes sans l'aide d'un utilisateur.

L'approche que nous proposons dans cette thèse est similaire : la résolution du modèle déformable est adaptée en fonction de la géométrie des objets, et les sommets sont accumulés dans les zones de forte courbure. Toutefois, la méthode proposée extrait directement l'information géométrique de l'image plutôt que de s'appuyer sur l'évolution du modèle. De la sorte, l'information utilisée est donc disponible *a priori* et est découplée de l'évolution du modèle. De plus la représentation choisie est une surface triangulée pour laquelle Lachaud [33] a montré qu'il est possible de gérer les changements de topologie dynamiques de manière entièrement automatique.

Le chapitre 3 décrit en détail l'approche envisagée. Il s'attache en particulier à montrer comment remplacer la métrique euclidienne de l'espace par une métrique Riemannienne afin d'obtenir une résolution adaptative. Il décrit également l'impact d'un changement de métrique sur le comportement du modèle et sur les algorithmes qui maintiennent la cohérence entre sa topologie et sa géométrie. Le chapitre 4 montre comment les informations pertinentes concernant la géométrie des formes à reconstruire sont extraites de l'image puis incorporées dans la nouvelle métrique dont est muni l'espace image.

Patrons déformables	
Généricité	Entièrement spécifique
Comp. en espace	P fixé, avec $P \ll N$
Comp. en temps par it.	$O(N)$ (intégration numérique sur la frontière)
Représentation fréquentielle	
Généricité	Faible à moyenne suivant P
Comp. en espace	P fixé, avec $P \ll N$
Comp. en temps par it.	$O(N)$ (intégration numérique sur la frontière)
Splines - Éléments finis	
Généricité	Moyenne à élevée, changement de topologie difficiles
Comp. en espace	$P = O(N)$
Comp. en temps par it.	$O(P)$ (inversion d'une matrice diagonale par bande $P \times P$, et intégration le long du modèle)
Modèles non structurés	
Généricité	Élevée, mais la topologie n'est pas représentée explicitement
Comp. en espace	$P = O(N)$ (échantillonnage régulier)
Comp. en temps par it.	$O(P^2)$ sans optimisation
Surface triangulée	
Généricité	Complètement générique
Comp. en espace	$P = O(N)$ (échantillonnage régulier obligatoire)
Comp. en temps par it.	$O(I)$ ou $O(P \log P)$ suivant l'algorithme de gestion des changements de topologie
Maille simplexe	
Généricité	Forme arbitraire, mais adaptation pas automatique
Comp. en espace	$P \ll N$ en tenant compte de la géométrie des objets, mais $P = O(N)$ pour garantir la reconstruction de tous les détails
Comp. en temps par it.	$O(P)$ mais les changements de topologies ne sont pas gérés
Modèles implicites	
Généricité	Complètement générique
Comp. en espace	$P = O(I)$ sans optimisation, $P = O(kN)$ avec une bande étroite d'épaisseur k pixels ou voxels
Comp. en temps par it.	$O(P)$ sans tenir compte du recalcul éventuel de la bande étroite

TAB. 2.1 – Généricité et complexité en espace et en temps de différents modèles déformables. Voir le texte pour les notations.

Chapitre 3

Modèle générique à résolution adaptative

3.1 Généralités

Le modèle proposé est une extension du modèle développé par Lachaud et Montanvert [34, 33, 35]. Les frontières des objets sont représentées explicitement sous la forme d'un modèle surfacique échantillonné (voir le paragraphe 1.2.2). Dans le cas à deux dimensions, le modèle proposé est donc une ligne polygonale fermée orientable. Dans le contexte tridimensionnel, il est représenté par une surface triangulée fermée également orientable.

L'ensemble des développements proposés dans cette thèse s'appliquent indifféremment à l'analyse et la reconstruction d'images en deux ou trois dimensions. Dans tout ce qui suit et sauf mention explicite, les termes *maille*, *modèle*, *contour* ou *frontière* déformables désigneront indistinctement une courbe polygonale ou une surface triangulée.

Notre modèle suit le paradigme habituel des modèles déformables : le contour déformable est donc plongé dans l'espace image. Il y évolue sous l'action conjointe de forces régularisantes et de forces externes qui le guident vers les structures d'intérêts de l'image.

Comme dans [33], la cohérence entre la topologie et la géométrie du modèle est maintenue en détectant les collisions du modèle avec lui-même et en reconnectant la maille de manière appropriée lorsqu'elles se produisent. La détection des auto-collisions est permise par la régularité de l'échantillonnage de la maille déformable. Les longueurs des arêtes du modèle sont maintenues dans l'intervalle $[\delta; \zeta\delta]$. Ainsi, pour tout couple (u, v) de sommets voisins sur la maille,

$$\delta \leq d_E(u, v) \leq \zeta\delta. \quad (3.1)$$

La constante δ définit globalement la résolution de la maille. La constante $\zeta > 2$ définit le rapport des longueurs de la plus grande et de la plus petite arête. L'algorithme de régularisation consiste à passer en revue chaque arête du modèle. Chaque fois que la longueur d'une arête sort de l'intervalle $[\delta; \zeta\delta]$, elle est contractée si elle est trop petite, ou bien divisée en deux parties égales si elle est trop grande.

De cette manière, un sommet ne peut pas traverser une arête (en deux dimensions) ou



FIG. 3.1 – Lorsque la contrainte (3.1) est vérifiée et lorsque la distance maximale parcourue en une itération est majorée par d_{\max} , un sommet a ne peut pas traverser une arête (u, v) (dessin de gauche) ou une face (u, v, w) (dessin de droite) du modèle sans passer à une distance de u , v ou w inférieure à un seuil $\lambda\zeta\delta$ (en deux dimension $\lambda > 1 - \frac{1}{\zeta}$ en trois dimension, $\lambda^2 > 1 - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}$).

une face (en trois dimensions) sans s'approcher à moins d'une certaine distance $\lambda\zeta\delta$ d'au moins l'un des sommets de l'arête ou de la face considérée (voir Fig. 3.1). La constante λ est facilement calculée en fonction des dimensions maximales de l'arête ou de la face. On montre qu'il convient de choisir

$$\begin{cases} \lambda > 1 - \frac{1}{\zeta} \text{ en deux dimensions,} \\ \lambda^2 > 1 - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \text{ en trois dimensions.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Détecter les auto-collisions du modèle consiste donc à chercher les couples de sommets non voisins qui violent la règle :

$$\forall u, v \in V, \quad u \not\sim v \Rightarrow \lambda\zeta\delta \leq d_E(u, v). \quad (3.3)$$

Une approche naïve se révélerait particulièrement coûteuse puisqu'elle nécessiterait le calcul et la vérification de P^2 distances de sommet à sommet à chaque itération (P désigne le nombre de sommets utilisés pour échantillonner la forme). Lachaud et Montanvert [33, 35] proposent une méthode plus efficace et stockent les sommets dans une structure de *quadtrees* ou d'*octrees* en deux et trois dimensions. Cette structure permet la recherche efficace des sommets situés dans une boîte englobante autour d'un point donné. Avec cette approche, la complexité de la recherche des collisions est ramenée à $O(P \log P)$ en moyenne. D'autres optimisations sont encore possibles pour réduire la complexité effective. Par exemple il est envisageable de ne tester que les sommets qui ont parcouru une distance significative depuis le dernier test qu'ils ont subi. Cette amélioration se révèle particulièrement efficace lorsque

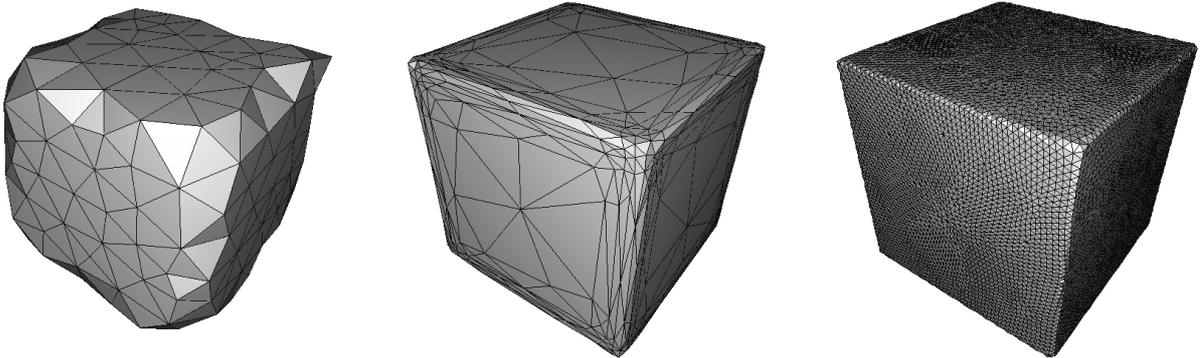


FIG. 3.2 – Illustration de l’approche proposée pour réduire la complexité de l’algorithme de segmentation : Plutôt que d’employer une résolution uniforme (grossière à gauche avec 171 sommets ou fine à droite avec 12 576 sommets), les sommets du modèle déformable sont accumulés dans les zones où ils sont utiles pour améliorer la qualité de la représentation géométrique (au centre). De cette manière le nombre de sommets (seulement 472 sommets), et donc la complexité des calculs sont significativement réduits, sans que la qualité soit altérée.

la proportion des sommets qui ont atteint leur point de convergence est importante. Dans le modèle original cette condition est obtenue lorsque le modèle est proche de sa position d’équilibre. Cette condition est aussi satisfaite si la maille du modèle n’est raffinée qu’au voisinage des structures d’intérêt, c’est-à-dire au voisinage des positions d’équilibre des sommets.

Une fois les collisions détectées, elles sont résolues en modifiant la topologie du modèle pour qu’elle s’adapte à sa nouvelle géométrie. Ces transformations sont effectuées grâce à l’ajout et la suppression de certains sommets et la reconfiguration locale du réseau maillé (voir la figure 1.8 au paragraphe 1.2.2).

Comme cela a déjà été signalé, ce modèle trouve ses limites lorsque la résolution de l’image augmente. En effet pour exploiter tous les détails d’une image, la densité de sommets sur la maille doit être suffisamment importante pour que chaque pixel ou voxel traversé par le modèle contienne au moins un sommet. En notant d la largeur d’un pixel cela impose donc :

$$\zeta \delta \leq d. \quad (3.4)$$

Cela détermine du même coup le nombre de sommets sur la maille : pour un modèle de complexité géométrique raisonnable, le nombre de sommets nécessaires pour échantillonner la frontière déformable s’écrit $P = O(l^{n-1})$ où $n = 2$ ou $n = 3$ suivant que le problème est en deux ou trois dimensions, et l désigne la largeur de l’image, mesurée en pixels ou en voxels. On aboutit donc à une complexité en $O(l^{n-1} \log l)$, fortement liée à la résolution de l’image.

L’approche envisagée pour remédier à ce problème est de n’employer la résolution maximale du modèle que dans les régions de l’image où cela est utile, comme illustré aux figures 3.2 et 3.3. Cela soulève deux questions :

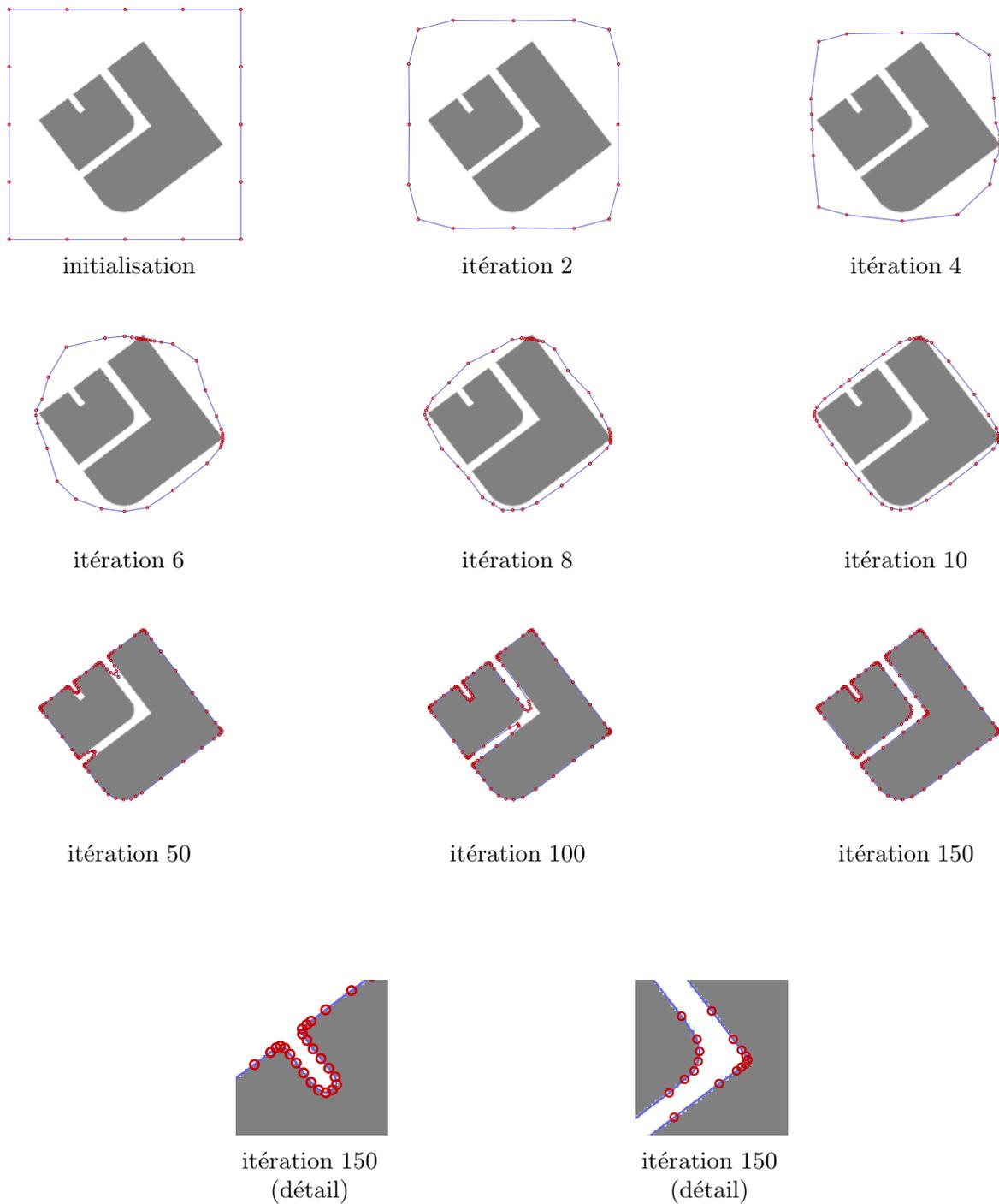


FIG. 3.3 – Illustration en deux dimensions de l’approche proposée. Pour réduire la complexité, la discrétisation du modèle est adaptée en fonction des structures sous-jacentes de l’image à traiter.

1. Comment transformer le modèle décrit précédemment pour qu'il adapte localement la densité de sommets sur sa maille ?
2. Comment déterminer quelles parties de l'image sont plus "intéressantes" et méritent d'être traitées avec une précision plus importante ?

Le premier point est traité aux paragraphes qui suivent. La seconde question est résolue au chapitre suivant.

3.2 Notions de géométrie riemannienne

Le fonctionnement du modèle décrit au paragraphe précédent est très largement basé sur des estimations de distances. Comme cela avait été pressenti par Lachaud [33] modifier localement la notion de distance permet d'adapter localement la résolution du modèle tout en maintenant sa capacité à adapter automatiquement sa topologie.

Si on suppose que les distances sont localement surestimées, l'algorithme de régularisation de la maille du modèle a tendance à couper les arêtes. La densité de sommets sur la maille du modèle augmente donc localement. A l'inverse, si les distances sont localement sous-estimées, la densité de sommets sur la maille diminue.

Pour modifier la mesure des distances nous nous appuyons sur des notions de géométrie riemannienne. La description de tous les objets et résultats liés à la géométrie riemannienne dépasse très largement le cadre de cette thèse. Seules les définitions et propriétés que nous utilisons pour obtenir une résolution adaptative du modèle seront décrites en détail. Celles qui sont utilisées directement sont décrites aux paragraphes qui suivent. Quelques notions connexes sont données à l'annexe A.

3.2.1 Généralités

L'espace image est habituellement considéré comme un espace euclidien. Les notions de points et de vecteur y sont très voisines et la distance entre deux points x et y de \mathbb{R}^n est définie par :

$$d_E(x, y) = \|y - x\| \quad (3.5)$$

Cette distance correspond à la fois à norme du vecteur $y - x$ et à la longueur du segment de droite, c'est-à-dire du plus court chemin, qui relie x à y . Cette double interprétation est permise grâce à la structure de l'espace euclidien, dans lequel les plus courts chemins sont des droites.

Dans le contexte plus général de la géométrie riemannienne, les espaces d'intérêt sont des *variétés différentielles*. Dans ces espaces particuliers, les positions des objets ne sont plus assimilables à des vecteurs, et l'expression $y - x$ n'a pas de sens. Seule l'interprétation des distances en termes de plus courts chemins reste disponible. Toutefois, il est nécessaire de définir comment cette longueur est mesurée. Pour pouvoir le faire, la géométrie riemannienne définit deux types d'objets :

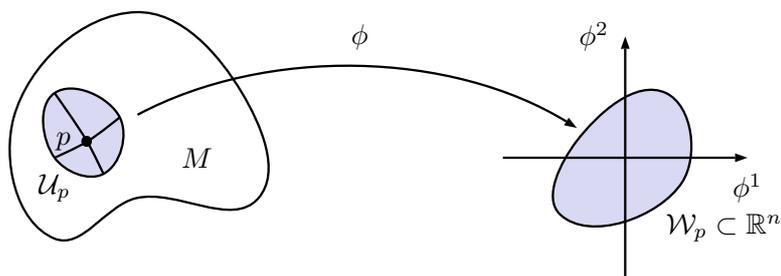


FIG. 3.4 – Variété topologique M de dimension n : tout point p est inclus dans un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n . Intuitivement, cela signifie que M peut être cartographiée, au moins localement.

- Premièrement les *vecteurs tangents* à la variété. Ces vecteurs diffèrent des vecteurs de l'espace euclidien par le fait qu'ils sont attachés à leur origine. Ils ne correspondent pas à un déplacement qui, partant d'un point d'une variété, amène à un autre mais s'interprètent plutôt comme les vitesses le long de chemins sur la variété.
- En second lieu la *métrique riemannienne*, qui en chaque point d'une variété mesure les longueurs (et les angles) des vecteurs tangents à la variété en ce point.

Une fois la métrique définie, la longueur d'un chemin est décomposée en la somme des longueurs des déplacements élémentaires (les vecteurs tangents), mesurées à l'aide de la métrique. Ces notions sont décrites formellement et dans leurs détails aux paragraphes qui suivent.

3.2.2 Variété différentielle, cartes, atlas

Définition

On considère un espace topologique M de Hausdorff¹ et muni d'une base dénombrable². On dit que M est une *variété topologique* de dimension n si et seulement si tout point p de M appartient à un ouvert \mathcal{U}_p de M homéomorphe à un ouvert \mathcal{W}_p de \mathbb{R}^n . Les homéomorphismes $\phi : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{W}_p$ sont appelés *cartes* ou encore *coordonnées locales* (voir Fig. 3.4).

Étant données deux cartes $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{W}_1$ et $\phi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{W}_2$ sur une variété topologique M , on définit l'application de changement de cartes de ϕ_1 vers ϕ_2 par :

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \longrightarrow \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Les deux cartes ϕ_1 et ϕ_2 seront dites C^k -compatibles, si et seulement si l'application de changement de carte est de classe C^k (voir Fig. 3.5).

¹tel que pour tout couple (p, q) de points existe un couple $(\mathcal{U}_p, \mathcal{U}_q)$ d'ouverts disjoints contenant respectivement p et q .

²muni d'un recouvrement dénombrable d'ouverts

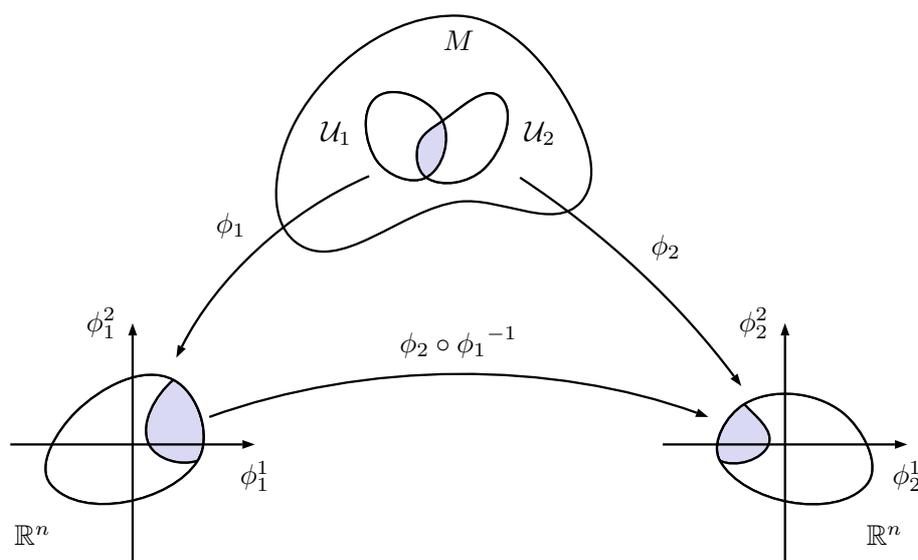


FIG. 3.5 – Pour une variété différentielle M de dimension n et de classe C^k . Sur une variété différentielle, les applications de changement de cartes $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ d'un même C^k -atlas sont des difféomorphismes de classe C^k .

On appelle alors C^k -atlas un ensemble de cartes $\{\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{W}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ telles que

1. $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$,
2. toutes les cartes de M sont C^k -compatibles.

Un C^k -atlas \mathcal{A} d'une variété topologique M est dit *maximal* lorsqu'il contient toutes les cartes sur M compatibles avec lui-même. Le couple (M, \mathcal{A}) est alors appelé *variété différentielle de classe C^k* ou encore C^k -variété.

L'intérêt des cartes locales est de transporter certaines propriétés et certaines définitions de \mathbb{R}^n vers la variété. En particulier elles rendent possible la définition et le calcul des dérivées des fonctions définies sur la variété et à valeurs dans une autre variété. Pour définir la notion de fonction de classe C^l , on se donne M et N deux C^k -variétés de dimensions respectives m et n et f une application de M dans N . On se donne également un point p de M , des coordonnées locales $\phi_p : \mathcal{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ au voisinage de p , et une carte locale $\psi_{f(p)} : \mathcal{V}_{f(p)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur N au voisinage de $f(p)$. On dira que f est de classe C^l ($l \leq k$) si et seulement si l'application $\psi_{f(p)} \circ f \circ \phi_p^{-1}$, de \mathbb{R}^m à valeur dans \mathbb{R}^n est de classe C^l (voir Fig. 3.6). Il est facile de vérifier que cette notion est indépendante du choix des cartes dans un même atlas.

Exemples

Tout espace vectoriel de dimension finie, et donc en particulier \mathbb{R}^n est une variété. En effet, en choisissant une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de l'espace vectoriel E considéré, on obtient

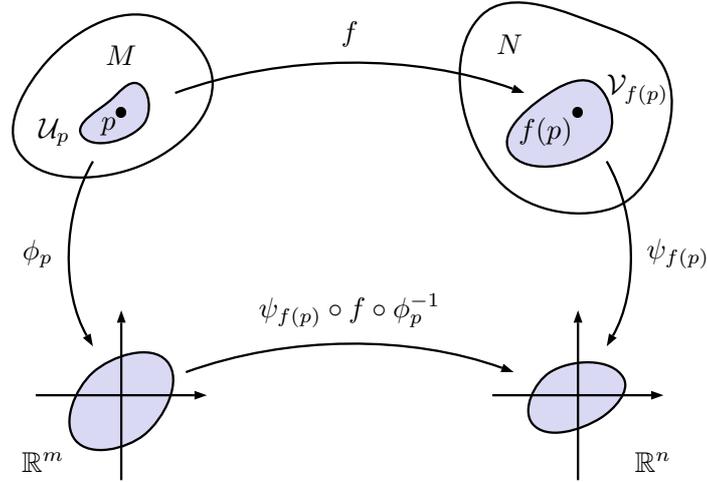


FIG. 3.6 – Application de classe C^k d'une variété M dans une variété N . La définition classique pour des applications de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n est transportée sur les variétés à l'aide des cartes locales.

immédiatement la carte :

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=0}^n x^i \mathbf{e}_i \in E, \quad (3.7)$$

qui recouvre entièrement E , et forme donc à elle seule un atlas.

Une exemple moins trivial est la sphère \mathcal{S}_n :

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}. \quad (3.8)$$

Dans le cas à trois dimensions, une carte possible (en fait la réciproque de la carte car elle est plus facile à exprimer) pour la sphère privée de ses pôles correspond à la paramétrisation par la longitude θ et la latitude ϕ (voir Fig. 3.7) :

$$(\theta, \phi) \in]-\pi; \pi[\times]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

En utilisant des cartes similaires à celle-ci il est possible de recouvrir complètement la sphère et donc de construire un atlas.

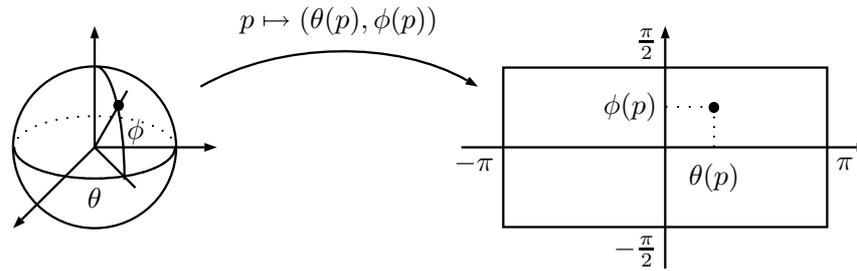


FIG. 3.7 – Carte sur la sphère en trois dimensions (variété de dimension deux). Un atlas peut être obtenu par réunion de cartes du type longitude/latitude qui, prises séparément, posent problème au niveau des pôles.

3.2.3 Vecteurs tangents

Vecteur tangent

Dans \mathbb{R}^n euclidien, la nature affine de l'espace permet d'appréhender les vecteurs comme les déplacements qui amènent le plus directement possible d'un point à un autre. Comme une variété n'est pas munie d'une structure affine, cette façon de voir les vecteurs est impossible en toute généralité. Elle reste en revanche acceptable pour des déplacements infinitésimaux. Les lignes qui suivent posent plus rigoureusement les définitions correspondantes.

On considère l'espace Γ_p des chemins γ sur M tels que $\gamma(0) = p$. On se donne une carte locale $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ au voisinage de p et deux chemins γ_1 et γ_2 de Γ_p . Alors, lorsque t est dans un ouvert suffisamment petit $]-\epsilon, \epsilon[$ autour de l'origine $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont dans l'ouvert \mathcal{U} . On peut donc définir la relation d'équivalence :

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(\phi \circ \gamma_1)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\phi \circ \gamma_2)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (3.10)$$

Il est facile de vérifier que cette relation d'équivalence est indépendante du choix d'une carte locale compatible avec ϕ . Une classe d'équivalence de Γ_p pour \sim est appelée *vecteur tangent* en p à M .

Un chemin $\gamma : t \in [t_0, t_1] \mapsto \gamma(t) \in M$ définit donc un vecteur tangent à M en chacun des $\gamma(t)$, pour $t \in [t_0, t_1]$. Le vecteur tangent à M en $\gamma(t)$ et correspondant à γ sera noté $\dot{\gamma}(t)$.

Espace tangent

L'ensemble des classes d'équivalence de Γ_p pour \sim est appelé *espace tangent* à M en p et est classiquement noté $T_p M$. La définition de la relation \sim pose clairement l'existence d'une relation bijective entre $T_p M$ et \mathbb{R}^n (où n représente toujours la dimension de la

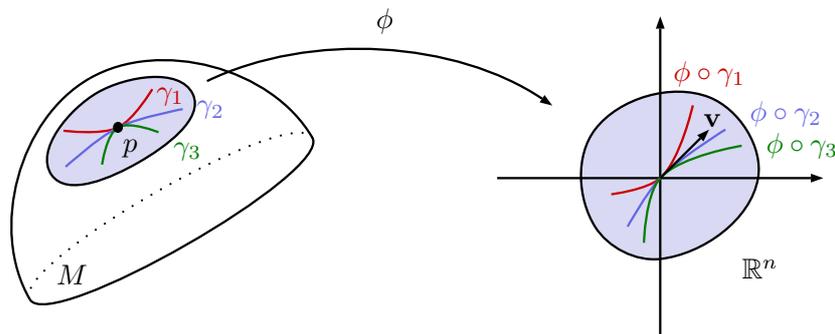


FIG. 3.8 – Vecteur tangent à une variété M . Les trois chemins γ_1 , γ_2 et γ_3 sont équivalents en p , car ramenés dans \mathbb{R}^n par une carte ϕ quelconque, ils ont même vecteur tangent \mathbf{v} en 0. L'ensemble des chemins dont les images par ϕ possèdent un même vecteur tangent dans \mathbb{R}^n est appelé *vecteur tangent* à la variété.

variété). Cette relation permet de transporter sur $T_p M$ l'addition et le produit par un scalaire de \mathbb{R}^n . Muni de ces opérations, $T_p M$ devient un espace vectoriel de dimension n .

Il est important de noter que :

- En deux points p et q distincts, $T_p M$ et $T_q M$ sont deux espaces distincts *a priori* sans relation l'un avec l'autre. Cela se traduit en particulier par le fait qu'un vecteur tangent à une variété est attaché à son origine et ne peut pas être comparé simplement à un vecteur d'un autre espace tangent.
- La définition des espaces tangents est purement intrinsèque : elle ne suppose pas que M est plongée dans un espace plus grand. Toutefois, lorsque c'est le cas, cette définition correspond à la définition habituelle de plan tangent, ce qui justifie la terminologie employée.

Fibré tangent, champ de vecteurs, champ de tenseurs

Tous les espaces tangents à une variété M peuvent être regroupés dans une structure plus grande, appelée *fibré tangent*, notée TM , et définie par :

$$TM = \{(p, \mathbf{v}) \mid p \in M, \mathbf{v} \in T_p M\}. \quad (3.11)$$

Il est facile de montrer que cet ensemble est lui-même une C^k -variété de dimension double de celle de M . Un champ de vecteurs sur M associe à chaque point p un vecteur $\mathbf{X}|_p$ de $T_p M$. On dira que le champ de vecteurs \mathbf{X} est de classe C^k si l'application qui à $p \in M$ associe le couple $(p, \mathbf{X}|_p) \in TM$ est de classe C^k .

Pour pouvoir définir la notion de métrique au paragraphe suivant, on introduit ici les notions de *tenseur* et de *champ de tenseurs*. On commence par définir le produit tensoriel de deux formes e^1 et e^2 sur $T_p M$, (c'est-à-dire deux éléments de l'espace $T_p^* M$ dual de $T_p M$) comme la forme bilinéaire notée $e^1 \otimes e^2$ qui à tout couple $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de vecteurs associe

le réel :

$$(e^1 \otimes e^2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = e^1(\mathbf{v}_1) \times e^2(\mathbf{v}_2). \quad (3.12)$$

On appelle tenseur de type $(0, 2)$ sur $T_p M$ toute application bilinéaire sur $T_p M$. Si on considère une base (e^1, \dots, e^n) de $T_p^* M$, on peut montrer que tout tenseur f sur $T_p M$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits tensoriels :

$$f = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} e^i \otimes e^j, \quad (3.13)$$

ce qui justifie de noter $T_p^* M \otimes T_p^* M$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $T_p M$.

Comme pour les champs de vecteurs un champ T de tenseurs de type $(0, 2)$ associe un tenseur $T|_p$ sur $T_p M$ à chaque point p sur la variété. Toujours de la même manière, on définit le *fibré des tenseurs de type* $(0, 2)$ sur M et on note $T^{(0,2)} M$ l'ensemble défini par :

$$T^{(0,2)} M = \{(p, t) \mid p \in M, t \in T_p^* M \otimes T_p^* M\}. \quad (3.14)$$

Là encore, on peut vérifier que $T^{(0,2)} M$ est une variété différentiable. Un champs de tenseurs de type $(0, 2)$ sur M sera de classe C^k si et seulement si l'application $p \mapsto (p, T|_p)$, définie sur M et à valeurs dans $T^{(0,2)} M$, est de classe C^k .

3.2.4 Métrique, longueur, distance

Dans \mathbb{R}^n euclidien, la longueur d'un chemin $\gamma : [t_0; t_1] \rightarrow M$ est donnée par la somme :

$$L_E(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \Big|_t \right\|_E dt. \quad (3.15)$$

Intuitivement, le chemin est décomposé en déplacements infinitésimaux $ds = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_t dt$, dont les longueurs sont estimées grâce à la norme euclidienne $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|_E$.

Sur une variété riemannienne, on procède de la même manière. Les chemins sont décomposés en déplacements élémentaires exprimés sous la formes de vecteurs tangents à la variété. Il est alors nécessaire de mesurer ces déplacements. Pour cela chacun des espaces $T_{\gamma(t)} M$ tangents à M est muni d'un produit scalaire (une forme bilinéaire, symétrique et définie-positive) qui induit une norme sur les vecteurs tangents.

Comme tous les $T_p M$ sont *a priori* sans relation l'un avec l'autre, chacun peut être muni d'un produit scalaire différent $g|_p$. Une *métrique riemannienne* est une application qui à tout point p d'une variété associe un produit scalaire $g|_p$ sur $T_p M$. Plus formellement, une métrique riemannienne est donc un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ sur M . On exige en général que ce champ de tenseurs soit de classe C^k , avec $k \geq 1$. Une variété différentielle munie d'une métrique est appelée *variété riemannienne*.

Sur une telle variété, la longueur d'un chemin se définit alors immédiatement comme la somme des longueurs de déplacements élémentaires qui constituent le chemin, ce qui s'écrit plus formellement :

$$L_R(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt. \quad (3.16)$$

Dans cette définition, la quantité $\int \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$ désigne la longueur du déplacement élémentaire $\dot{\gamma}(t) dt$. Dans la suite, la quantité $\int \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ sera notée $\|\dot{\gamma}(t)\|_R$ et la dépendance par rapport à l'origine du vecteur en argument sera omise. Un simple changement de variable dans l'intégrale permet de vérifier que la quantité $L_R(\gamma)$ est indépendante du paramétrage choisi le long du chemin.

La distance (riemannienne) entre deux points p et q est alors définie par :

$$d_R(p, q) = \inf_{\gamma \in C^1(p, q)} L_R(\gamma), \quad (3.17)$$

où $C^1(p, q)$ désigne l'ensemble des chemins de classe C^1 qui joignent p à q .

Si l'existence d'un chemin minimal n'est pas garantie dans le cas général, le théorème de *Hopf-Rinow* [7] implique, entre autres propriétés, que pour des variétés complètes pour la distance riemannienne (c'est-à-dire dans lesquelles les suites de Cauchy pour la distance riemannienne convergent) la borne inférieure de (3.17) est atteinte pour au moins un chemin particulier. Un tel chemin est appelé *géodésique*.

3.2.5 Expressions locales

Définitions et notations

On se donne la carte $x : p \in \mathcal{U} \mapsto x(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ définie sur un ouvert \mathcal{U} d'une variété M de dimension n . Au voisinage d'un point p de \mathcal{U} , cette carte définit implicitement n chemins $(\gamma_i)_{i=1, \dots, n}$ définis par :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \gamma_i : t \mapsto x^{-1}(x^1(p), \dots, x^{i-1}(p), x^i(p) + t, x^{i+1}(p), \dots, x^n(p)). \quad (3.18)$$

Il est alors facile de vérifier que les n vecteurs tangents $\dot{\gamma}_1(0), \dots, \dot{\gamma}_n(0)$ forme une base de $T_p M$ canoniquement associée à la carte x . Les vecteurs de cette base sont classiquement notés :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right). \quad (3.19)$$

Cette notation *a priori* incongrue est liée à l'interprétation des vecteurs tangents comme outils de dérivation des fonctions sur la variété (voir l'annexe A). La base correspondante sur l'espace dual $T_p^* M$ est notée (dx^1, \dots, dx^n) .

Sur l'ouvert \mathcal{U} , un champ de vecteurs \mathbf{v} de classe C^k correspond donc à la donnée de n applications $(v^i)_{i=1, \dots, n}$ de classe C^k , de \mathcal{U} à valeurs dans \mathbb{R} . Au point p , le vecteur correspondant sera défini par :

$$\mathbf{v}|_p = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (3.20)$$

De la même manière, l'utilisation de la base associée à la carte x permet de définir un produit scalaire sur $T_p M$ en spécifiant les $\frac{n \times (n+1)}{2}$ coefficients $g_{|p} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)$, pour

$1 \leq i \leq j \leq n$. Les valeurs de $g|_p$ pour n'importe quel autre couple de vecteurs de $T_p M$ en découlent par linéarité sur chacun des deux arguments. Une métrique peut donc être définie sur l'ouvert \mathcal{U} par la donnée de $\frac{n \times (n+1)}{2}$ applications $(g_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, définies sur \mathcal{U} , à valeurs dans \mathbb{R} et telles qu'en tout point la matrice $G|_p$ des $g_{ij}(p)$ soit définie-positive. L'évaluation de la métrique sur un couple (\mathbf{u}, \mathbf{v}) de vecteurs tangents en p à la variété s'écrira :

$$g|_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^1 \cdots u^n) \times G|_p \times \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) v^i u^j, \quad (3.22)$$

où v^i et u^i désignent les composantes respectives de \mathbf{u} et \mathbf{v} sur la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$.

La métrique s'interprète donc comme une somme de doubles produits de formes linéaires, ce qui, lorsqu'on veut mesurer des longueurs s'écrit classiquement :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.23)$$

où la dépendance par rapport à la position est omise et où $dx^i dx^j$ désigne implicitement le produit tensoriel $dx^i \otimes dx^j$.

Calcul des géodésiques

On considère un chemin γ de coordonnées $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ dans la carte utilisée. Pour que ce chemin minimise la fonctionnelle L_R définie en (3.16), il doit satisfaire les équations d'Euler-Lagrange associées (voir l'annexe A.2 pour plus de détails) :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0. \quad (3.24)$$

Dans (3.24), les coefficients Γ_{ij}^k désignent les *symboles de Christoffel* et sont définis par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \times \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (3.25)$$

où g^{kl} désigne le coefficient en position (k, l) dans la matrice inverse de $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Cette inverse existe toujours puisque la matrice est définie-positive.

Associée à des conditions au bords de la forme $\{\gamma(t_0) = p, \gamma(t_1) = q\}$, cette équation différentielle se révèle particulièrement difficile à intégrer dans le cas général. Il est rare de pouvoir obtenir une expression analytique des chemins géodésiques mais ceux-ci peuvent être calculés à l'aide de méthodes numériques classiques.

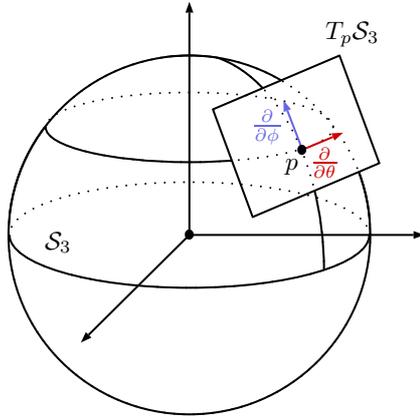


FIG. 3.9 – Plan tangent à la sphère \mathcal{S}_3 . La base $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi})$ de l'espace tangent associée à la carte (θ, ϕ) donnée au paragraphe 3.2.2 est alignée avec les parallèles et les méridiens de la sphère. La longueur d'un déplacement infinitésimal ds s'exprime sous la forme $ds^2 = \cos^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2$.

Exemples

L'exemple le plus élémentaire est celui de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n . Si on utilise la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ et la base duale (e^1, \dots, e^n) associées à la carte triviale, la métrique euclidienne s'écrit en tout point comme la matrice identité. La longueur d'un vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i$ pris dans n'importe quel espace tangent s'écrit donc :

$$\|\mathbf{v}\|_E = (v^1 \dots v^n) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (v^i)^2. \quad (3.26)$$

On peut également reprendre l'exemple de la sphère (voir Fig. 3.9) et exprimer sa métrique dans la base associée à la carte (θ, ϕ) :

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

La longueur d'un déplacement infinitésimal ds à la surface de la sphère s'écrit donc :

$$ds^2 = \cos^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2. \quad (3.28)$$

Dans cet exemple la métrique sur \mathcal{S}_3 est induite par la métrique euclidienne de l'espace \mathbb{R}^n . Ceci est rendu possible par le fait que l'espace tangent à la sphère \mathcal{S}_3 en un point quelconque p est un sous espace de l'espace tangent à \mathbb{R}^3 en ce point. Le produit scalaire sur $T_p \mathbb{R}^3$ induit donc un produit scalaire sur $T_p \mathcal{S}_3$, qui, exprimé dans la base $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi})$ s'écrit comme indiqué dans (3.27). Des détails supplémentaires sont donnés à l'annexe A.3.

Il n'est toutefois pas nécessaire de plonger la variété pour la munir d'une métrique. Comme cela a déjà été dit, il suffit de choisir un produit scalaire pour chaque point. Un

exemple classique d'une telle construction est le plan hyperbolique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ pour lequel la métrique est définie par :

$$g_{(x,y)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{y^2} (u^1 v^1 + u^2 v^2), \quad (3.29)$$

où (x, y) désigne l'origine des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de composantes respectives (u^1, u^2) et (v^1, v^2) dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Nous utiliserons une approche identique pour définir la métrique sur l'espace image : la métrique sera définie arbitrairement, sans tenir compte d'un éventuel plongement de l'espace image dans un autre espace.

3.3 Adaptation de la résolution par changement de métrique

3.3.1 Espace image

Dans le cas qui nous intéresse, l'espace image sera vu comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^n avec $n = 2$ ou $n = 3$. Il est trivial de constater que la carte identité $\text{Id} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ constitue à elle seule un C^∞ -atlas qui fait de \mathbb{R}^n une variété différentielle de classe C^∞ . Cette carte induit en chaque point une base de l'espace tangent à \mathbb{R}^n . Il est immédiat de constater que les vecteurs de cette base sont alignés avec les axes de l'espace image. La métrique est définie par l'intermédiaire de $\frac{n \times (n+1)}{2}$ fonctions $(g_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ définies sur \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} et pour lesquelles on assure qu'en tout point la matrice des g_{ij} est définie positive.

Par ailleurs, on impose à la métrique de rester bornée et toujours plus grande que la métrique euclidienne. De cette manière on peut vérifier que \mathbb{R}^n est complet, ce qui garantit l'existence d'un plus court chemin de tout point à tout autre. Ceci est explicité plus en détails au paragraphe suivant.

En pratique, l'image ne sera définie que sur une grille discrète et interpolée linéairement. La valeur du niveau de gris en dehors de l'image sera fixée à une valeur par défaut choisie en fonction de l'application considérée.

De la même manière, la métrique sera représentée sous la forme d'un champ de matrices échantillonné sur une grille discrète. En chaque point ces matrices seront la représentation d'un produit scalaire dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$. On vérifie aisément que si d_1 et d_2 sont deux produits scalaires et λ un réel de l'intervalle $[0; 1]$ alors l'application bilinéaire $(1 - \lambda)d_1 + \lambda d_2$ est encore un produit scalaire. Cela garantit que les interpolations linéaire, quadratique ou d'ordre supérieur fournissent toujours des produits scalaires et peuvent donc être utilisées pour calculer la métrique en chaque point. Pour les applications qui nous intéressent la continuité C^0 est suffisante et nous n'utiliserons donc qu'une interpolation linéaire. Rien n'interdit toutefois d'exploiter une interpolation de plus haut degré si des calculs plus élaborés devaient être effectués dans le cadre d'une application particulière. Les coûts calculatoires requis pour évaluer la métrique en un point donné peuvent cependant

s'en trouver augmentés. A l'extérieur de la grille, la métrique prend pour valeur par défaut le produit scalaire euclidien. De cette manière, si le modèle évolue en dehors de la grille de l'image, il retrouve le comportement du modèle proposé par Lachaud et Montanvert [33, 35].

Rien n'impose *a priori* que les résolutions des grilles d'échantillonnage de l'image et de la métrique soient les mêmes. En pratique cependant, la métrique est calculée à partir de l'image (voir le chapitre 4). La fréquence d'échantillonnage de la métrique sera donc le plus souvent un sous-multiple de la fréquence d'échantillonnage de l'image.

3.3.2 Effet d'un changement de métrique

Nous souhaitons choisir la métrique de la manière la plus appropriée possible en vue d'adapter la résolution du modèle déformable. Il est donc nécessaire de comprendre l'effet du remplacement de la métrique euclidienne par une métrique riemannienne quelconque.

Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre défini au paragraphe précédent. On considère donc la variété \mathbb{R}^n qu'on suppose munie de la carte identité Id. Comme indiqué précédemment chaque espace tangent est muni de la base correspondante $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, alignée avec les axes de \mathbb{R}^n . La métrique est donnée sous la forme d'une application $G : p \in \mathbb{R}^n \mapsto G|_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à chaque point de l'espace image la matrice représentative de la métrique dans cette base. Toutes ces matrices sont symétriques et définies positives et sont donc diagonalisables dans des bases $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ orthonormées pour le produit scalaire euclidien :

$$G|_p = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(p) & \cdots & \mathbf{v}_n(p) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n(p) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{v}_1(p) \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{v}_n(p) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

En se plaçant dans la base des vecteurs propres, la norme riemannienne d'un vecteur $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n w^i \mathbf{v}_i$ s'écrit donc :

$$\|\mathbf{w}\|_R^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i (w^i)^2. \quad (3.31)$$

Ces équations permettent d'encadrer la distance riemannienne par des quantités proportionnelles à la distance euclidienne. Si on suppose que, sur \mathbb{R}^n , les valeurs propres de la métrique restent bornées entre deux valeurs μ_{\min} et μ_{\max} strictement positives, alors, pour tout couple (p, q) de points de \mathbb{R}^n , les deux inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\sqrt{\mu_{\min}} \|\mathbf{pq}\|_E = \sqrt{\mu_{\min}} d_E(p, q) \leq d_R(p, q) \leq \sqrt{\mu_{\max}} d_E(p, q) = \sqrt{\mu_{\max}} \|\mathbf{pq}\|_E. \quad (3.32)$$

Pour les établir, on considère le chemin $\ell : t \mapsto p + t\mathbf{pq}$. L'inégalité de droite se démontre

en exploitant la définition de d_R :

$$\begin{aligned}
d_R(p, q) &\leq L_R(\ell) \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{g_{|\ell(t)}(\dot{\ell}(t), \dot{\ell}(t))} dt \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{\mu_{\max} \|\dot{\ell}\|_E^2} dt \\
&\leq \sqrt{\mu_{\max}} \|\mathbf{pq}\|_E.
\end{aligned}$$

L'inégalité de gauche utilise le fait que dans un espace où la métrique est uniforme les plus courts chemins sont des droites. On considère un chemin quelconque γ de p à q et le segment de droite ℓ relie p à q :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{|\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mu_{\min} \|\dot{\gamma}(t)\|_E} dt \\
&\geq \int_0^1 \sqrt{\mu_{\min} \|\dot{\ell}\|_E^2} dt \\
&\geq \sqrt{\mu_{\min}} \|\mathbf{pq}\|_E.
\end{aligned}$$

En passant à la borne inférieure sur l'ensemble des chemins γ qui relient p à q , on obtient immédiatement l'inégalité souhaitée.

Dans l'hypothèse où les valeurs propres de la métrique sont maintenues entre deux bornes strictement positives, ces deux inégalités permettent de vérifier que toute suite de Cauchy pour la distance riemannienne est aussi de Cauchy pour la distance euclidienne. Comme \mathbb{R}^n euclidien est complet, il en découle que \mathbb{R}^n est complet pour la distance riemannienne. Le théorème de *Hopf-Rinow* [7] permet de conclure immédiatement que tout point est relié à tout autre par au moins un chemin géodésique.

On adopte maintenant un point de vue local, et on s'intéresse à un chemin géodésique γ issu de p avec une vitesse $\dot{\gamma}(0)$. On peut alors vérifier qu'au premier ordre, la distance de $\gamma(t)$ à p s'écrit :

$$d_R(\gamma(t), p) = \|\dot{\gamma}(0)\|_R \times t + o(t) \quad (3.33)$$

L'ensemble des points à distance ϵ de p sont donc aux positions x décrites par les :

$$x \simeq p + \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_R} \times \epsilon, \quad \mathbf{v} \in T_p \mathbb{R}^n. \quad (3.34)$$

Ceci peut encore se réécrire sous la forme :

$$\|\mathbf{px}\|_R^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i (x^i)^2 \simeq \epsilon^2. \quad (3.35)$$

où les x^i représentent les composantes de \mathbf{px} sur la base $(\mathbf{v}_1(p), \dots, \mathbf{v}_n(p))$. On reconnaît dans (3.35) l'équation d'un ellipsoïde centré en p , dont les axes sont alignés avec les vecteurs propres de $G|_p$ et ont pour longueurs respectives $1/\sqrt{\mu_1}, \dots, 1/\sqrt{\mu_n}$.

Le changement de métrique transforme donc la sphère de rayon ϵ en l'ellipsoïde décrit plus haut. Remplacer la métrique euclidienne par la métrique G revient donc à contracter ou dilater localement l'espace dans les directions propres locales de G et avec des coefficients déterminés par les valeurs propres locales de G . Pour spécifier la métrique en un point p , on préférera donc choisir l'ensemble de valeurs et vecteurs propres de la matrice $G|_p$ et définir ainsi directement les directions et les proportions suivant lesquelles l'espace est localement étiré ou contracté.

Bien que d'autres constructions restent possibles, le domaine de variation des valeurs propres sera limité à l'intervalle $[\mu_{\min}; \mu_{\max}]$, avec en pratique $\mu_{\min} = 1$. Le majorant μ_{\max} sera déterminé au cas par cas en fonction des structures présentes dans l'image et de la variation de résolution souhaitée pour le modèle déformable. Outre la garantie d'existence de géodésiques de tout point à tout autre, borner les valeurs propres de la métrique permet d'une part d'éviter des instabilités numériques susceptibles de se produire si la métrique devait s'approcher trop de zéro, et d'autre part d'exercer un contrôle direct sur la résolution du modèle. En effet, dans une région où la métrique est euclidienne (c'est-à-dire où toutes les valeurs propres de la métrique sont proches de 1) les arêtes du modèle ont une longueur comprise entre δ et $\zeta\delta$. A l'inverse dans une zone où toutes les valeurs propres sont égales à μ_{\max} les longueurs des arêtes de la surface triangulée sont contraintes à rester dans l'intervalle $[\delta/\sqrt{\mu_{\max}}; \zeta\delta/\sqrt{\mu_{\max}}]$. Dans une région où certaines valeurs propres sont importantes et d'autres faibles, la résolution du modèle dépend de l'alignement de la maille avec l'une ou l'autre des directions propres. Si une arête est alignée avec le k -ème vecteur propre \mathbf{v}_k sa longueur euclidienne est comprise entre $\delta/\sqrt{\mu_k}$ et $\zeta\delta/\sqrt{\mu_k}$. Dans ces configurations, la résolution du modèle est donc accrue au maximum dans des directions privilégiées correspondant aux premiers vecteurs propres (c'est-à-dire à ceux qui sont associés aux plus grandes valeurs propres).

Le chapitre 4 décrit en détail comment les valeurs et vecteurs propres de la métrique peuvent être déterminées de manière à adapter la résolution du modèle déformable de manière pertinente par rapport à l'image.

3.3.3 Calcul effectif des distances

En toute généralité, le calcul des distances dans \mathbb{R}^n muni d'une métrique riemannienne est un problème particulièrement difficile qui n'est résolu analytiquement que pour des cas extrêmement simples (voir par exemple [7] à ce sujet). Dans le cas général l'estimation des distances requiert l'usage d'algorithmes complexes et trop coûteux pour être utilisés dans le contexte qui nous concerne.

Cependant, dans notre cas, il n'est pas toujours nécessaire de calculer les distances avec précision : il importe seulement de pouvoir les comparer efficacement aux différents seuils δ , $\zeta\delta$ et $\lambda\zeta\delta$. Il est également nécessaire de pouvoir déterminer, au moins approximativement, la position du milieu (au sens riemannien) d'une arête (qui correspond à la position du nouveau sommet introduit lorsqu'une arête est divisée). Dans la suite on se place dans le cas décrit à la fin du paragraphe précédent où les valeurs propres de la métrique sont bornées entre 1 et μ_{\max} et on note s l'un des trois seuils en question. Deux cas sont à

prendre en compte.

Les cas les plus simples sont ceux pour lesquels

$$s \leq d_E(p, q) = \|\mathbf{pq}\|_E, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\mu_{\max}} d_E(p, q) \leq s. \quad (3.36)$$

Les inégalités (3.32) permettent de conclure immédiatement sans avoir à calculer les distances exactes entre les deux points.

Dans les autres cas les deux sommets les inégalités (3.32) ne permettent pas de décider immédiatement si les contraintes de distances sont transgressées. Un calcul plus précis est donc nécessaire. Comme p et q sont relativement proches l'un de l'autre, il est raisonnable d'exploiter une approximation locale de la métrique et des géodésiques. Au premier ordre comme au paragraphe précédent, on a :

$$d_R(p, q) \simeq \|\mathbf{pq}\|_R \simeq \|\mathbf{qp}\|_R. \quad (3.37)$$

Cependant, l'écriture masque le fait que l'évaluation des normes dépend du point d'origine des vecteurs :

$$\begin{aligned} d_R(p, q) &\simeq \|\mathbf{pq}\|_R \simeq g|_p(\mathbf{pq}, \mathbf{pq}) \\ &\simeq \|\mathbf{qp}\|_R \simeq g|_q(\mathbf{qp}, \mathbf{qp}). \end{aligned}$$

La distance entre p et q peut donc avoir deux estimations différentes suivant que l'on se place du point de vue de q ou du point de vue de p . Cette propriété n'est évidemment pas souhaitable et on préfère donc utiliser une approche dans laquelle p et q jouent des rôles symétriques. On suppose pour cela que les géodésiques qui joignent p et q sont proches de lignes droites. On estime la distance qui sépare p et q comme longueur riemannienne du segment de droite $[pq]$ sur lequel on suppose de plus que g varie linéairement. En notant n_p et n_q les estimations de la norme du vecteur \mathbf{pq} en p et q respectivement, cette longueur s'exprime sous la forme :

$$d_R(p, q) \simeq \int_0^1 \sqrt{t n_q^2 + (1-t) n_p^2} dt, \quad (3.38)$$

ce qui s'intègre en

$$d_R(p, q) \simeq \frac{2(n_p^2 + n_p n_q + n_q^2)}{3(n_p + n_q)}. \quad (3.39)$$

Dans cette approximation, il est clair que p et q jouent un rôle symétrique. La position du milieu du segment $[pq]$ peut également être obtenue sous la forme :

$$m = p + t_{\text{milieu}} \mathbf{pq}. \quad (3.40)$$

La valeur de t_{milieu} est simplement obtenue en écrivant :

$$\int_0^{t_{\text{milieu}}} \sqrt{t n_q^2 + (1-t) n_p^2} dt = \int_{t_{\text{milieu}}}^1 \sqrt{t n_q^2 + (1-t) n_p^2} dt, \quad (3.41)$$

ce qui se réécrit, après simplification :

$$(t_{\text{milieu}}(n_q^2 - n_p^2) + n_p^2)^{\frac{3}{2}} - n_p^3 = n_q^3 - (t_{\text{milieu}}(n_q^2 - n_p^2) + n_p^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.42)$$

qui conduit finalement à :

$$t_{\text{milieu}} = \frac{1}{n_q^2 - n_p^2} \times \left(\left(\frac{n_q^3 + n_p^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - n_p^2 \right). \quad (3.43)$$

Les approximations données ci-dessus restent valides tant que les arêtes restent suffisamment courtes pour que les variations de la métrique puissent être supposées négligeables ou linéaires. Elles sont en particulier acceptables lorsque les arêtes ont des dimensions comparables ou inférieures à celles des voxels (de la métrique).

Lorsque la métrique dilate fortement les distances (c'est-à-dire lorsque ses valeurs propres prennent des valeurs élevées), il est souhaitable d'autoriser des tailles d'arêtes plus importantes, de manière à conserver une taille d'arête minimale équivalente à la taille des pixels de l'image. Cette précision n'est atteinte que dans les régions de l'image qui contiennent des structures d'intérêt. Ailleurs, les arêtes sont beaucoup plus grandes et les approximations décrites plus haut ne sont donc plus utilisables.

Comme il serait trop coûteux de déterminer précisément les géodésiques qui relient p à q , on se contente de les approcher par le segment de droite qui relie les deux points. La longueur de ce chemin peut alors être estimée en évaluant numériquement l'intégrale (3.16). Pour ce faire, il est découpé en autant de segments qu'il traverse de voxels (de la métrique), dont les longueurs sont estimées individuellement grâce à (3.39). Ce procédé peut sembler coûteux. Toutefois, lorsque les arêtes sont de taille minimale, il est équivalent à l'estimation (3.39) prise seule. Lorsqu'au contraire les arêtes sont longues, le surcoût est (largement) compensé par le fait que le nombre d'arêtes requis pour représenter un même objet est considérablement réduit.

3.4 Dynamique

3.4.1 Mouvement dans une variété Riemannienne

Formalisme Lagrangien

Dans une variété riemannienne les équations du mouvement doivent tenir compte de la métrique et les équations de Newton ne sont pas utilisables directement. L'utilisation du formalisme Lagrangien pour décrire le mouvement des sommets du modèle permet de résoudre le problème. Ce formalisme est fondé sur le *principe de moindre action* qui postule l'existence d'une quantité L , appelée *Lagrangien*, et telle que la trajectoire $x : t \in [t_0; t_1] \mapsto x(t) \in M$ d'une particule entre les deux positions $x(t_0)$ et $x(t_1)$ est un chemin minimal pour la quantité (appelée *action*) :

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)). \quad (3.44)$$

Lorsque la particule évolue dans un champ de potentiels U , le Lagrangien s'exprime sous la forme :

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m g_{|x}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) - U(x). \quad (3.45)$$

Les équations différentielles qui décrivent le mouvement de la particule sont obtenues comme les équations d'Euler-Lagrange associées à l'action (3.44) (voir l'annexe A.2 pour plus de détails) :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{\partial U}{\partial x^k}, \quad (3.46)$$

où les Γ_{ij}^k représentent là encore les symboles de Christoffel. Écrites sous la forme ci-dessus, les équations du mouvement peuvent prendre en compte des forces non conservatives. En notant \mathbf{F} la somme des forces (conservatives ou non) appliquées, la trajectoire de la particule vérifie :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = \sum F^k. \quad (3.47)$$

En comparaison avec les équations de Newton, cette description fait donc apparaître un terme additionnel qui prend en compte la métrique.

Utilisation pratique

Calculer le mouvement des sommets du modèle déformable nécessite théoriquement de calculer chacun des coefficients Γ_{ij}^k en chaque sommet (la notation masque le fait que les Γ_{ij}^k dépendent de la position dans la variété). Connaissant les coefficients de la matrice représentative de la métrique dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, les valeurs des symboles de Christoffel se calculent facilement à l'aide d'une discrétisation de type différences finies.

En pratique cependant le terme correctif de (3.47) n'a pas d'influence significative sur le comportement du modèle. D'une part, l'objectif visé n'est pas la simulation réaliste du mouvement des sommets : on ne recherche que la position d'équilibre du modèle dont on vérifie qu'elle n'est pas modifiée par le changement de la métrique. D'autre part, pour dissiper l'énergie du modèle, il est très fréquent d'utiliser une force de frottement fluide de la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}} = -\gamma \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.48)$$

Pour des vitesses faibles le terme correctif, du second ordre en $\dot{\mathbf{x}}$, devient négligeable devant cette force et peut donc être ignoré. Avec cette approximation le mouvement est bien entendu décrit par les équations de Newton et les temps de calcul des symboles de Christoffel sont supprimés.

3.4.2 Adaptation des forces

Motivations

Le remplacement de la métrique euclidienne par une métrique riemannienne modifie non seulement les équations du mouvement, mais impose également de revoir les définitions des forces qui s'appliquent sur les sommets du modèle.

En effet, la longueur (euclidienne) des arêtes et par conséquent la métrique exercent une influence directe sur l'intensité des forces internes car ces dernières sont calculées à partir de la géométrie du modèle. Au contraire, les forces externes sont définies indépendamment de la surface déformable et la métrique n'est donc pas prise en compte dans leur estimation. Si les définitions des forces ne sont pas revues, les forces de régularisation dominent les autres dans les zones où les arêtes sont de grandes tailles. Elles deviennent au contraire négligeables dans les régions où la métrique dilate considérablement les distances. En plus d'être difficile à maîtriser pour un utilisateur, ce comportement est mal adapté aux tâches de segmentation et reconstruction qui nous occupent. En effet, lorsque le modèle déformable évolue loin des structures d'intérêt, la régularité de sa forme ne revêt pas d'importance réelle : seule compte la vitesse avec laquelle les sommets sont poussés vers les frontières à reconstruire. À l'inverse, c'est au voisinage des structures pertinentes de l'image, lorsque le modèle approche sa position d'équilibre, que le lissage de la surface prend son importance. Les définitions des forces doivent donc être adaptées de sorte que leur équilibrage reste indépendant de la métrique.

Plus précisément, on s'intéresse à deux objets dont le second est l'image du premier par une homothétie de rapport $1/\sqrt{\mu}$. On suppose que le premier objet est placé dans une zone de l'espace où la métrique est euclidienne et que le second est situé dans une région où la métrique dilate les distances d'un facteur $\sqrt{\mu}$ dans toutes les directions (dans ce voisinage la métrique est donc donnée par $\mu \times Id$, où Id désigne la matrice identité). Les définitions des forces appliquées au modèle sont adaptées de sorte que les reconstructions respectives des deux objets soient homothétiques, dans un rapport identique à celui des objets d'intérêt.

Pour parvenir à ce résultat, deux solutions sont envisageables. La première consiste à éliminer la dépendance des forces internes par rapport à la longueur des arêtes. La définition des forces externes peut alors être laissée inchangée et les forces sont donc définies à une même échelle sur tout le domaine de l'image. L'autre alternative suit la démarche inverse : la dépendance des forces internes par rapport à la métrique est conservée (les forces sont toutefois reformulées pour prendre en compte la nouvelle notion de distance), et les forces externes sont adaptées localement de sorte que l'équilibrage soit globalement conservé. Nous utiliserons la seconde approche car, en comparaison avec la première, elle augmente légèrement la stabilité du modèle.

Les paragraphes qui suivent précisent et justifient les choix effectués pour les nouvelles définitions des forces. Dans un premier temps les forces de régularisation sont reformulées dans le contexte riemannien. L'étude de leur comportement en fonction des variations de la métrique permet alors de définir les forces externes de sorte que les importances relatives

des différentes forces soient toujours conservées. Enfin, le cas particulier de la force de friction est présenté dans un paragraphe séparé et le choix effectué pour sa définition est justifié dans des cas élémentaires.

Le dernier paragraphe de la section montre que l'adaptation locale des forces accroît légèrement la stabilité de la méthode d'intégration, en comparaison avec l'approche qui consisterait à décorréler l'intensité de forces de la métrique.

Forces élastiques

Comme dans le cas euclidien, chaque arête (u, v) se comporte comme un ressort de longueur nulle au repos. Les forces élastiques sont donc dirigées le long des arêtes et ont une norme riemannienne proportionnelle à la longueur de l'arête :

$$\mathbf{F}_{\text{élastique}} = \sum_{v \in \mathcal{N}(u)} L_R(u, v) \frac{\mathbf{uv}}{\|\mathbf{uv}\|_R}. \quad (3.49)$$

Dans le contexte riemannien, la définition de la force rigide est également similaire à celle proposée par Lachaud et Montanvert [35]. Chaque sommet u est soumis à une force qui l'attire vers le barycentre b de ses voisins, avec une intensité proportionnelle à la distance riemannienne de u à b :

$$\mathbf{F}_{\text{rigide}} = d_R(u, b) \frac{\mathbf{ub}}{\|\mathbf{ub}\|_R}. \quad (3.50)$$

La force opposée est équitablement répartie entre tous les voisins de u . En pratique, la distance $d_R(u, b)$ est estimée comme la longueur riemannienne du segment de droite qui relie u à b .

Lorsque la métrique est supposée euclidienne ces deux forces retrouvent leur forme habituelle. Dans le cas contraire, leur intensité s'adapte localement en fonction des valeurs locales de la métrique. Pour le vérifier, on considère une arête (u, v) et son image (u', v') par une homothétie de rapport $1/\sqrt{\mu}$. On suppose que (u, v) est située dans une région où la métrique est euclidienne et qu'au voisinage de (u', v') la métrique multiplie les distances par $\sqrt{\mu}$. Sous ces hypothèses, on établit facilement les relations :

$$d_R(u', v') = d_R(u, v) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u'v'}\|_R = \|\mathbf{uv}\|_R \quad (3.51)$$

qui démontrent que les forces qui agissent sur u' et v' sont $\sqrt{\mu}$ fois plus faibles que celles auxquelles sont soumis les sommets u et v .

Forces externes

L'objectif est d'obtenir un équilibre des forces invariant lorsque les variations de la métrique et les changements d'échelle des objets se compensent exactement. Par parvenir à ce résultat, toutes les forces qui agissent sur le modèle doivent s'adapter de la même manière, c'est-à-dire être divisées par $\sqrt{\mu}$ lorsque la métrique multiplie les distances par $\sqrt{\mu}$.

Une solution consiste à remplacer chaque force $\mathbf{F}_{\text{ext}}^E$ définie indépendamment de la métrique par une force $\mathbf{F}_{\text{ext}}^R$ définie sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}^R = \frac{\|\mathbf{F}_{\text{ext}}^E\|_E}{\|\mathbf{F}_{\text{ext}}^E\|_R} \mathbf{F}_{\text{ext}}^E. \quad (3.52)$$

Force de friction

La force de friction utilisée pour dissiper l'énergie doit faire l'objet d'un cas particulier car son intensité dépend de la dynamique du modèle et donc des autres forces. En notant Δt le pas de discrétisation utilisé pour effectuer l'intégration des équations du mouvement, la définition choisie s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{friction}} = -\gamma \left(\frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{\Delta t} \right). \quad (3.53)$$

Comme le frottement s'annule lorsque le modèle se stabilise sur sa position d'équilibre, il ne peut pas influencer la forme finale de la surface déformable.

Avant la convergence, on vérifie que les proportions des différentes forces sont conservées, au moins pour les cas les plus simples. En effet, dans une région où la métrique peut être supposée constante, la position \mathbf{x} d'une particule de masse m soumise à un ensemble de forces constantes $\sum_k \mathbf{F}_k$ ainsi qu'à une force de frottement fluide $-\gamma \dot{\mathbf{x}}$ satisfait l'équation différentielle :

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma \dot{\mathbf{x}} = \sum_k \mathbf{F}_k, \quad (3.54)$$

Celle-ci s'intègre facilement et la vitesse de la particule peut s'écrire :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \dot{\mathbf{x}}(0) + \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \frac{1}{\gamma} \sum_k \mathbf{F}_k. \quad (3.55)$$

Par conséquent, une fois le dernier terme devenu négligeable, la vitesse de la particule se stabilise à une valeur proportionnelle à la force appliquée. Lorsque cette dernière est divisée par $\sqrt{\mu}$, la vitesse, donc la force de friction et sa discrétisation (3.53) le sont aussi, ce qui justifie la définition choisie.

Amélioration de la stabilité

En comparaison avec l'approche qui consisterait à supprimer simplement la dépendance des forces internes par rapport à la longueur des arêtes, cette solution présente l'avantage de rendre le système plus stable. En effet, si l'ensemble des forces est multiplié par une constante $\alpha = 1/\sqrt{\mu}$, l'équation d'évolution discrétisée en temps s'écrit, pour un modèle inertiel :

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}) + \frac{1}{m} (\sqrt{\alpha} \Delta t)^2 \sum_k \mathbf{F}_k. \quad (3.56)$$

Multiplier l'ensemble des forces qui s'appliquent sur un sommet par α est donc équivalent à multiplier le pas d'intégration Δt par $\sqrt{\alpha}$ pour ce sommet. Dans le cas d'un modèle sans

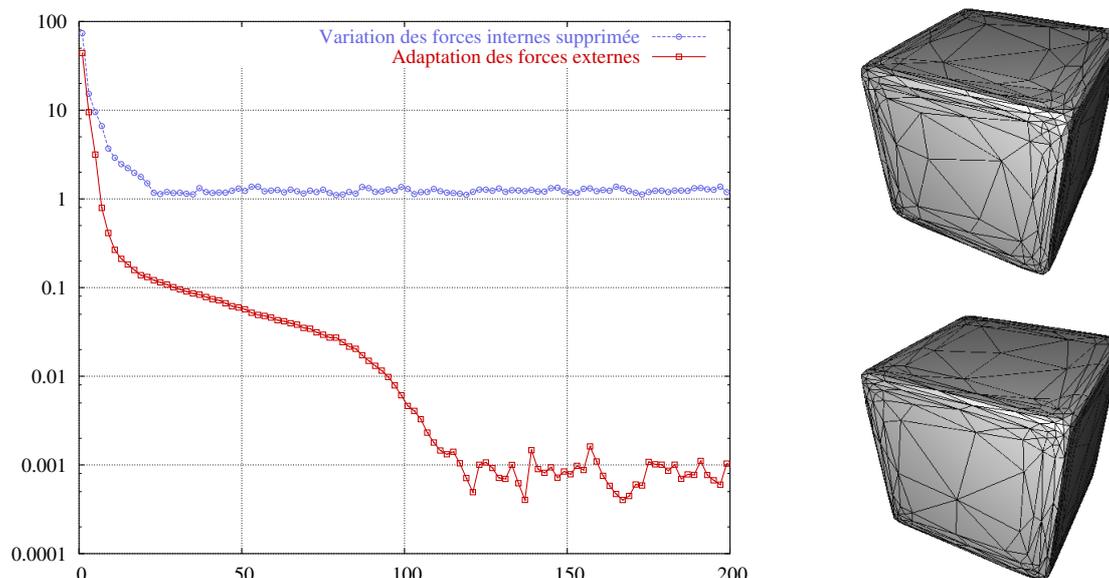


FIG. 3.10 – A gauche : énergie cinétique moyenne des sommets du modèle en fonction de l’itération pour la reconstruction d’un cube. La métrique est construite comme indiqué au chapitre 4. La courbe du haut correspond au cas où l’influence de la métrique est éliminée dans la définition des forces élastiques. La courbe du bas correspond au cas où la métrique est prise en compte pour déterminer les forces internes. A droite, en haut le résultat de la segmentation avec une suppression de l’adaptation des forces internes avec la taille des arêtes. A droite en bas le résultat (légèrement meilleur) lorsque les forces externes sont adaptées en fonction de la métrique.

inertie, on vérifie très facilement que le pas de temps est multiplié par α . Le choix effectué pour prendre en compte la métrique dans la définition des forces revient donc à utiliser pour chaque sommet un pas de temps adapté à sa position dans l’image, plus faible au voisinage des structures d’intérêt. Dans les zones où la métrique étend peu les distances, le pas de temps reste large. Dans les régions fortement dilatées par la métrique, c’est-à-dire au voisinage des structures d’intérêt de l’image, le pas de discrétisation est réduit ce qui améliore la stabilité du système. Cette propriété est illustrée à la figure 3.10 : une même image représentant un cube est segmentée avec des forces équilibrées dans les mêmes proportions. Dans un cas l’influence de la métrique sur le calcul des forces est éliminée. Dans l’autre, les forces sont calculées comme indiqué aux équations (3.49) à (3.53). Les courbes montrent que l’adaptation locale des forces internes conduit comme attendu à un système plus stable.

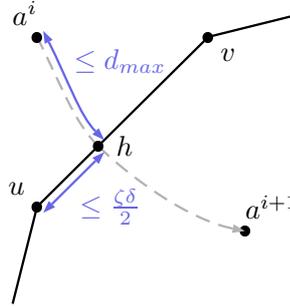


FIG. 3.11 – Détection des auto-collisions du modèle déformable. Le sommet a , qui effectue un déplacement de longueur inférieure à $2d_{\max}$ entre deux itérations ne peut pas traverser l'arête (u, v) , assimilée à un segment de droite, sans que, pour une itération au moins, l'une des deux contraintes $\frac{1}{2}\zeta\delta + d_{\max} \leq d_R(u, a)$ ou $\frac{1}{2}\zeta\delta + d_{\max} \leq d_R(v, a)$ ne soit rompue.

3.5 Tests de collisions et changements de topologie

Comme les collisions sont détectées par des mesures de distances, il convient de s'assurer que l'algorithme reste valide lorsque la métrique est remplacée. Comme les cas en deux et trois dimensions diffèrent légèrement ils sont traités séparément aux paragraphes qui suivent.

Une fois les collisions détectées, les reconfigurations de la maille décrites précédemment (voir Fig. 1.8) et qui ne dépendent pas de la métrique sont utilisées pour changer la topologie du modèle de manière appropriée. Comme ces transformations sont laissées inchangées elles ne sont pas décrites à nouveau ici.

3.5.1 Cas bidimensionnel

On considère une arête (u, v) du modèle déformable et un sommet mobile a . On suppose que le modèle satisfait la contrainte :

$$\delta \leq d_R(u, v) \leq \zeta\delta, \quad (3.57)$$

ce qui permet d'assimiler la géodésique entre u et v à une droite. On fait également l'hypothèse que la distance parcourue par a entre deux itérations est inférieure à une constante $2d_{\max}$.

On suppose alors que a traverse (u, v) entre les itérations i et $i+1$ et on note h l'intersection de la trajectoire de a avec (u, v) (voir Fig. 3.11). Il est alors clair que $d_R(a^i, h) \leq d_{\max}$ ou $d_R(a^{i+1}, h) \leq d_{\max}$. Sans perte de généralité on peut supposer que la première inégalité est satisfaite. De la même manière il est également clair que $d_R(u, h) \leq \frac{\zeta\delta}{2}$ ou $d_R(v, h) \leq \frac{\zeta\delta}{2}$. Toujours sans perte de généralité, on peut supposer que la première inégalité est satisfaite. L'inégalité triangulaire permet de conclure immédiatement que si a traverse (u, v) alors à

une itération

$$d_R(u, a) \leq \frac{\zeta\delta}{2} + d_{\max}. \quad (3.58)$$

La méthode de détection des auto-collisions employée dans le contexte euclidien reste donc valide dans le cas où l'espace est muni d'une métrique riemannienne. Elle consiste à rechercher tous les couples (u, a) de sommets non voisins sur la maille et pour lesquels :

$$d_R(u, a) \leq \frac{\zeta\delta}{2} + d_{\max}. \quad (3.59)$$

3.5.2 Cas tridimensionnel

On procède de manière similaire pour vérifier que l'algorithme fonctionne aussi en trois dimensions avec une métrique non euclidienne. On considère donc une face (u, v, w) du modèle dont on suppose que les sommets sont distants d'au plus $\zeta\delta$ l'un de l'autre. On s'intéresse alors à un sommet a qui parcourt une distance inférieure à $2d_{\max}$ entre deux itérations (voir Fig. 3.12). Comme au paragraphe précédent, on note h l'intersection de la trajectoire a avec la face (u, v, w) . De même que dans le cas à deux dimensions, l'une des deux inégalités $d(a^i, h) \leq d_{\max}$ ou $d(a^{i+1}, h) \leq d_{\max}$ est nécessairement satisfaite.

La majoration de la distance de h au plus proche des trois sommets u , v et w est plus difficile à obtenir. En toute rigueur, la meilleure borne possible est donnée par :

$$d(h, u) \leq \sup_{p \in T} \left(\min_{q \in \{u, v, w\}} d_R(p, q) \right), \quad (3.60)$$

où T désigne le triangle plein (u, v, w) . Comme cette quantité est difficilement calculable on utilise là encore une approximation locale.

Comme les longueurs des arêtes sont majorées par $\zeta\delta$, on fait l'hypothèse que la métrique peut être considérée comme localement uniforme, ce qui permet de se ramener au cas euclidien.

Dans \mathbb{R}^n muni d'une métrique euclidienne, le point m de la face situé à la plus grande distance des trois sommets u , v et w est l'intersection des médiatrices de (u, v) , (v, w) et (w, u) . On vérifie facilement que sa distance à l'un quelconque des trois sommets est donnée par $\frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}}$.

Pour transporter cette propriété dans \mathbb{R}^n muni d'une métrique euclidienne vers un ouvert U muni de la métrique G , on considère l'application linéaire A donnée par sa matrice $\text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, 1/\sqrt{\mu_3})$ dans la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des vecteurs propres de G . On vérifie facilement que cette transformation est une isométrie de \mathbb{R} muni de la métrique euclidienne dans U muni de G . À ce titre elle préserve les distances. La plus grande distance riemannienne d'un point de la face à l'un de ses sommets est donc donnée par $\frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}}$ ce qui justifie l'inégalité $d(h, u) \leq \frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}}$.

Comme en deux dimensions, l'inégalité triangulaire démontre que la recherche des auto-collisions du modèle se ramène à la recherche des couples (u, a) de sommets non voisins

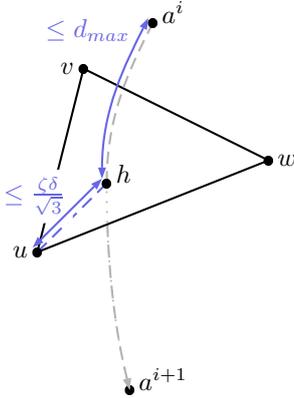


FIG. 3.12 – En trois dimensions, la détection des auto-collisions du modèle déformable fonctionne de manière identique au cas bidimensionnel. Le sommet a effectue un déplacement d’une longueur au plus d_{\max} entre deux itérations. Il ne peut pas traverser la face (u, v, w) sans entrer dans une boule de rayon $\frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}} + d_{\max}$ centrée en u , v ou w .

tels que :

$$d_R(u, a) \leq \frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}} + d_{\max}. \quad (3.61)$$

3.6 Résumé de l’algorithme

L’algorithme de segmentation/reconstruction est donc le même que celui du modèle original, avec toutefois une étape de précalcul supplémentaire (voir la figure 3.13). Au cours de cette étape, les structures pertinentes de l’image sont détectées et, pour chaque point de l’image, les valeurs et vecteurs propres de l’image sont choisis pour refléter les propriétés géométriques de ces structures (voir le chapitre 4).

Le modèle peut alors être initialisé. A chaque itération, les forces appliquées au modèle sont évaluées et accumulées pour chaque sommet individuellement. La discrétisation de l’équation différentielle qui régit leurs mouvement respectifs permet alors de déterminer la nouvelle position de chacun d’eux. Au cours de cette étape, les longueurs (riemanniennes) des déplacements des sommets sont mesurées. Si l’une d’entre elle s’avère supérieure au seuil d_{\max} choisi, alors le déplacement est réduit de sorte que sa longueur (riemannienne) soit ramenée à d_{\max} .

Lorsque les sommets ont été déplacés, il convient de rétablir les contraintes géométriques qui permettent de détecter les auto-intersections de la surface et de maintenir une topologie du modèle cohérente avec sa géométrie.

Il convient de noter ici que la méthode de résolution des changements de topologie peut rompre les contraintes sur la longueur des arêtes. Symétriquement la régularisation de la longueur des arêtes peut mettre en défaut les contraintes imposées aux sommets non voisins. Les deux procédures de régularisation et de mise à jour de la topologie sont donc invoqués plusieurs fois l’une après l’autre jusqu’à ce que toutes les contraintes soient satisfaites. Comme cela était déjà signalé par Lachaud [33], sur un plan théorique, aucun argument ne garantit *a priori* que cette méthode s’arrête. Toutefois, et même si cela ne constitue clairement pas une justification, il est en pratique presque impossible de mettre

en évidence des situations où cette méthode est mise en défaut. Dans l'hypothèse où cela se produirait, il reste possible de limiter le nombre d'itérations à une constante prédéfinie. Lorsque ce nombre est atteint, deux alternatives sont possibles :

- Passer outre, et faire évoluer la maille en espérant que le problème se résoudra de lui-même après que les points auront été déplacés à l'itération suivante.
- Demander à l'utilisateur de procéder manuellement à la reconfiguration de la maille.

Aucune de ces deux approches n'est réellement satisfaisante, mais comme cela a été dit, les cas où l'algorithme ne parvient pas à trouver la solution de lui-même sont pratiquement impossibles à construire.

Lorsque la régularisation de la maille est terminée et que la topologie du modèle est à jour, soit l'algorithme se termine si le modèle a atteint sa position d'équilibre, ou entame une nouvelle itération dans le cas contraire. Déterminer si la convergence est atteinte n'est pas un problème facile à résoudre. Toutefois, dans un grand nombre de cas, la vitesse moyenne des sommets ou de manière équivalente leur énergie cinétique (au sens euclidien) est un bon indicateur. Lorsque le nombre de sommets sur la maille est réduit, ou lorsque la proportion de sommets encore en mouvement est faible, ces quantités ne sont pas significatives. C'est par exemple le cas lorsque le modèle subit une inflation à l'intérieur de structures tubulaires. Dans cette situation, la convergence est mieux caractérisée par la stagnation du nombre de sommets.

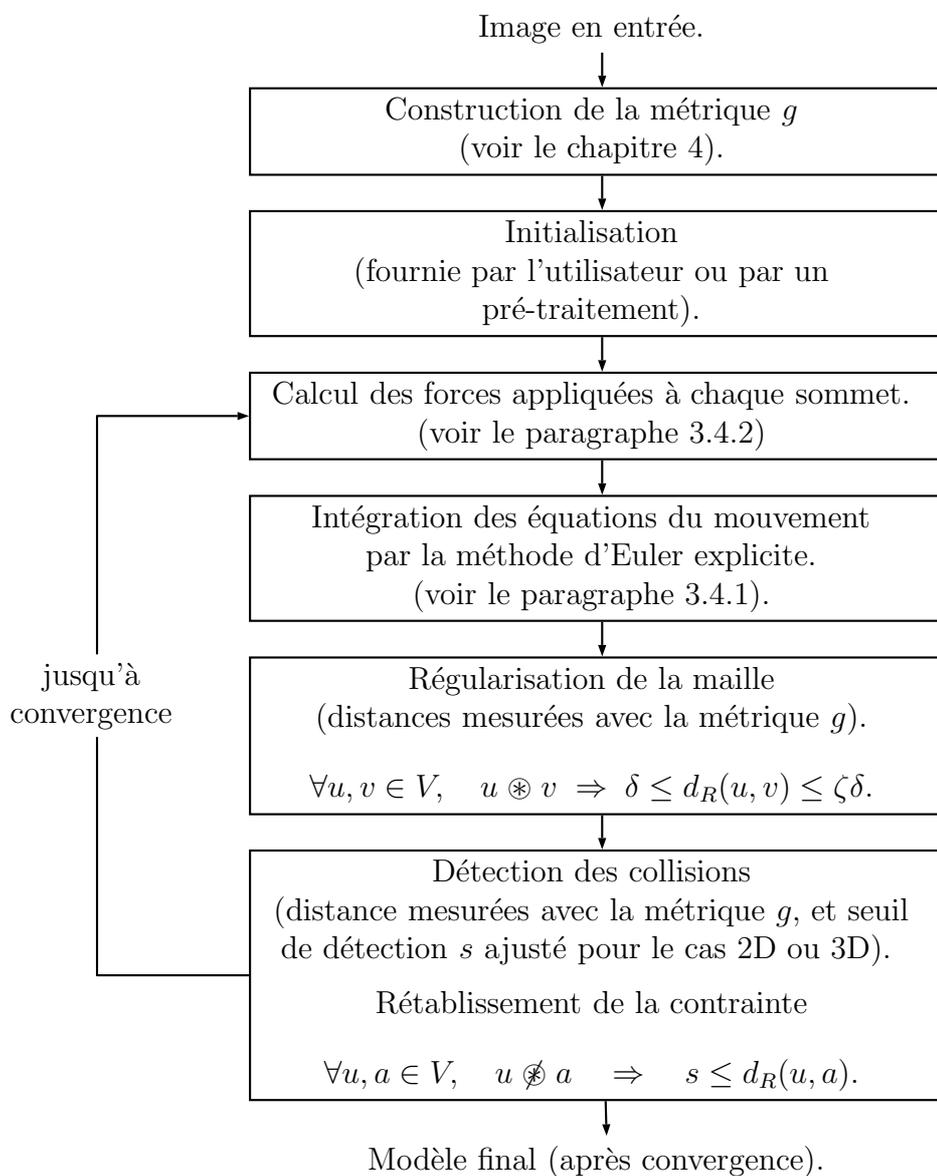


FIG. 3.13 – Résumé de l'algorithme de segmentation/reconstruction.

Chapitre 4

Construction des métriques

4.1 Motivations

Le chapitre précédent décrit comment un changement de métrique peut être exploité pour adapter localement la densité de sommets à la surface du modèle. Plus précisément, il montre que, dans un voisinage, le degré d'adaptation est déterminé conjointement par l'orientation de la maille déformable relativement aux sous-espaces propres locaux de la métrique et par les valeurs propres locales de la métrique.

S'il est possible de confier la construction de la métrique à un utilisateur, cette approche n'est pas satisfaisante. Elle impose en effet à l'opérateur de fournir pour chaque point de l'image un ensemble de directions et de valeurs propres et se révèle donc particulièrement fastidieuse, notamment dans le cas tridimensionnel où se posent, de plus, des problèmes de visualisation. Par ailleurs, une telle approche limite la reproductibilité de la reconstruction, et conduit à des résultats souvent sous-optimaux. Il est donc pertinent d'automatiser le procédé de construction des métriques.

Dans le cadre d'une application spécifique, un certain nombre de connaissances et d'hypothèses peuvent être prises en considération pour fabriquer des métriques adaptées au problème. Dans le cas général toutefois, seule la ou les images en entrée peuvent servir de support à leur construction. Ce chapitre élabore une technique de construction de la métrique en relation avec les caractéristiques géométriques des objets à reconstruire. Le paragraphe 4.2 décrit le comportement souhaité pour le modèle déformable et montre les implications qui en découlent sur la décomposition de la métrique en ses valeurs et vecteurs propres locaux.

La construction proposée requiert la connaissance des directions et courbures principales des frontières des objets à reconstruire. Le paragraphe 4.3 explique comment ces paramètres sont extraits directement de l'image en entrée : différentes approches tirées de la littérature y sont décrites, et un estimateur plus adapté au problème posé est proposé. Il est validé expérimentalement et comparés aux travaux existants au paragraphe 4.3.5.

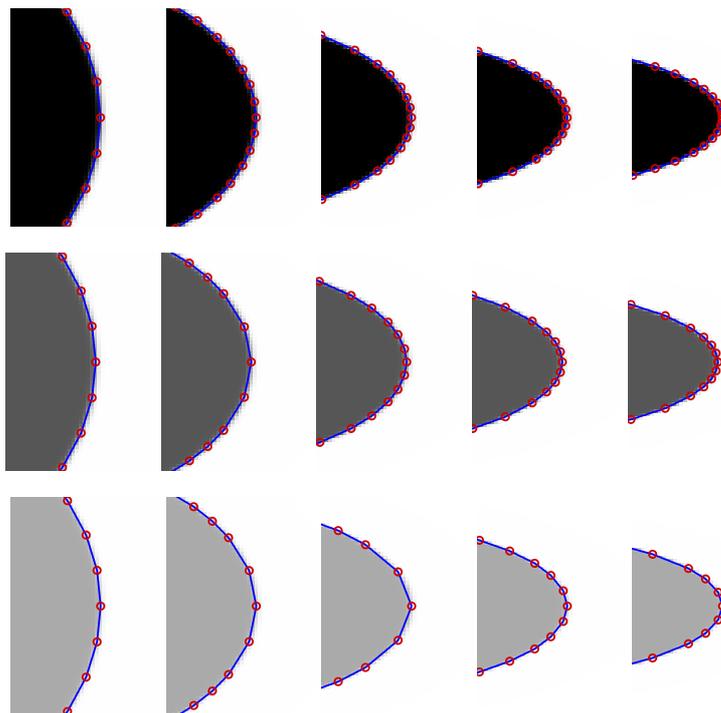


FIG. 4.1 – Adaptation de la densité de sommets sur la maille en fonction de la courbure et de l'intensité du contour détecté.

4.2 Comportement souhaité

Cette section ne décrit que la construction de métriques adaptées à la segmentation d'images tridimensionnelles. Des constructions similaires sont faciles à obtenir en deux dimensions avec la même démarche.

Les objectifs visés sont :

1. la réduction du nombre de sommets du modèle, tout en préservant ou même en améliorant la qualité du modèle géométrique issu de l'algorithme de reconstruction,
2. la réduction du nombre d'itérations requises pour que le modèle rejoigne sa position d'équilibre.

Pour obtenir ces deux propriétés, deux paramètres sont pris en compte : d'une part *la géométrie des objets* à reconstruire, d'autre part *la fiabilité de l'information fournie par l'image*.

La géométrie des objets à reconstruire est prise en compte pour optimiser l'échantillonnage de leurs frontières : les sommets sont accumulés dans les zones de forte courbure ce qui améliore la description des formes. A l'inverse, la densité de sommets dans les zones planes de la maille déformable peut être réduite sans que la qualité de la reconstruction soit significativement affectée. Dans le contexte de la segmentation d'images tridimensionnelles cette analyse peut être affinée. La résolution de l'échantillonnage de la surface déformable

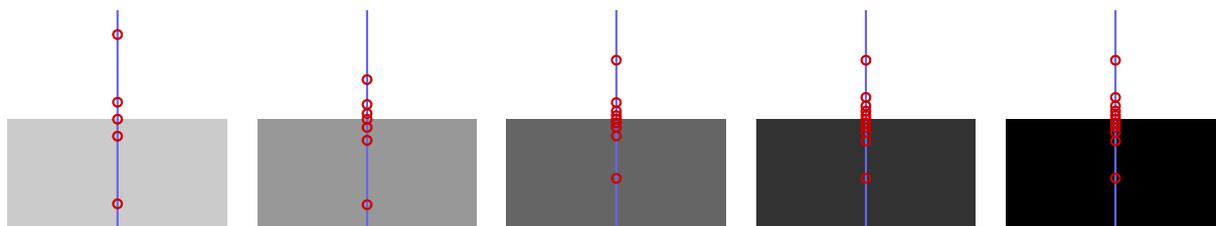


FIG. 4.2 – Adaptation de la densité de sommets sur un modèle sécant à un contour, en fonction de l'intensité du contour.

peut en effet être fixée indépendamment suivant deux directions orthogonales tangentes à la surface. Trois cas sont donc envisagés :

- Pour représenter avec précision une surface plane (dont les deux courbures principales sont faibles ou nulles) un échantillonnage grossier dans toutes les directions est suffisant.
- Une surface localement tubulaire (comme par exemple un cylindre de faible rayon ou l'arête d'un cube) est caractérisée par une forte courbure κ_1 dans une direction \mathbf{t}_1 et une courbure négligeable κ_2 dans la direction orthogonale \mathbf{t}_2 . L'échantillonnage doit donc être réduit dans la direction pointée par \mathbf{t}_2 et accru dans la direction indiquée par \mathbf{t}_1 .
- Enfin, au voisinage d'une structure en pointe (le coin d'un cube par exemple) les courbures sont importantes dans toutes les directions. L'échantillonnage doit donc être d'une grande finesse dans toutes les directions.

Bien entendu l'accroissement ou la réduction de la densité de sommets doit varier continûment lorsque les formes rencontrées sont intermédiaires entre les formes décrites ci-dessus.

En plus de la géométrie finale du modèle déformable, il est judicieux tenir compte de la fiabilité de l'information fournie par l'image. Au voisinage d'un contour fiable et fortement courbé, il est raisonnable d'augmenter significativement la densité de sommets sur la maille. Au contraire si le contour est incertain il est préférable de conserver une résolution moins importante. De cette manière la sensibilité du modèle au bruit est réduite.

Enfin, toutes les considérations énoncées jusqu'à présent ne tiennent compte que de la position finale du modèle. Il convient cependant de définir le comportement du modèle au cours de son évolution, et, là encore, trois cas doivent être envisagés :

- Lorsque le modèle évolue dans une zone de l'image dans laquelle ne se trouve aucune structure pertinente, il est préférable de réduire le plus possible le nombre de sommets sur la maille. De cette manière, le coût de chaque itération est réduit. En outre, comme aucune structure ne doit être reconstruite, il est raisonnable d'autoriser les sommets du modèle à effectuer des déplacements plus larges à chaque itération. Le nombre d'itérations requis pour que le modèle approche les structures d'intérêt est donc réduit.
- Au voisinage d'un contour, et indépendamment de la courbure de ce dernier, deux situations peuvent être rencontrées :
 - Si le modèle est correctement aligné avec le contour, on peut supposer qu'il est

	Pas de contour	Contour			
		Plan	Tubulaire		Pointu
			\mathbf{t}_2	\mathbf{t}_1	
Densité de sommets sur la maille déformable	réduite	réduite	réduite	élevée	élevée

TAB. 4.1 – Densité de sommets souhaité à l'équilibre du modèle suivant la géométrie de la structure reconstruite (\mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 désignent les directions propres du contour détecté). Dans le cas où le modèle intersecte le contour, la densité de sommets le long de l'intersection du modèle et du contour est donnée dans la table. Dans la direction du plan tangent au modèle orthogonale à son intersection avec le contour, la densité de sommets est forte si le contour est fort, faible sinon.

déjà dans sa position d'équilibre. La densité de ses sommets doit donc être adaptée comme décrit plus haut, en fonction des directions et des courbures principales de la structure détectée (voir Fig. 4.1).

- Au contraire, une configuration dans laquelle le modèle intersecte le contour (à angle droit dans le pire des cas), n'a que très peu de chances d'être la position optimale de la surface déformable. Augmenter localement la densité de sommets sur la maille offre au modèle un plus grand nombre de degrés de liberté, ce qui facilite sa mise en correspondance avec la structure à reconstruire. Ces situations sont illustrées à la figure 4.2.

Dans la suite, les vecteurs propres de la métrique sont notés $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Les trois valeurs propres associées sont notées μ_1, μ_2, μ_3 . L'intensité d'un contour est notée s . La normale unitaire (au sens euclidien) à un contour, assimilé localement à une surface plongée dans \mathbb{R}^3 , est notée \mathbf{n} . Ses directions principales sont représentées par deux vecteurs unitaires (toujours au sens euclidien) \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 et ses courbures dans ces deux directions sont notées respectivement κ_1 et κ_2 . En l'absence de contour à la position considérée dans l'image, \mathbf{n} , \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 désignent simplement trois vecteurs unitaires (encore au sens euclidien) deux à deux orthogonaux.

L'ensemble des considérations exposées au début de cette section et résumées dans la table 4.1 sont maintenant exploitées pour définir la métrique. Ces remarques montrent en particulier qu'en chaque point les directions propres de la métrique doivent être alignées avec les directions caractéristiques des structures sous-jacentes de l'image :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_1, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{t}_2. \quad (4.1)$$

L'idée d'accumuler les sommets du modèle déformable dans ses parties les plus courbées et très conforme à l'intuition. En revanche, il est beaucoup moins immédiat de définir un critère qui définisse la densité de sommets la plus appropriée pour représenter un objet de géométrie donnée. Aussi, bien que des choix plus sophistiqués restent envisageables, la méthode proposée ici impose une variation linéaire de la longueur des arêtes en fonction

à la fois de la courbure et de l'intensité des contours trouvés dans l'image. Pour prévenir l'apparition d'arêtes de dimensions déraisonnables, ces variations de longueur sont maintenues entre des bornes calculées à partir de l'image et de quantités s_{ref} et κ_{ref} choisies par l'utilisateur.

La quantité s_{ref} désigne l'intensité au dessus de laquelle un contour est supposé fiable (*i.e.* ne peut pas être une manifestation du bruit présent dans l'image). Les contours dont l'intensité est supérieure à s_{ref} sont tous traités de la même manière : la résolution du modèle à leur voisinage n'est donc fonction que de leurs courbures principales. Si cette constante peut être facilement sélectionnée par un utilisateur, il reste néanmoins envisageable de la calculer automatiquement. Par exemple, si s_{max} désigne l'intensité du contour le plus fort dans l'image, le choix $s_{\text{ref}} = 0.9 s_{\text{max}}$, bien qu'élémentaire, fournit des résultats satisfaisants.

La quantité κ_{ref} désigne la courbure détectée en dessous de laquelle la densité de sommets ne doit plus décroître. Intuitivement, la constante κ_{ref} détermine la vitesse à laquelle la densité de sommets du modèle décroît à mesure que la courbure d'un contour d'intensité constante diminue (voir Fig. 4.4, courbe de gauche).

Les valeurs propres de la métrique sont donc définies comme suit à partir des propriétés locales des structures de l'image :

1. La longueur euclidienne des arêtes est majorée par $\zeta\delta$. Les valeurs propres de la métrique sont donc minorées par 1.
2. Pour une courbure constante des composantes images, pour $s \leq s_{\text{ref}}$ et pour des positions relatives fixées de la maille déformable et de la structure à reconstruire, la densité de sommets, c'est-à-dire l'inverse de la longueur euclidienne des arêtes, croît linéairement avec s .
3. Pour $s \geq s_{\text{ref}}$ la densité de sommets est identique à la densité qui serait obtenue avec un contour de même géométrie mais d'intensité s_{ref} avec des positions relatives identiques de la maille et de la structure de l'image.
4. Pour un contour d'intensité constante et une maille alignée avec le contour, la densité de sommets dans une direction croît linéairement avec la courbure de la composante reconstruite dans cette direction.
5. Dans la direction orthogonale à la direction d'intersection, la densité de sommets sur une maille qui intersecte une structure de l'image est supérieure à la densité de sommets sur une maille alignée avec la même structure. Le long de l'intersection de la maille et du contour, la densité de sommets est la même que si la maille était entièrement alignée avec le contour.

Avec ces contraintes, on constate alors que les trois constantes δ , s_{ref} et κ_{ref} spécifient la longueur des arêtes dans toutes les configurations possibles (voir Fig. 4.3). Les valeurs propres de la métrique sont alors obtenues facilement en notant que pour une arête e alignée avec un vecteur propre \mathbf{v}_i de la métrique :

$$\mu_i \simeq \left(\frac{L_E(e)}{L_R(e)} \right)^2. \quad (4.2)$$

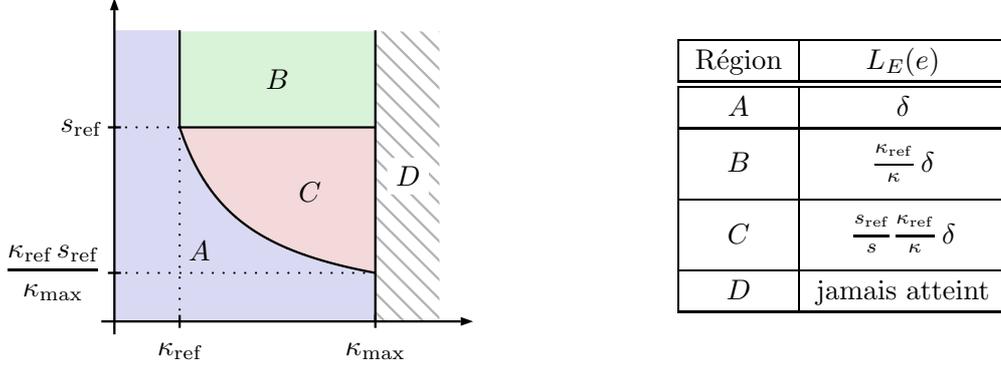


FIG. 4.3 – Longueur euclidienne des arêtes d’un modèle déformable aligné avec un contour de courbure κ et d’intensité s . La frontière entre les régions A et C correspond aux contours dont l’intensité et la courbure sont liées par la relation $\frac{\kappa_{\text{ref}}}{\kappa} = \frac{s}{s_{\text{ref}}}$.

Il en découle :

$$\mu_1 = \left[\frac{s^2}{s_{\text{ref}}^2} \frac{\kappa_{\text{max}}^2}{\kappa_{\text{ref}}^2} \right]_1^{\frac{\kappa_{\text{max}}^2}{\kappa_{\text{ref}}^2}} \quad \mu_2 = \left[\frac{\kappa_1^2}{\kappa_{\text{max}}^2} \mu_1 \right]_1^{\mu_1} \quad \text{et} \quad \mu_3 = \left[\frac{\kappa_2^2}{\kappa_{\text{max}}^2} \mu_1 \right]_1^{\mu_1}, \quad (4.3)$$

où la notation $[b]_a^c$ désigne a si $b \leq a$, b si $a \leq b \leq c$ ou enfin c si $c \leq b$.

La constante κ_{max} désigne la plus forte courbure détectable dans l’image. Elle est déterminée automatiquement à l’aide des estimateurs présentés au paragraphe 4.3. La prise en compte de cette quantité est requise pour garantir la condition 5. En développant les expressions de μ_2 et μ_3 on constate par ailleurs que κ_{max} est éliminée. Comme la densité de sommets sur une surface déformable alignée avec les contours de l’image est déterminée par μ_2 et μ_3 uniquement (et n’est pas influencée par μ_1), la constante κ_{max} ne joue un rôle que lorsque le modèle traverse un contour.

Connaissant la normale \mathbf{n} au contour, ses directions principales \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 , ses courbures principales κ_1 et κ_2 , et son intensité s , il est donc possible de calculer une métrique qui permet d’optimiser le nombre de sommets. La difficulté est alors de déterminer tous ces paramètres géométriques avant la segmentation, c’est-à-dire directement à partir de l’image. C’est l’objet des paragraphes qui suivent.

4.3 Géométrie des composantes images

4.3.1 Propriétés attendues

Comme cela est décrit au paragraphe 4.2 on souhaite obtenir au total six paramètres pour chaque point de l’image :

- la normale \mathbf{t} , et les directions propres \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 du contour,

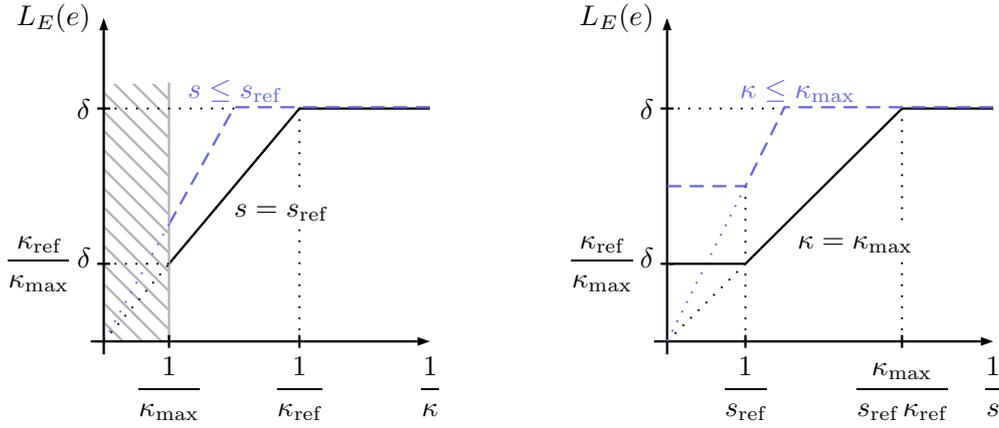


FIG. 4.4 – Longueur euclidienne des arêtes du modèle déformable en fonction de la courbure de la composante reconstruite (à gauche) et de l'intensité du contour (à droite). Les traits pleins correspondent à gauche à un contour fiable ($s \geq s_{\text{ref}}$), et à droite à un contour de courbure maximale ($\kappa \geq \kappa_{\text{max}}$). Les courbes en pointillés correspondent à des cas intermédiaires : $\kappa_{\text{ref}} \leq \kappa \leq \kappa_{\text{max}}$, et $0 \leq s \leq s_{\text{ref}}$. La partie hachurée du diagramme de gauche correspond à des configurations qui ne peuvent pas être atteintes, les courbures détectables dans l'image étant majorées par κ_{max} . Les courbes ne donnent que les bornes inférieures des longueurs. Les bornes supérieures sont simplement obtenues en multipliant par ζ .

- les courbures principales κ_1 et κ_2 du contour,
- l'intensité s du contour.

Dans le cas à deux dimensions, seuls trois paramètres doivent être calculés (la normale au contour, sa courbure et son intensité).

Dans le contexte qui nous intéresse, deux critères sont déterminants. L'objectif visé est la segmentation d'images biomédicales (scanner X, IRM, ...) potentiellement dégradées. Il est donc nécessaire que les estimateurs utilisés exhibent une robustesse suffisante vis-à-vis du bruit. D'autre part, la métrique doit être définie en tout point, c'est-à-dire non seulement au voisinage des contours, où les quantités géométriques recherchées ont une signification claire, mais aussi dans des zones sans information particulière. Les estimateurs doivent donc fournir des informations raisonnables, même à grande distances des structures pertinentes de l'image.

La détection des contours d'une image a fait l'objet d'un nombre important de travaux. Le plus souvent une approche différentielle est privilégiée, et l'intensité des contours est mesurée par la norme du gradient de la fonction image, et le vecteur gradient lui-même sert classiquement d'estimateur pour la normale au contour.

En revanche, peu de travaux s'intéressent à la recherche des directions principales et au calcul des courbures des structures directement à partir des images. Ces quantités sont en général calculées *a posteriori* sur des représentations géométriques des objets, plus faciles à manipuler. Les paragraphes 4.3.2 et 4.3.3 décrivent les deux seules approches de

la littérature dont nous avons connaissance. Comme aucune de ces méthodes ne satisfait les critères énoncés ci-dessus nous proposons une technique mieux adaptée à nos besoins au paragraphe 4.3.4.

4.3.2 Méthode dérivative

Une première approche [43] exprime la courbure des composantes images comme la courbure des lignes de niveau de l'image. En deux dimensions, cette quantité peut être exprimée sous la forme :

$$\kappa_{|(x,y)} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right)_{|(x,y)} = \frac{2 I_{xy} I_x I_y - I_x^2 I_{yy} - I_y^2 I_{xx}}{(I_x^2 + I_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.4)$$

où les dérivées partielles de la fonction image sont implicitement évaluées en (x, y) . La justification de cette formule est rappelée à l'annexe B.1, elle consiste principalement à calculer la dérivée suivant sa direction orthogonale du gradient normalisé. Les dérivées impliquées dans la quantité (4.4) peuvent être évaluées en chaque point de l'image par des convolutions avec un noyau gaussien g_σ et ses dérivées partielles en x et en y . Ces convolutions peuvent être réalisées efficacement sur l'intégralité de l'image sous la forme d'un produit dans le domaine de Fourier ou encore par filtrage récursif [23].

La même approche est possible en trois dimensions. Pour calculer les courbures et déterminer les directions principales, il convient de remarquer que pour tout vecteur tangent \mathbf{t} à l'ensemble de niveau de I au point p la courbure $\kappa_{\mathbf{t}|p}$ en p de l'ensemble de niveau $I(p)$ dans la direction de \mathbf{t} est donnée par :

$$\kappa_{\mathbf{t}|p} = {}^t\mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{t}} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \left(\frac{1}{\|\nabla I\|} \right) \Big|_p {}^t\mathbf{t} \times \nabla I|_p + \frac{{}^t\mathbf{t} \times \operatorname{Hess}(I)|_p \times \mathbf{t}}{\|\nabla I|_p\|}. \quad (4.5)$$

Les directions et les courbures principales de l'isosurface sont donc obtenues comme les vecteurs et valeurs propres de la restriction de $\operatorname{Hess}(I)$ au plan tangent à l'isosurface, c'est-à-dire au plan orthogonal à $\mathbf{n}|_p$.

Cette méthode présente deux inconvénients qui la rendent inutilisable pour l'application visée. Premièrement, cet opérateur ne reste stable que dans les zones où le gradient reste suffisamment élevé. Ailleurs, même avec un bruit faible, les imprécisions numériques rendent les résultats aléatoires. En second lieu, comme la plupart des procédés dérivatifs, cette approche s'avère particulièrement sensible au bruit. Si un lissage suffisamment fort pallie en partie le problème il présente l'inconvénient majeur de détruire les structures fines de l'image. En outre de part et d'autre des vallées et des crêtes de la fonction image, les gradients ont la même direction mais des orientations opposées. Le lissage a donc tendance à les annuler et à donc détruire l'information plutôt que la renforcer, ce qui rend l'estimateur inutilisable.

En conclusion, cet estimateur ne peut être utilisé que lorsque la fonction image I est exempte de bruit et lorsque la courbure est toujours calculée dans des zones où le gradient

ne s'annule pas. Avec des images réelles ces conditions sont rarement satisfaites et rend la méthode caduque. En revanche, elle est particulièrement bien adaptée à la mise en œuvre de contours actifs par ensembles de niveaux. Dans ce contexte en effet, la fonction implicite reste proche d'une carte de distance et possède donc les propriétés requises pour assurer la stabilité du calcul de la courbure [27].

4.3.3 Utilisation du tenseur de structure

Rieger et van Vliet [49] proposent une approche qui surmonte certaines des difficultés évoquées au paragraphe précédent. Leur approche est toujours dérivative, mais exploite une information plus fiable que le gradient. Cette information est obtenue par l'intermédiaire d'un outil classique en traitement d'images et connu sous le nom de *tenseur de structure*. Les deux paragraphes qui suivent décrivent en détail cet outil et comment il est utilisé pour obtenir une estimation des courbures et des directions principales des frontières des objets à reconstruire.

Tenseur de structure

Le *tenseur de structure* est une application qui associe une matrice symétrique et positive $J^{\rho,\sigma}$ de taille $n \times n$ à chaque point de l'espace image assimilé à \mathbb{R}^n . En chaque point, cette matrice est construite de sorte que ses directions propres s'alignent avec les structures locales de l'image. La représentativité de chaque direction propre dans les structures locales est mesurée par la valeur propre associée.

Plus formellement, on se donne un vecteur unitaire \mathbf{v} de \mathbb{R}^n . Pour mesurer l'alignement de \mathbf{v} avec les structures locales de l'image I au point p , on étudie la quantité :

$$Q_p^\sigma(\mathbf{v}) = (\nabla_\sigma I|_p \cdot \mathbf{v})^2, \quad (4.6)$$

où $\nabla_\sigma I$ représente le gradient de l'image lissée par un filtre gaussien d'écart type σ . Il est clair que cette quantité atteint son maximum $\|\nabla_\sigma I\|^2$ lorsque \mathbf{v} s'aligne avec $\nabla_\sigma I$ ou avec $-\nabla_\sigma I$. Le minimum 0 est atteint dans toutes les directions du plan orthogonal au vecteur gradient.

Pour explorer le comportement local du champ de gradients, on évalue la moyenne $Q^{\rho,\sigma}$ de Q^σ sur un voisinage autour de p :

$$Q_{|p}^{\rho,\sigma}(\mathbf{v}) = (g_\rho * Q^\sigma(\mathbf{v}))|_p. \quad (4.7)$$

La valeur de ρ détermine la taille du voisinage étudié.

Pour étudier les variations de $Q^{\rho,\sigma}$ lorsque \mathbf{v} parcourt l'ensemble des directions possibles, on réécrit (4.7) sous forme matricielle :

$$Q^{\rho,\sigma}(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v} \times \underbrace{\begin{pmatrix} g_\rho * (I_x^2) & g_\rho * (I_x I_y) & g_\rho * (I_x I_z) \\ g_\rho * (I_x I_y) & g_\rho * (I_y^2) & g_\rho * (I_y I_z) \\ g_\rho * (I_x I_z) & g_\rho * (I_y I_z) & g_\rho * (I_z^2) \end{pmatrix}}_{J^{\rho,\sigma}} \times \mathbf{v}, \quad (4.8)$$

où le lissage de I par un noyau gaussien g_σ et la dépendance en p sont omis pour alléger les notations. L'application $p \mapsto J_p^{\rho,\sigma}$ est appelée *tenseur de structure*.

Notons $\mathbf{w}_1(p), \dots, \mathbf{w}_n(p)$ les vecteurs propres de $J_p^{\rho,\sigma}$, et $\xi_1(p), \dots, \xi_n(p)$ les valeurs propres associées, dont on peut supposer sans perte de généralité qu'elles sont triées par ordre décroissant. Intuitivement, les valeurs propres de $J_p^{\rho,\sigma}$ estiment les contributions des vecteurs gradients de l'image, pris au voisinage de p le long des directions propres auxquelles elles sont respectivement associées (voir Fig. 4.5). Il est important de noter que les vecteurs propres ne portent qu'une notion de direction. Leur orientation et leur norme ne sont pas significative et ne correspondent qu'à des conventions.

Le vecteur propre \mathbf{w}_1 associé à la plus grande valeur propre indique la direction dans laquelle l'application $\mathbf{v} \mapsto Q_p^{\rho,\sigma}(\mathbf{v})$ atteint son maximum. D'après la définition de $Q_p^{\rho,\sigma}$ ce maximum correspond à la direction moyenne du vecteur gradient sur un voisinage de p de taille ρ . Dans une zone de l'image sans structure particulière, la norme du gradient est très faible ou nulle. Lorsqu'elle n'est pas nulle, la direction du gradient, donc du vecteur \mathbf{w}_1 , est déterminée par le bruit et n'apporte aucune information pertinente. On se place maintenant au voisinage d'un contour assimilé localement à une variété M de dimension $n - 1$ plongée dans \mathbb{R}^n (c'est-à-dire à une courbe plongée dans \mathbb{R}^2 ou à une surface plongée dans \mathbb{R}^3). Dans cette configuration, le vecteur gradient, et donc également le vecteur \mathbf{w}_1 sont alignés avec la normale à M . Par conséquent le sous-espace $\text{vec}(\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ engendré par les vecteurs $\mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ correspond donc à l'espace $T_p M$ tangent à M au point p considéré.

Dans le cas tridimensionnel, la restriction de $\mathbf{v} \mapsto Q_p^{\rho,\sigma}(\mathbf{v})$ à $\text{vec}(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ atteint son maximum ξ_2 pour $\mathbf{v} = \mathbf{w}_2$. Ce maximum correspond à la plus grande contribution des gradients de l'image dans l'espace orthogonal au gradient moyen dans le voisinage exploré. Le vecteur \mathbf{w}_2 indique donc la direction dans laquelle la direction du gradient (donc de la normale à M) varie le plus. En conséquence, \mathbf{w}_2 pointe dans la direction de plus forte courbure à la surface de M . A l'inverse, \mathbf{w}_3 pointe dans la direction de plus faible courbure. Globalement, \mathbf{w}_1 indique donc la normale au contour, et $(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ constitue une base du plan tangent au contour, alignée avec les directions principales de ce dernier. Les valeurs propres sont quant à elles liées à l'intensité du contour d'une part, et à ses courbures principales d'autre part. Ces relations sont explicitées au paragraphe 4.3.4 dans le cas d'un contour "idéal".

Estimation des courbures

Le tenseur de structure apporte une information plus fiable que le gradient de la fonction image. L'information est en effet accumulée sur un voisinage ce qui tempère l'influence du bruit. De plus, seule la direction du gradient est prise en compte : l'information d'orientation est supprimée. Aussi, plutôt que de se compenser, les informations portées par le gradient de part et d'autre des vallées et arêtes de la fonction image se renforcent mutuellement.

Rieger et van Vliet [49] exploitent cette information fiable pour déterminer la courbure des contours de l'image. Leur approche se compose de deux étapes :

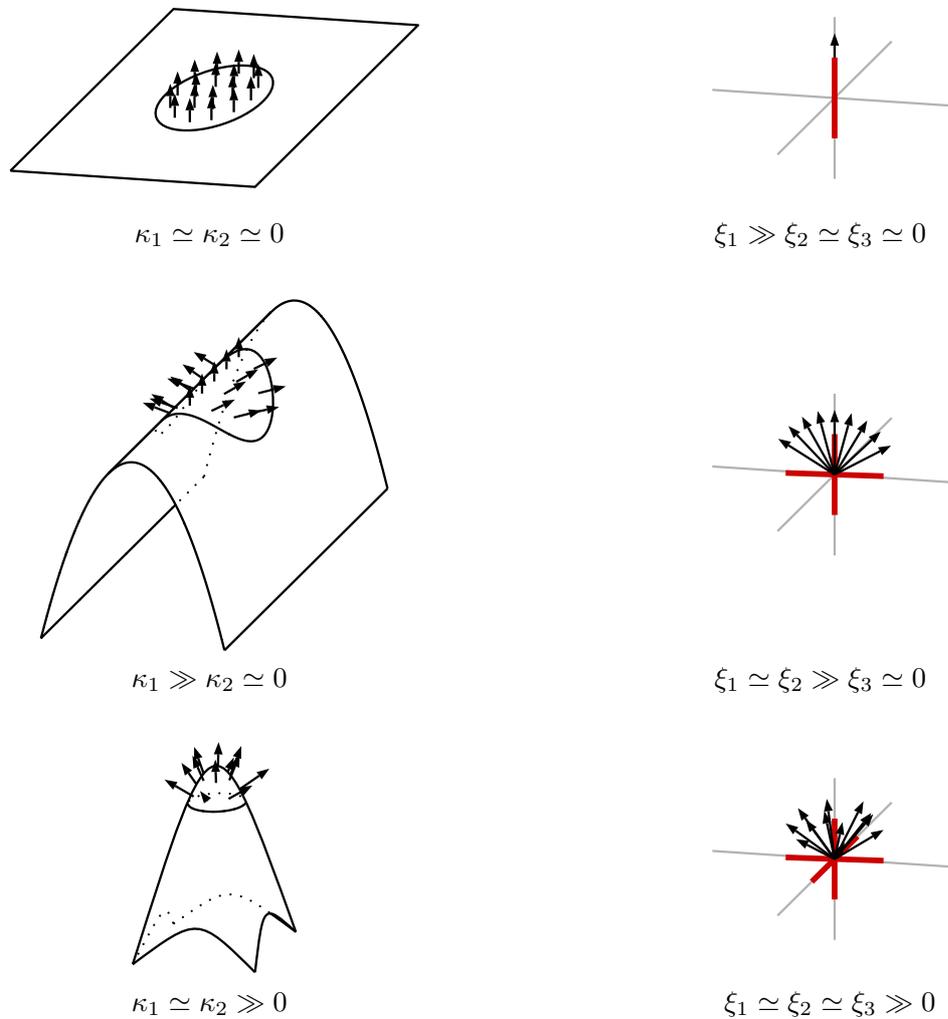


FIG. 4.5 – Vecteurs et valeurs propres du tenseur de structure en fonction de la géométrie d'un contour de l'image. Le premier vecteur propre indique la direction normale au contour, les deux derniers pointent dans les directions principales. En l'absence de direction principale, c'est-à-dire dans le cas où les courbures du contour sont les mêmes dans toutes les directions à partir du point considéré, les deux dernier vecteurs propres sont simplement orthogonaux dans le plan tangent au contour. Les deuxième et troisième valeurs propres mesurent les courbures principales du contour.

1. calculer le tenseur de structure pour obtenir en chaque point une estimation fiable et robuste des normales aux contours et de leurs directions principales,
2. estimer en chaque point les dérivées de la normale au contour (de la première valeur propre du tenseur de structure) dans chacune des directions principales (les deux dernières valeurs propres du tenseur de structure).

Le calcul des dérivées dans la deuxième étape n'est toutefois pas immédiat. En effet, la diagonalisation de $J^{\rho,\sigma}$ fournit un champ de vecteurs $p \mapsto \mathbf{w}_1(p)$ sur l'espace image. Chaque vecteur de ce champ possède la direction moyenne des gradients dans un voisinage mais rien n'est connu *a priori* sur son orientation. Le champ \mathbf{w}_1 peut contenir des discontinuités qui rendent impossible le calcul direct des dérivées de la normale.

Plutôt que d'évaluer directement la dérivée de \mathbf{w}_1 le long de \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_3 , les auteurs transforment le champ de vecteur à l'aide de l'application K définie par :

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto K(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \times {}^t\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'application $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connue sous le nom d'*application de Knutsson*. On peut montrer qu'elle satisfait les trois propriétés :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad K(\mathbf{v}) = K(-\mathbf{v}), \quad (4.10)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \|K(\mathbf{v})\| = f(\|\mathbf{v}\|), \quad (4.11)$$

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \left\| \frac{\partial K}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{v}} \right\| = \sqrt{2} \|\mathbf{w}\|. \quad (4.12)$$

La première propriété garantit que seule l'information de direction est conservée : les discontinuités qui pourraient apparaître dans la représentation vectorielle des directions sont donc supprimées. La seconde propriété assure l'invariance de l'application par rotation. La dernière propriété, démontrée à l'annexe B.2, permet de relier les dérivées de $p \mapsto K(\mathbf{w}_1|_p)$ aux dérivées du champ des normales idéal (*i.e.* sans discontinuité) $\mathbf{n} : p \mapsto \mathbf{n}|_p$ dans les directions \mathbf{w}_2 et \mathbf{w}_3 , et donc aux courbures principales κ_1 et κ_2 . Par exemple pour κ_1 :

$$\left\| \frac{\partial(K \circ \mathbf{w}_1)}{\partial \mathbf{w}_2|_p} \Big|_p \right\| = \left\| \frac{\partial(K \circ \mathbf{n})}{\partial \mathbf{w}_2|_p} \Big|_p \right\| = \left\| \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{w}_2} \Big|_p \right)} \Big|_{\mathbf{n}|_p} \right\| = \sqrt{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{w}_2|_p} \right\| = \sqrt{2} |\kappa_1|_p|. \quad (4.13)$$

Le calcul des dérivées de $K \circ \mathbf{w}_1$ est effectué simplement sous la forme de produits de convolution avec les dérivées partielles d'un noyau gaussien g_τ . Au total, l'estimateur de Rieger et van Vliet est donc paramétré par trois réels σ , ρ et τ qui désignent respectivement les écarts-type des noyaux gaussiens utilisés pour dériver la fonction image, intégrer l'information de gradient sur un voisinage, et estimer les dérivées du champ de normales.

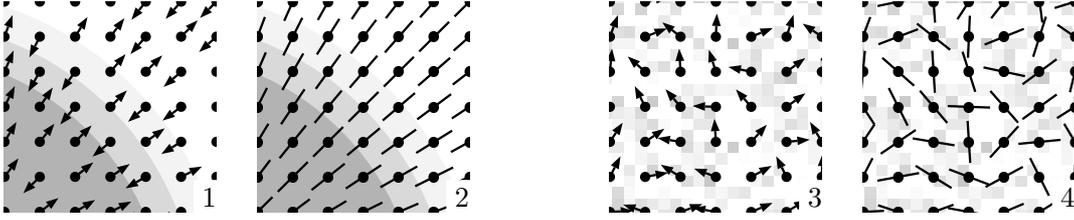


FIG. 4.6 – Au voisinage d’un contour (images 1 et 2), l’application de Knutsson élimine les discontinuités du champ de normales en éliminant l’information liée à l’orientation. Dans une zone sans information, la “normale” est déterminée par le bruit, et est donc aléatoire (image 3). Même sans prendre en compte l’orientation, les discontinuités subsistent (image 4).

L’utilisation du tenseur de structure a l’avantage de rendre l’estimateur beaucoup moins sensible au bruit que l’estimateur décrit au paragraphe précédent. Son comportement est par ailleurs amélioré au voisinage des vallées et des arêtes de la fonction image. En revanche, dans une zone sans structure significative, les directions propres du tenseur de structure sont déterminées uniquement par le bruit. Elles présentent donc des variations très rapides sans signification particulière. Même évaluées par l’intermédiaire de l’application de Knutsson, leurs dérivées sont donc instables (voir Fig. 4.6). En conséquence, bien que précis et robuste au voisinage d’un contour, cet estimateur n’est pas utilisable pour l’application qui nous intéresse.

4.3.4 Estimateur proposé

Comme dans l’approche de Rieger et van Vliet [49], la normale au contour et ses directions principales (dans le cas tridimensionnel) sont extraites directement du tenseur de structure (voir le paragraphe 4.3.3). Elles ne sont pas utilisées pour calculer les courbures principales mais sont nécessaires pour fabriquer la métrique (voir le paragraphe 4.2).

Plutôt que d’évaluer les courbures principales par dérivation, nous montrons qu’elles peuvent être déduites directement et simplement des valeurs propres du tenseur de structure. L’avantage est double : d’une part le calcul de la courbure est rendu plus stable dans les zones sans structure, et d’autre part les temps de calculs sont réduits.

On se donne un contour d’intensité s (uniforme le long du contour), tangent au plan (Ox, Oy) à l’origine et de directions principales (Ox) et (Oy) avec des courbures principales notées respectivement κ_1 et κ_2 . Ces hypothèses permettent d’obtenir un développement au second ordre de la fonction image.

La normale au contour à l’origine est donnée par ∇I . On en déduit immédiatement les trois identités :

$$I_x(0, 0, 0) = 0, \quad I_y(0, 0, 0) = 0, \quad I_z(0, 0, 0) = s. \quad (4.14)$$

D’après la définition classique d’un contour la dérivée de la norme du gradient dans sa

propre direction s'annule en tout point du contour :

$$\frac{\partial \|\nabla I\|}{\partial \nabla I} = \frac{I_{xz} I_x + I_{yz} I_y + I_{zz} I_z}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}} = 0. \quad (4.15)$$

A l'origine, et en tenant compte de (4.14) cela se réécrit :

$$I_{zz} = 0. \quad (4.16)$$

Pour calculer les dérivées partielles I_{xz} et I_{yz} on doit exploiter les hypothèses concernant la géométrie locale du contour :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}|_{(0,0,0)} = \kappa_1 \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial y}|_{(0,0,0)} = \kappa_2 \mathbf{k}, \end{cases} \quad (4.17)$$

où \mathbf{n} désigne la normale au contour et \mathbf{k} le vecteur unitaire de l'axe (Oz). Pour la composante en x par exemple cela se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\|\nabla I\|} \right) \nabla I + \frac{1}{\|\nabla I\|} \frac{\partial \nabla I}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\|\nabla I\|} \right) \nabla I + \frac{1}{s} \times \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{xz} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où les vecteurs sont exprimés dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Comme l'intensité du contour est supposée uniforme le premier terme s'annule. La première équation de (4.17) implique :

$$I_{xx} = 0, \quad I_{xy} = 0, \quad I_{xz} = s \kappa_1. \quad (4.18)$$

Un raisonnement identique dans la direction (Oy) conduit à :

$$I_{xy} = 0, \quad I_{yy} = 0, \quad I_{yz} = s \kappa_2. \quad (4.19)$$

On remplace alors chacune de ces dérivées partielles dans le développement de I au second ordre, pour finalement obtenir :

$$I(x, y, z) = I(0, 0, 0) + s z + \frac{1}{2} s \kappa_1 x^2 + \frac{1}{2} s \kappa_2 y^2 + o(x^2, y^2, z^2). \quad (4.20)$$

On évalue alors les valeurs propres du tenseur de structure calculé sur I à l'origine, et avec une taille de voisinage ρ suffisamment faible pour que l'approximation (4.20) soit valide. Pour des raisons de symétrie, les vecteurs propres du tenseur de structure sont les

vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Pour calculer les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs propres, il suffit donc de calculer, par exemple pour la valeur propre associée à la direction (Oz) :

$$\xi_1 \simeq \iiint_{\mathbb{R}^3} g_\rho(-u, -v, -w) I_z(u, v, w)^2 du dv dw, \quad (4.21)$$

avec

$$g_\rho(u, v, w) = \frac{1}{(2\pi\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2\rho^2}\right) \quad (4.22)$$

En terminant le calcul et en procédant de la même manière pour les autres directions, et en supposant $\kappa_1 \geq \kappa_2$, on obtient :

$$\xi_1 \simeq s^2, \quad \xi_2 \simeq \rho^2 s^2 \kappa_1^2, \quad \xi_3 \simeq \rho^2 s^2 \kappa_2^2. \quad (4.23)$$

Ces identités prouvent que les valeurs propres du tenseur de structure peuvent être utilisées pour déterminer l'intensité et les courbures principales (en valeur absolue) des contours de l'image. D'une part on a :

$$s = \sqrt{\xi_1}. \quad (4.24)$$

Un autre estimateur pour l'intensité des contours est par ailleurs obtenu en remarquant que la trace du tenseur de structure s'écrit $g_\rho * (I_x^2 + I_y^2 + I_z^2)$. Celle-ci s'interprète donc comme la moyenne quadratique de la norme du gradient sur un voisinage de taille ρ : un autre estimateur s' de l'intensité du gradient est donc donné par $s' = \sqrt{\text{Tr}(J^{\rho,\sigma})}$.

D'autre part il est immédiat de vérifier que

$$|\kappa_1| = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}}, \quad \text{et} \quad |\kappa_2| = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\xi_3}{\xi_1}}. \quad (4.25)$$

Des considérations identiques permettent d'obtenir un estimateur de courbure équivalent en deux dimensions :

$$|\kappa| = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}}. \quad (4.26)$$

Dans la pratique, il est nécessaire de garantir que les quantités (4.25) et (4.26) soient toujours définies. Comme cela a déjà été signalé, il est également souhaitable que l'estimateur s'annule en l'absence d'information image, c'est à dire quand $\xi_1 \simeq \xi_2 \simeq 0$. Toutes ces propriétés sont obtenues en modifiant légèrement les estimateurs (4.25) et (4.26). Dans le cas à deux dimensions par exemple :

$$|\kappa| \simeq \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1 + \epsilon}}, \quad (4.27)$$

où ϵ est une constante négligeable devant les valeurs de ξ_1 au voisinage des contours significatifs. On constate donc que, comme souhaité :

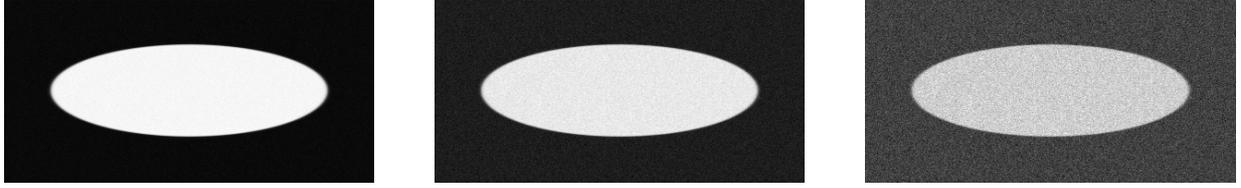


FIG. 4.7 – Images utilisées pour valider l’estimateur de courbure décrit au paragraphe 4.3.4. Les différents rapports signal sur bruit sont, de gauche à droite, 40dB, 30dB et 20dB. Les dimensions de l’ellipse et le plongement de l’image sont connus (pour les images ci-dessus les demi-axes des ellipses sont de longueurs 0.5 et 1.5 et les images sont de taille 400×200 , pour une taille “plongée” de 2×1). Il est facile d’en déduire la courbure en tout point de leur contour.

- au voisinage d’un contour fiable, l’estimateur (4.27) est équivalent à l’estimateur correspondant dans (4.25) ou (4.26).
- en l’absence de contour, l’estimateur (4.27) s’annule.

En pratique, le choix de la constante ϵ peut être laissé à l’utilisateur ou bien être effectué automatiquement, par exemple en prenant $\epsilon = \frac{1}{10} \xi_1^{\max}$ où ξ_1^{\max} désigne la plus grande valeur prise par la première valeur propre ξ_1 du tenseur de structure sur toute l’image.

4.3.5 Validation expérimentale

L’estimateur de courbure proposé au paragraphe 4.3.4 est testé en deux dimensions sur des images représentant des ellipses dont la courbure est connue en chaque point (voir Fig. 4.7).

Pour étudier l’influence du bruit les images sont dégradées par des bruit gaussien. La qualité de l’image est exprimée par l’intermédiaire du rapport signal sur bruit :

$$PSNR(\text{dB}) = 10 \log \left(\frac{I_{\max}^2}{\sigma^2} \right), \quad (4.28)$$

où I_{\max} représente la plus grande intensité de l’image et σ^2 la variance du bruit gaussien.

Validation et influence des paramètres

La figure 4.8 présente les performances de l’estimateur avec des paramètres σ et ρ bien adaptés à l’image en entrée. Comme le montre la courbe de droite, les erreurs les plus importantes sont commises pour des courbures faibles (rayon de courbure supérieur à une centaine de pixels). Pour des courbures plus élevées, l’erreur relative chute rapidement à des valeurs inférieure à 15%.

La forte surestimation obtenue pour des courbures faibles (voir Fig. 4.5) est principalement due au bruit. En effet, le tenseur calcule les contributions des gradients locaux suivant chaque direction. Les variations du gradient liées à la géométrie sont faibles et restent dominées par les fluctuations provoquées par le bruit. En conséquence, dans chacune

des contributions dans le plan orthogonal à la direction moyenne, il n'est pas possible de déterminer quelle part revient à la courbure des structures de l'image et quelle part est liée au bruit. Les valeurs propres du tenseur de structure ne sont donc pas représentatives de la géométrie du contour ce qui explique les résultats médiocres de l'estimateur. Pour des courbures plus importantes, ces fluctuations deviennent négligeables devant les variations liées à la géométrie, et l'estimateur retrouve le comportement attendu. Un lissage approprié de l'image atténue les variations du gradient dans le voisinage, et diminue donc la contribution du bruit dans les directions orthogonales à la direction moyenne du voisinage (voir Fig. 4.9, à gauche).

Des faibles valeurs du paramètre ρ correspondent à des voisinages d'intégration de tailles réduites et donc à de faibles nombres de pixels. L'échantillon des gradients pris en compte pour calculer la moyenne des directions et les contributions dans les directions transversales est donc restreint, ce qui explique la forte variabilité des estimations des courbures observée sur la courbe de droite de la figure 4.9. Des valeurs de ρ plus importantes agrandissent le voisinage exploré et atténuent la variabilité des estimations. Cependant pour des voisinages trop larges, l'approximation (4.20) n'est plus valide, et l'estimateur sous-estime les courbures.

Une borne raisonnable pour les courbures mesurables avec un rayon ρ donné semble être fournie par la relation :

$$\rho\kappa \leq 2, \quad (4.29)$$

ce qui revient à supposer que le rayon de courbure doit être au moins deux fois plus grand que le rayon du voisinage exploré par le tenseur de structure en un point.

Comparaison avec les travaux antérieurs

La même procédure est utilisée pour comparer notre estimateur (noté C dans la suite) à l'estimateur purement dérivatif décrit au paragraphe 4.3.2 (noté A dans la suite) et à l'estimateur de Rieger et van Vliet (noté B dans la suite).

Les courbes comparatives sont données à la figure 4.10. Elles montrent qu'avec un choix approprié de leurs paramètres, et au voisinage d'un contour unique et clairement marqué les trois estimateurs fournissent des résultats fiables et approximativement équivalents. Toutefois l'expérimentation sur l'image la plus bruitée (Fig. 4.10 en bas et à gauche) démontre que l'opérateur A est nettement plus sensible au bruit que les deux autres, même avec un fort lissage.

Les différences entre les trois estimateurs sont nettement plus visibles dans des zones où le gradient s'annule. Pour les mettre en évidence, les courbures sont estimées et comparées le long d'une droite qui traverse un contour de courbure connue et légèrement bruité ($PSNR = 40\text{dB}$). L'image utilisée est représentée à la figure 4.11). Les résultats des ces estimations sont tracés à la figure 4.12. Ils montrent clairement l'instabilité des estimateurs A et B lorsque le gradient s'annule.

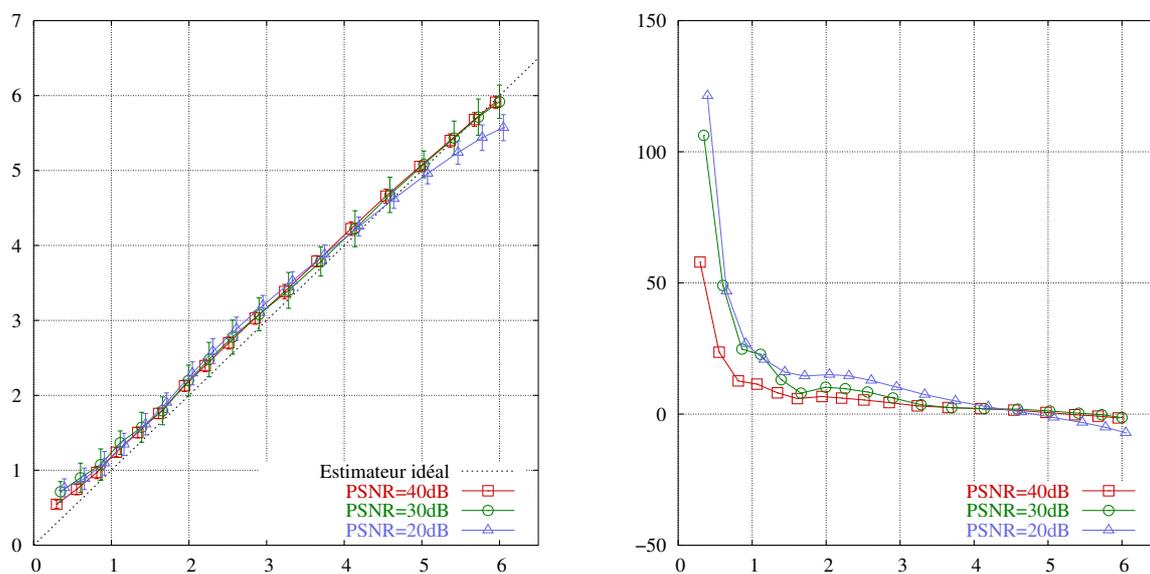


FIG. 4.8 – Gauche : moyenne et écart-type des courbures calculées avec l'estimateur du paragraphe 4.3.4 en fonction de la courbure réelle. Droite : pourcentage d'erreur. Les estimations sont réalisées sur les images présentées à la figure 4.7. Pour chaque niveau de bruit, les paramètres σ et ρ sont choisis pour donner les meilleurs résultats. Ils sont donnés en pixels dans le tableau ci-contre.

$PSNR$	σ	ρ
40dB	2	5
30dB	3	5
20dB	5	10

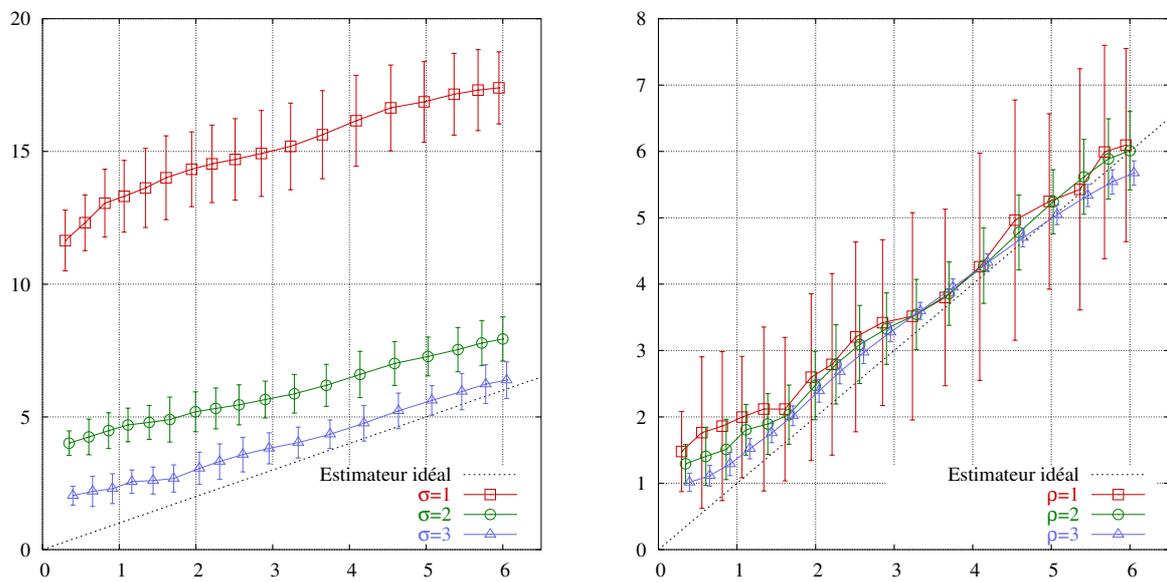


FIG. 4.9 – Les courbes représentent la courbure estimée avec différents choix des paramètres σ et ρ en fonction de la courbure réelle. Gauche : influence du paramètre σ (lissage), avec $\rho = 5$ et $PSNR = 20\text{dB}$. Droite : influence du paramètre ρ (taille du voisinage exploré par le tenseur de structure), avec $\sigma = 4$ et $PSNR = 20\text{dB}$.

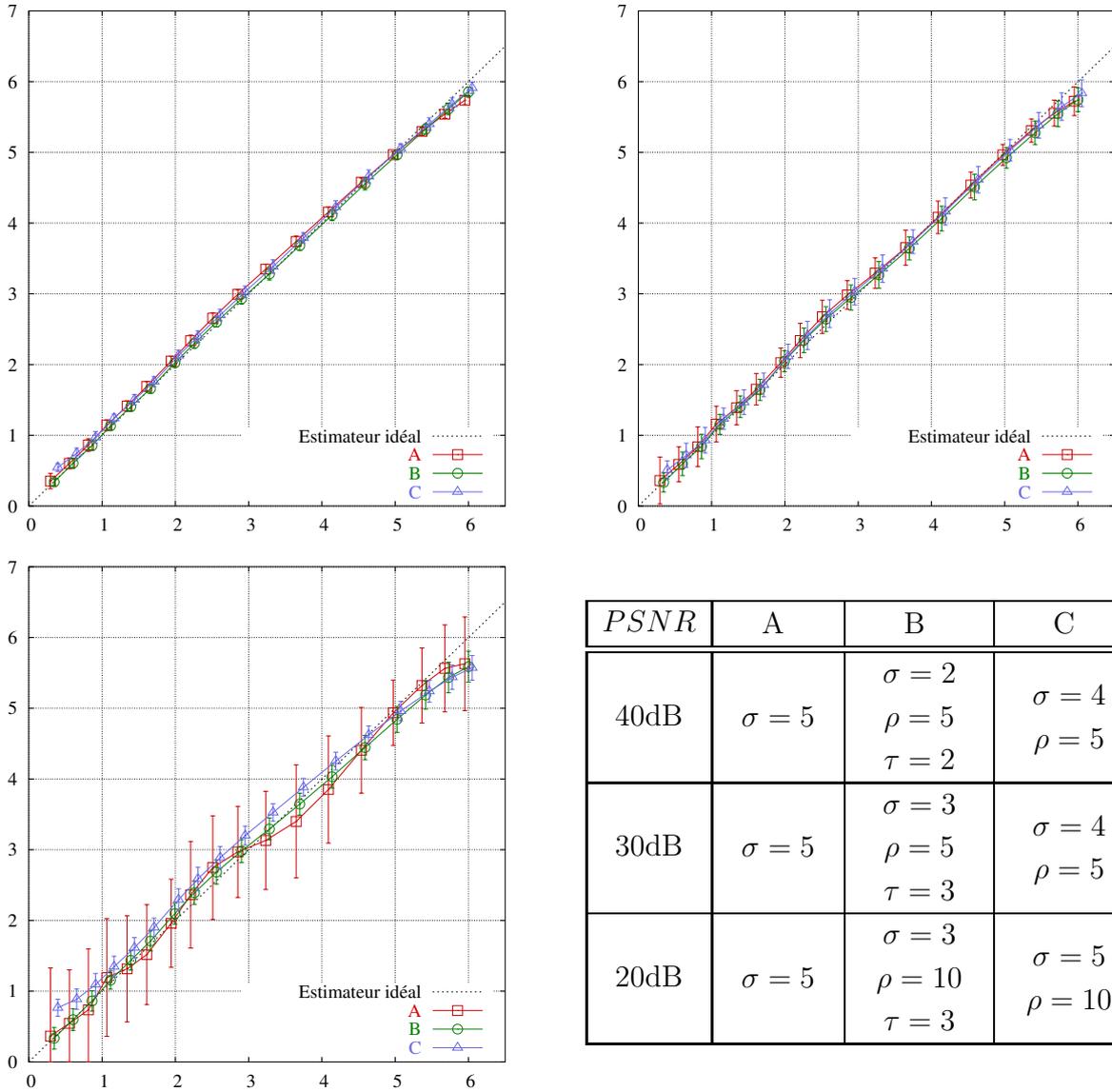


FIG. 4.10 – Comparaison des estimateurs de courbure le long des contours des ellipses dessinées à la figure 4.7. En haut à gauche : $PSNR = 40\text{dB}$. En haut à droite : $PSNR = 30\text{dB}$. En bas à gauche : $PSNR = 20\text{dB}$. En bas à droite les paramètres utilisés pour chaque estimateur (σ correspond au lissage associé à la première dérivation, ρ correspond à la taille du voisinage exploré par le tenseur de structure, et τ au lissage associé la seconde dérivation). A : estimateur dérivatif simple (paragraphe 4.3.2), B : estimateur de Rieger et van Vliet (paragraphe 4.3.3), C estimateur proposé au paragraphe 4.3.4.

FIG. 4.11 – Image utilisée pour tester les estimateurs de courbure dans des zones où le gradient s’annule. Le niveau de bruit dans l’image est caractérisé par $PSNR = 40\text{dB}$ et l’image est de 200×80 pixels pour une taille plongée de 2×0.8 . Les valeurs des différents estimateurs sont calculées le long de l’axe (voir Fig. 4.12).

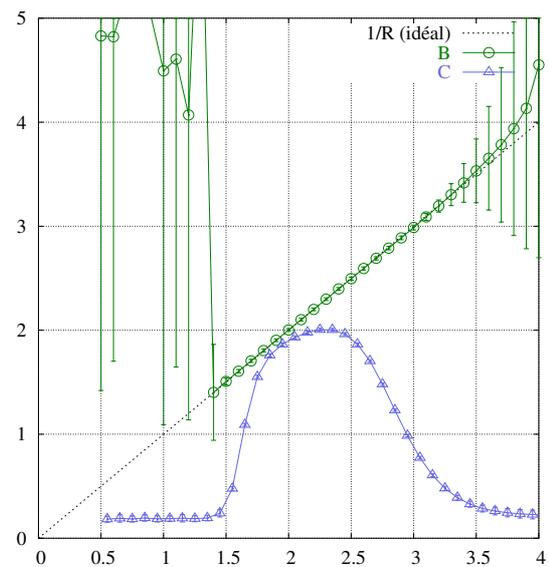
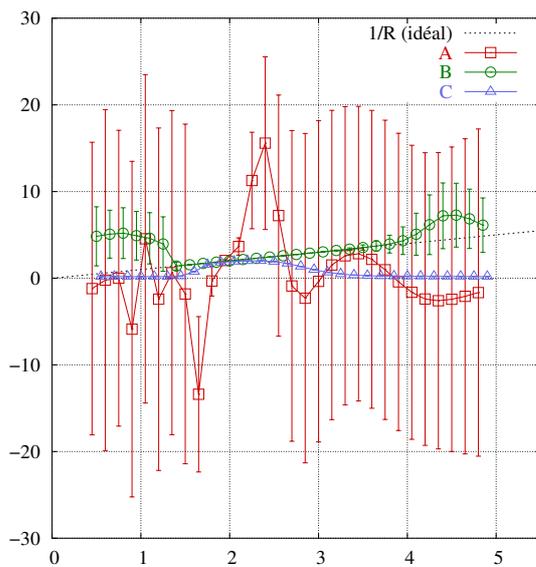
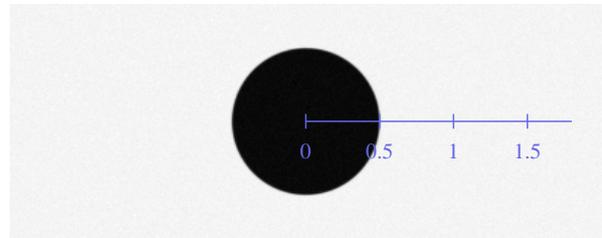


FIG. 4.12 – Comportement des estimateurs dans des zones sans contour. Les différents estimateurs sont évalués le long de l’axe tracé sur l’image de la figure 4.11. Les tracés représentent la moyenne et l’écart-type des courbures estimées en fonction de l’inverse de la distance à l’origine du point considéré (la position 0.5 du contour correspond donc à l’abscisse 2 sur les tracés). Gauche : l’ensemble des valeurs prises par les trois estimateurs. Droite : les valeurs prises au voisinage du contour, pour les opérateurs B et C , l’opérateur A étant clairement trop instable.

Chapitre 5

Expérimentations

5.1 Introduction - rappels

Ce chapitre valide le modèle déformable et le procédé de construction de la métrique décrits aux chapitres précédents. Tout d'abord, le paragraphe 5.2 apporte la vérification expérimentale que la longueur (euclidienne) des arêtes s'adapte comme prévu aux structures détectées dans l'image.

Ce comportement permet d'obtenir une invariance du résultat de la segmentation par rapport à la fréquence d'échantillonnage de l'image : une même structure sera reconstruite de la même manière indépendamment de la résolution de l'image (pourvu que cette résolution soit suffisante pour représenter précisément la structure étudiée). Cette propriété est illustrée au paragraphe 5.3.

Les temps de convergence du modèle déformable et la complexité du calcul de la métrique sont étudiés au paragraphe 5.4. Enfin différents exemples de segmentations et reconstructions d'images synthétiques et d'images biomédicales en deux et trois dimensions sont présentés aux paragraphes 5.5 et 5.6.

5.2 Variation de la résolution avec la courbure et l'intensité de contours

Ce paragraphe met en évidence l'adaptation de résolution en fonction de la courbure et de l'intensité de contours de l'image. Plus précisément, il montre que dans un intervalle déterminé par les deux constantes κ_{ref} et s_{ref} la longueur des arêtes varie comme indiqué à la figure 4.4 du chapitre précédent, c'est-à-dire :

- i. linéairement avec le rayon de courbure $1/\kappa$ des contours,
- ii. linéairement avec l'inverse $1/s$ de la fiabilité du contour.

Ces deux quantités s et κ sont évaluées à partir de l'image à l'aide des estimateurs proposés au chapitre 4.

On rappelle que la courbure de référence κ_{ref} correspond à la courbure pour laquelle la longueur des arêtes est maximale. En dessous de cette courbure, le contour est considéré comme plan et la longueur euclidienne des arêtes du modèle reste comprise entre δ et $\zeta\delta$.

On rappelle également que la valeur s_{ref} représente l'intensité au dessus de laquelle un contour est considéré comme fiable. Il est difficile d'estimer *a priori* la valeur la plus appropriée pour segmenter et reconstruire une image donnée. Elle dépend en effet de l'estimateur utilisé pour évaluer s , de ses paramètres (σ et ρ lorsqu'on utilise l'estimateur présenté en 4.3.4) et bien entendu aussi du contenu de l'image. Pour sélectionner une valeur appropriée, il est plus commode d'évaluer s pour chaque voxel de l'image. Le champ de valeurs peut alors être présenté à un expert qui détermine aisément le seuil le mieux adapté à la situation. Dans les cas les plus simples, un calcul automatique est envisageable, par exemple à partir de l'histogramme des valeurs de s dans l'image. Bien qu'élémentaire, le choix $s = 0.9 s_{\text{max}}$ fournit ainsi des résultats satisfaisants.

Une fois ajustés pour une image donnée, ces paramètres peuvent raisonnablement être conservés pour des images de nature similaire.

Pour vérifier que le comportement du modèle déformable est bien celui attendu, des images "idéales" sont générées pour représenter des objets de caractéristiques géométriques connues. Elles sont ensuite segmentées et reconstruites et les longueurs des arêtes sur la surface triangulée obtenue sont comparées aux valeurs théoriques données au chapitre 4.

5.2.1 Cas bidimensionnel

Les variations de la longueur des arêtes en fonction de la courbure des contours d'une part et de l'intensité des contours d'autre part sont étudiées en reconstruisant des images représentant des cercles de rayons connus avec des contours d'intensités connues (voir Fig. 5.1).

Les images utilisées sont toutes de taille 200×200 pixels, de taille plongée 2×2 et sont exemptes de bruit. Les paramètres utilisés pour le calcul du tenseur de structure sont $\sigma = 0.02$ (soit deux pixels) et $\rho = 0.03$ (soit trois pixels). La courbure est estimée en prenant $\epsilon = 0.1 \xi_1^{\text{max}}$ dans l'équation (4.27).

Dans le but d'éviter d'éventuels artefact liés à l'initialisation, un même disque est reconstruit plusieurs fois avec des positions de départ du modèle tirées aléatoirement (voir Fig. 5.2). Le modèle est défini au départ sous la forme

$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = y_0 + r(\theta) \sin(\theta) \end{cases}, \quad (5.1)$$

où x_0 , y_0 sont tirées aléatoirement au départ, et $r(\theta)$ est tiré indépendamment pour chaque θ de $\left\{0, \frac{2\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N}\right\}$.

La moyenne et l'écart-type de longueurs sur un jeu de cinquante essais sont représentés à la figures 5.3. Ces résultats démontrent que le comportement du modèle est conforme aux attentes formulées à la section 4.2 du chapitre précédent : la longueur des arêtes varie

linéairement avec l'inverse de la courbure du contour à intensité constante, et avec l'inverse de l'intensité du contour à courbure constante.

Pour étudier la variation de la longueur des arêtes avec la courbure, la métrique est construite avec les paramètres $\kappa_{\text{ref}} = 1.428 \simeq \frac{1}{0.7}$ (ce qui correspond à un rayon de courbure de 70 pixels) et $s_{\text{ref}} = s_{\text{max}} \simeq 3100$. Pour étudier l'influence de l'intensité du contour, les paramètres pour la construction de la métrique sont $\kappa_{\text{ref}} = 1.428$, et $s_{\text{ref}} = 1800$ (soit $1/s_{\text{ref}} = 5.55 \times 10^{-4}$). La courbure du contour est choisie égale à 5, ce qui correspond à un rayon de courbure de 0.2 unités, soit 20 pixels.

Dans les deux cas, le modèle déformable est paramétré avec $\delta = 0.05$ et $\zeta = 2.5$ et est soumis aux forces de régularisation et de frottement classiques, ainsi qu'à une force d'inflation/déflation qui pousse chaque sommet le long de la normale à la surface déformable vers l'isosurface qui correspond à la frontière des disques recherchés. Dans les deux cas également, la courbure maximale κ_{max} est estimée à partir de l'image. Elle n'a toutefois aucune importance sur les mesures puisque dans sa position d'équilibre le modèle ne traverse aucun contour (on rappelle que κ_{max} n'intervient que dans l'expression de la première valeur propre de la métrique et que cette valeur propre détermine la longueur des arêtes dont la direction est normale aux contours).

5.2.2 Cas tridimensionnel

Les expériences décrites au paragraphe précédent peuvent être reproduites en trois dimensions en reconstruisant des images qui échantillonnent des sphères de rayons connus représentées avec des contours des différentes intensités. Les images utilisées sont ici de taille $100 \times 100 \times 100$ pixels, et de taille plongée $2 \times 2 \times 2$. Les paramètres utilisés pour calculer le tenseur de structure sont $\sigma = 0.02$ (soit 1 voxel), et $\rho = 0.03$ (soit 1.5 voxels).

Les métriques sont calculées sur chacune des images traitées avec les mêmes paramètres qu'en deux dimensions. Lorsqu'on s'intéresse à l'influence de la courbure, $\kappa_{\text{ref}} = 1.428$, ce qui correspond à un rayon de courbure d'environ de 0.7 unités (soit 35 voxels), et $s_{\text{ref}} = s_{\text{max}} = 2700$ est déterminé à partir de l'image. Pour étudier l'influence de la fiabilité du contour, $\kappa_{\text{ref}} = 1.428$ conserve sa valeur. La courbure $\kappa = 5$ (ce qui correspond à un rayon de 0.2 unités, soit 10 voxels) de la sphère échantillonnée et l'intensité de confiance $s_{\text{ref}} = 1800$ sont choisis arbitrairement.

Les images sont segmentées et reconstruites avec le modèle déformable, toujours paramétré par $\delta = 0.05$ et $\zeta = 2.5$, et toujours soumis au même ensemble de forces. Comme dans le cas à deux dimensions, κ_{max} est déterminé à partir de l'image et n'a de toute manière aucune influence sur les longueurs des arêtes à l'équilibre de la surface déformable. Les résultats sont présentés aux figures 5.4 et 5.5 et démontrent que le modèle adopte bien le comportement attendu.

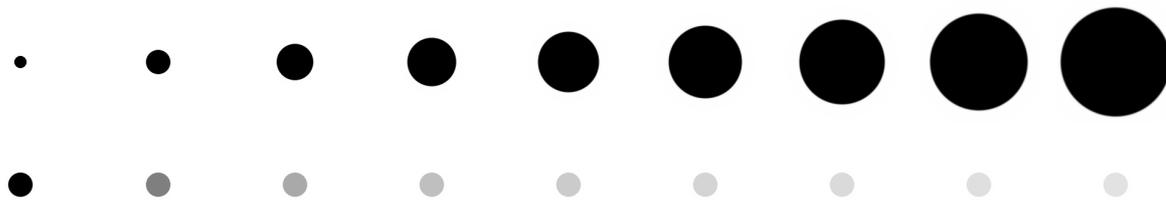


FIG. 5.1 – Disques de rayons connus avec des contours d'intensités connues, et dont les reconstructions sont utilisées pour étudier la variation de la longueur des arêtes en fonction de la courbure des composantes détectées et de la fiabilité de contours.

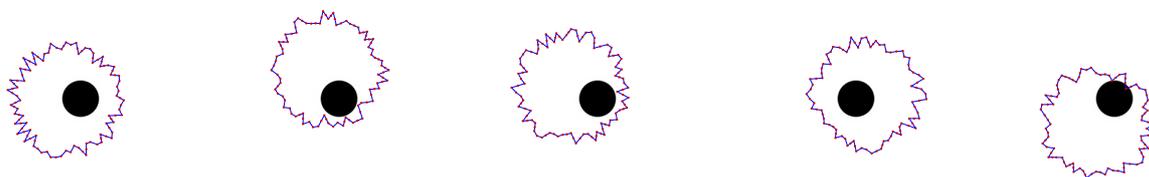


FIG. 5.2 – Exemples d'initialisations générées aléatoirement pour limiter les biais sur la longueur des arêtes liés à l'initialisation du modèle.

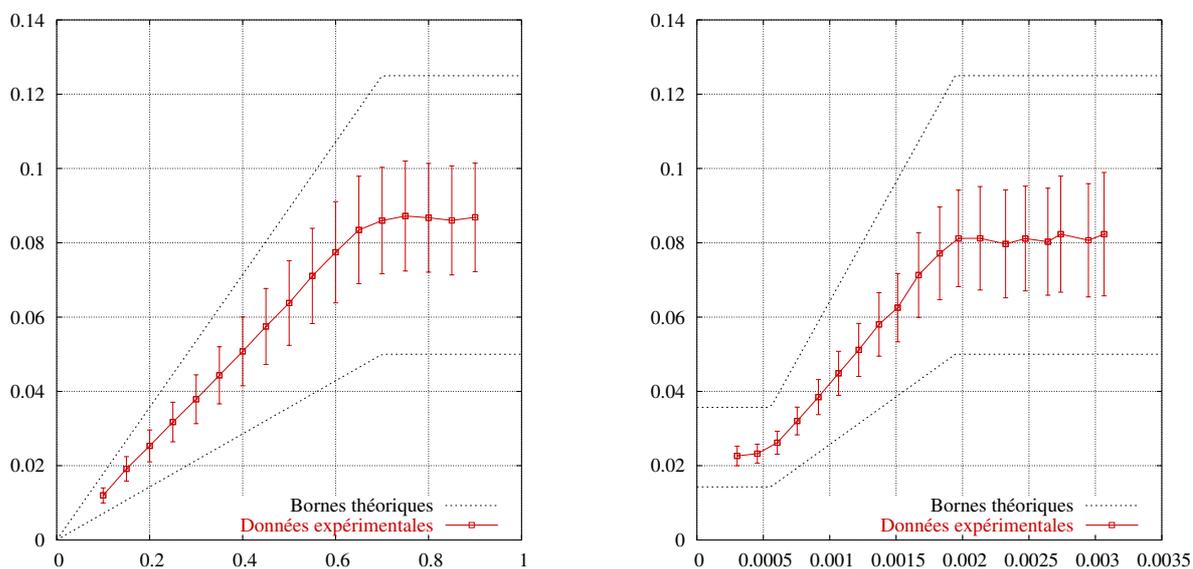


FIG. 5.3 – Moyenne et écart-type des longueurs des arêtes pour la version bidimensionnelle du modèle déformable en fonction du rayon de courbure $1/\kappa$ d'un contour fiable (à gauche) et de l'inverse $1/s$ de l'intensité d'un contour de courbure constante (à droite). Les courbes en pointillés représentent les bornes théoriques sur la longueur des arêtes (voir Fig. 4.4).

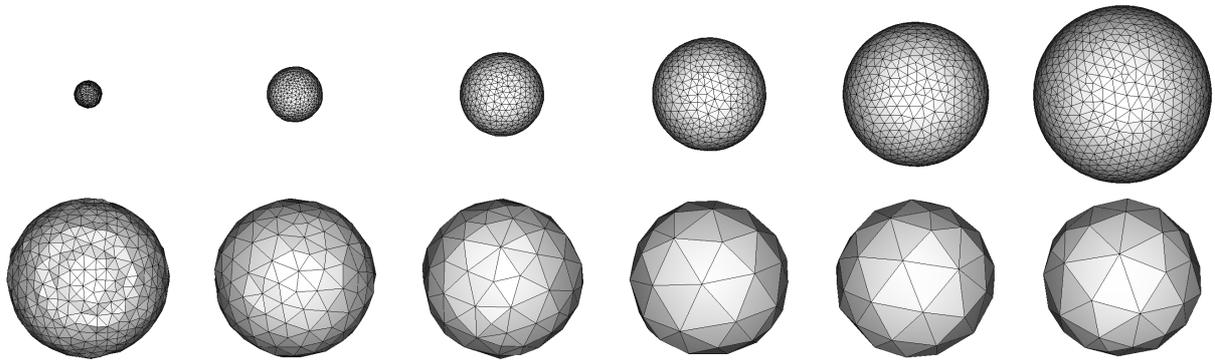


FIG. 5.4 – En haut : résultats de la segmentation de sphères de rayons connus représentées avec des contours fiables. La densité de la maille diminue à mesure que le rayon augmente. En bas : reconstruction de sphères de rayon fixé et connu (0.2 unités, soit 10 voxels) représentées avec des contours de fiabilité décroissante. La densité de sommets augmente avec la fiabilité du contour. L'apparence irrégulière du modèle de plus grande résolution est liée à la discrétisation grossière de la sphère dans l'image.

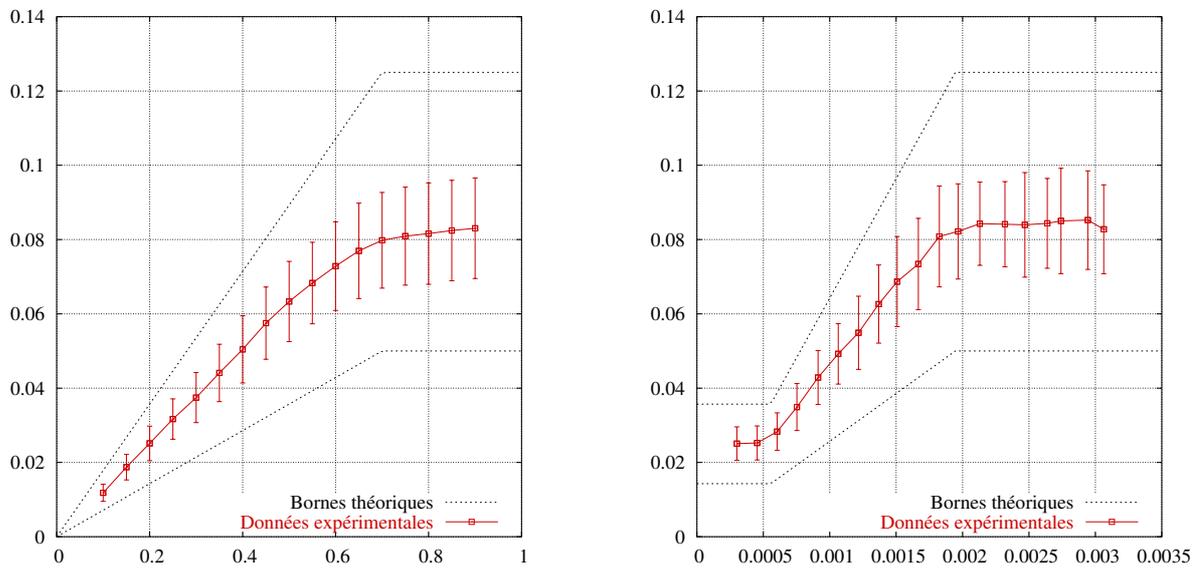


FIG. 5.5 – Moyenne et écart-type des longueurs des arêtes pour le modèle tridimensionnel en fonction du rayon de courbure $1/\kappa$ d'un contour fiable (à gauche) et de l'inverse $1/s$ de l'intensité d'un contour de courbure constante (à droite). Les courbes en pointillés représentent les bornes théoriques sur la longueur des arêtes (voir Fig. 4.4).

5.3 Indépendance vis-à-vis de la résolution de l'image

Dans la construction de la métrique, seules les grandeurs géométriques des objets sont prises en compte. Lors d'un rééchantillonnage suffisamment précis pour préserver les structures étudiées, les estimations de ces quantités sont laissées invariantes. Pour un rééchantillonnage trop grossier, les détails les plus fins disparaissent et se regroupent pour former des structures d'une plus grande échelle. Les estimateurs mesurent donc la courbure des objets les plus petits qui puissent être correctement représentés avec la fréquence d'échantillonnage choisie pour l'image. Avec la construction de la métrique proposée au chapitre 4, cela impose aux arêtes du modèle d'adapter leur taille en fonction de la géométrie des structures détectables dans l'image.

Si une même forme est représentée correctement dans deux images de résolutions différentes, les estimations de sa courbure (ses courbures principales) sont identiques, aux approximations numériques près. Il en résulte que, pour les deux images, la métrique et donc la longueur des arêtes du modèle déformable seront identiques.

Partant d'un échantillonnage grossier, les reconstructions d'un objet obtenues pour des images de résolutions croissantes ne varie donc que dans les zones où l'accroissement de la fréquence d'échantillonnage laisse apparaître des structures plus fines. Pour un choix particulier des paramètres utilisés pour construire la métrique et paramétrer le modèle, la densité de sommets sur la maille déformable s'adapte donc de manière à exploiter au mieux l'information présente dans l'image. Elle ne s'accroît que dans les zones où des structures nouvelles deviennent discernables. Ces propriétés sont illustrées aux figures 5.6 et 5.8.

5.4 Temps de calcul - comparaison entre adaptation locale et globale

Comme cela a déjà été signalé, les temps de calculs sont influencés de deux manières :

- D'une part, le nombre de sommets est réduit. En conséquence, le coût d'une itération est donc lui aussi réduit. En revanche, les coûts de certaines opérations sont accrus, du fait des calculs plus compliqués induits par l'utilisation d'une métrique riemannienne.
- D'autre part, les déplacements autorisés au cours d'une itération pour les sommets sont significativement allongés (au sens euclidien). Par conséquent, le modèle déformable trouve sa position d'équilibre après un nombre d'itérations réduit en comparaison avec le modèle euclidien.

Ces deux aspects sont étudiés aux deux paragraphes qui suivent, et l'extension proposée dans cette thèse est comparée au modèle déjà existant.

Par ailleurs, au temps requis pour la segmentation et la reconstruction proprement dites, s'ajoute bien sûr la durée nécessaire pour construire la métrique à partir de l'image. Le coût de ces précalcul est donné au dernier paragraphe de cette section.

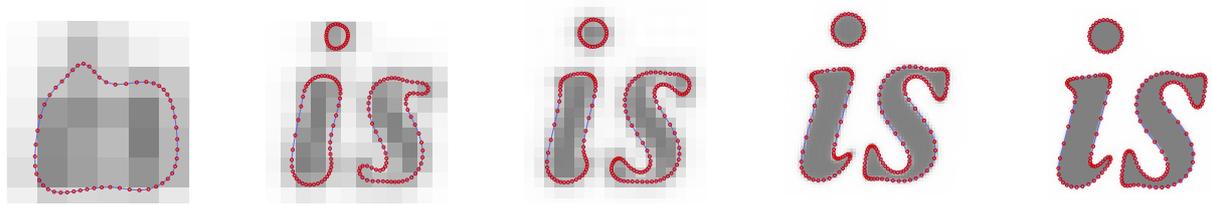


FIG. 5.6 – Illustration de l'invariance du modèle par changement de résolution de l'image à traiter. Les résolutions des images sont 10×10 , 20×20 , 30×30 , 100×100 et 400×400 , de gauche à droite et en pixels. Les paramètres utilisés pour construire la métrique et paramétrer le modèle sont les mêmes pour toutes les reconstructions.

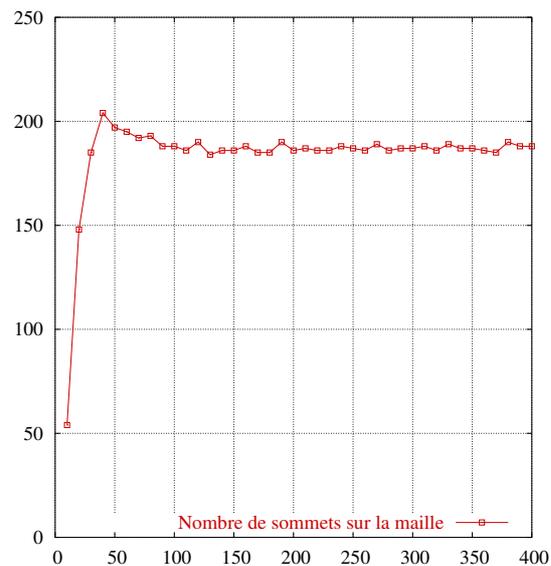


FIG. 5.7 – Évolution du nombre de sommets en fonction de la résolution de l'image (voir Fig. 5.6). Avec des fréquences d'échantillonnage suffisantes pour que toutes les structures de l'image soient correctement représentées, le nombre de sommets sur la courbe déformable est déterminé uniquement par la géométrie des objets.

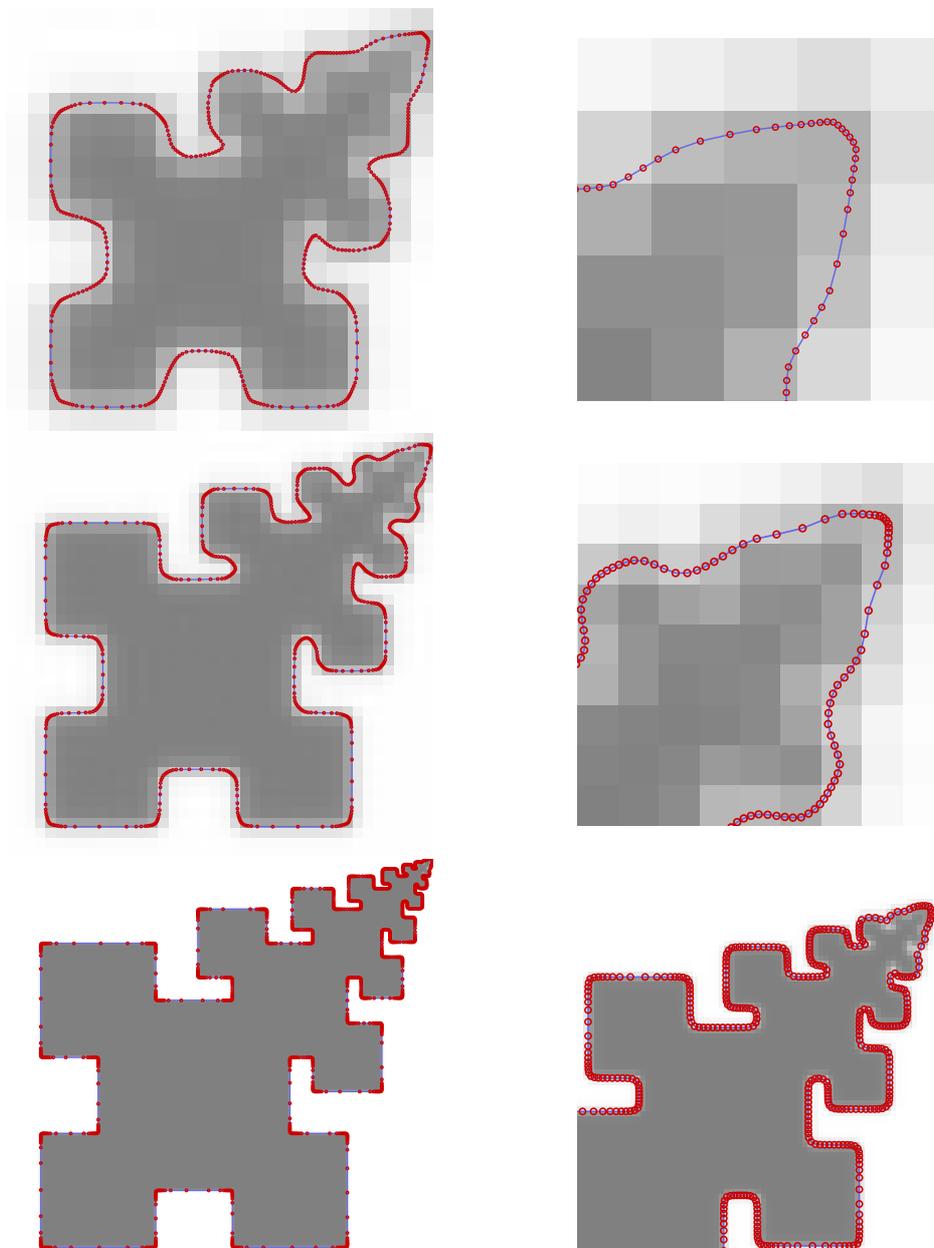


FIG. 5.8 – Comportement du modèle lorsque l'amélioration de l'échantillonnage révèle des détails plus fins : la densité de sommets sur la maille s'adapte pour représenter précisément les structures qui apparaissent tout en conservant la même résolution dans les zones laissées invariantes. Gauche : image entière. Droite : détails (partie en haut et à droite de l'objet). Résolutions des images utilisées, de haut en bas : 24×24 pixels, 50×50 pixels, 400×400 pixels. Les paramètres utilisés pour construire la métrique et paramétrer le modèle sont les mêmes pour toutes les reconstructions.

5.4.1 Coût par itération

Schématiquement, le coût d'une itération peut être interprété comme le produit du temps de calcul moyen requis pour traiter chaque sommet du modèle par le nombre de sommets à gérer. Bien entendu, le changement de métrique induit des calculs supplémentaires et donc un accroissement du temps de calcul pour chaque sommet pris individuellement. En contrepartie, lorsque la complexité géométrique des objets est raisonnable, cette approche réduit considérablement le nombre de sommets sur la maille, à convergence, mais également pendant l'évolution de la surface déformable. Les coûts supplémentaires induits par l'utilisation d'une métrique non euclidienne sont donc très largement compensés par la réduction du nombre de sommets à traiter. Les deux paragraphes qui suivent illustrent successivement ces deux aspects du problème et présentent des mesures détaillées des temps de calcul.

Temps de calcul par sommet

Les temps de calculs associés aux différentes phases de l'algorithme (voir le paragraphe 3.6) sont estimés pour les reconstructions de différentes images. Pour chaque itération, les temps mesurés sont divisés par le nombre de sommets sur la surface déformable. Les chiffres donnés dans ce paragraphe correspondent à la moyenne de ces temps pour l'ensemble des itérations entre l'initialisation et la convergence du modèle. L'ensemble des expérimentations ont été menées sur une machine de type *Intel Pentium IV* à 2.53 GHz munie de 1 Go de mémoire vive.

Calculs liés à la dynamique. Une partie des coûts calculatoires sont indépendants à la fois du sommet considéré et de la forme du modèle. Ils varient donc très peu et ne sont pas influencés par le contenu de l'image traitée. Ils sont principalement constitués

- du calcul des forces appliquées au modèle déformable (pour les forces classiquement utilisées),
- de l'intégration de l'équation du mouvement pour chaque sommet (par la méthode d'Euler explicite dans notre implémentation).

Avec l'implémentation utilisée, les temps de calculs associés à ces forces sont donnés dans la table 5.1 dans les cas d'une métrique riemannienne et d'une métrique euclidienne. Les chiffres donnés dans le tableau ont été obtenus pour la segmentation et la reconstruction d'une image représentant un cube. Aucune variation significative n'a pu être remarquée en comparant avec l'analyse d'autres images.

Les forces prises en compte sont les forces de régularisation et de friction décrites au paragraphe 3.4.2. La force de recherche d'une isosurface est définie sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{iso}}(u) = -\alpha \tanh(I(u) - I_0) \frac{\mathbf{n}|_u}{\|\mathbf{n}|_u\|_R}, \quad (5.2)$$

où α représente un coefficient de pondération de la force. La normale à la surface déformable en u orientée vers l'extérieur est notée $\mathbf{n}|_u$. Enfin I désigne la fonction image dont on cherche

l'isosurface de niveau I_0 . Chaque sommet est donc poussé dans la direction de la normale à la surface d'autant plus fort que la valeur de la fonction image à sa position est éloignée de la valeur recherchée. La fonction \tanh impose un comportement linéaire de la force au voisinage de l'isocontour recherché et limite l'intensité de la force à $\pm\alpha$ pour les valeurs de la fonction image les plus éloignées de I_0 . L'intérêt de cette définition est qu'elle permet un réglage plus aisé des forces pour l'utilisateur.

Les coûts associées à des forces images classiques données sous la forme d'un champ de vecteurs prédéfini (voir par exemple [13, 67, 72]) sont identiques dans les cas euclidien et riemannien. En effet, la renormalisation des forces destinée à prendre en compte la métrique peut être effectuée au cours d'un précalcul en un seul balayage de l'image. Les calculs à effectuer au moment de la reconstruction sont donc limités dans les deux cas à l'interpolation d'une quantité vectorielle.

Le chiffres donnés dans ce tableau montrent que les temps de calcul associés à la dynamique du modèle sont grossièrement deux fois plus élevés dans le cas riemannien que dans le cas euclidien, ce qui s'explique par les calculs plus importants liés à l'interpolation de la métrique (qui pour chaque sommet requiert l'interpolation de six coefficients) d'une part, et d'autre part par les évaluations des distances et longueurs elles-mêmes qui dans les cas les plus simples, requièrent 18 multiplications et 8 additions (à comparer avec seulement 3 multiplications et 2 additions dans le cas euclidien).

Le temps consommé pour interpoler la métrique peut être capitalisé en stockant pour chaque sommet la valeur de la métrique à sa position courante et pour chaque arête sa longueur. Cette procédure évite le calcul répétitif et en pure perte de la même quantité au cours d'une même itération. Les temps de calcul liés à l'évaluation des longueurs ou des distances semblent en revanche incompressibles. Comme l'implémentation proposée exploite ces optimisations, les temps de calculs reportés dans le tableau 5.1 ne prennent pas en compte certains de ces calculs qui sont effectués au moment de la régularisation de la maille à la fin de l'itération précédente (voir Fig. 3.13).

Régularisation et changements de topologie. Aux coûts constants requis pour évaluer les déplacements des sommets à une itération donnée, s'ajoutent des temps de calcul beaucoup plus variables qui dépendent de la géométrie du modèle, de sa dynamique, et éventuellement de la métrique. Ces coûts sont essentiellement liés à

- la régularisation de la maille,
- la détection et la gestion des changements de topologie.

Des temps de calcul (sur le même matériel que celui déjà décrit plus haut) sont donnés à la table 5.2. Comme l'indiquent les écarts-type très importants, ces chiffres sont particulièrement variables. Ils ne sont donc donnés qu'à titre indicatif et permettent simplement de déterminer des ordres de grandeur. L'ensemble des mesures effectuées sont résumées aux figures 5.9 et 5.10.

En dépit de leur grande variabilité, ces résultats indiquent sans ambiguïté que, pour la régularisation de la maille et la détection des collisions, l'utilisation d'une métrique riemannienne induit un effort de calcul par sommet nettement plus important (de 10 à

	Métrique euclidienne		Métrique riemannienne	
Calcul des forces (total)	18	(1.8)	35	(4.7)
Élastique	3.6	(0.35)	5.5	(0.78)
Courbure	5.3	(0.59)	20	(3.3)
Friction	0.34	(0.063)	0.32	(0.059)
Isosurface	8.9	(1.1)	9.0	(1.1)
Intégration des équations du mouvement	2.3	(0.33)	8.3	(0.83)

TAB. 5.1 – Temps de calculs (en microsecondes) pour le calcul des forces et l’intégration des équations du mouvement, et pour des métriques euclidienne et riemanniennes. Les nombres entre parenthèses indiquent les écarts-type pour chaque temps de calcul.

		Métrique euclidienne		Métrique riemannienne	
Régularisation de la maille	a	3.9	(3.0)	180	(150)
	b	80	(69)	590	(960)
Détection et résolution des auto-intersections	a	4.8	(4.4)	91	(140)
	b	16	(14)	140	(190)

TAB. 5.2 – Temps de calculs (en microsecondes) liés à la régularisation de la maille, et à la détection et la résolution des auto-intersections du modèle. Les écarts-type pour une même reconstruction sont donnés entre parenthèses. Les temps de calculs sont présentés dans les cas euclidien et riemannien, pour deux images différentes : (a) segmentation/reconstruction d’un cube, et (b) d’une image de crâne obtenue par tomodensitométrie.

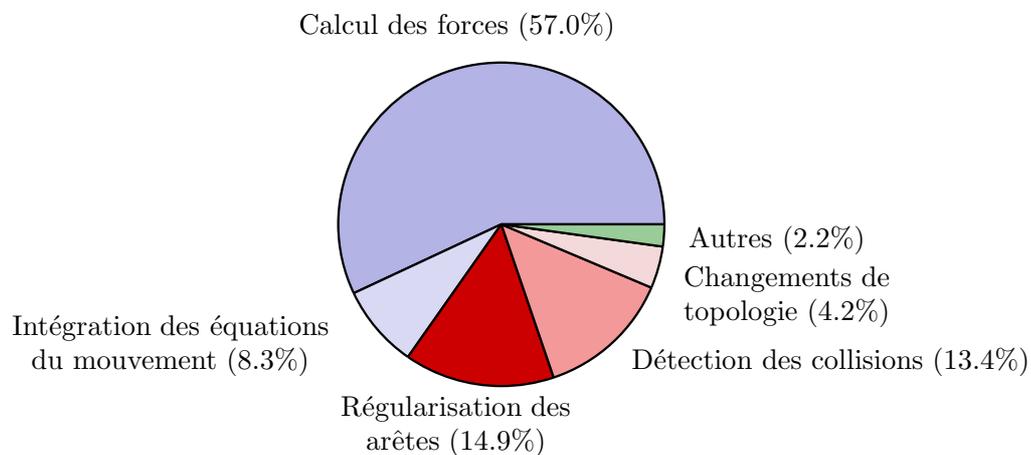


FIG. 5.9 – Répartition des temps de calculs par sommet avec une métrique euclidienne. On retrouve approximativement les mêmes proportions que celles données par Lachaud[33].

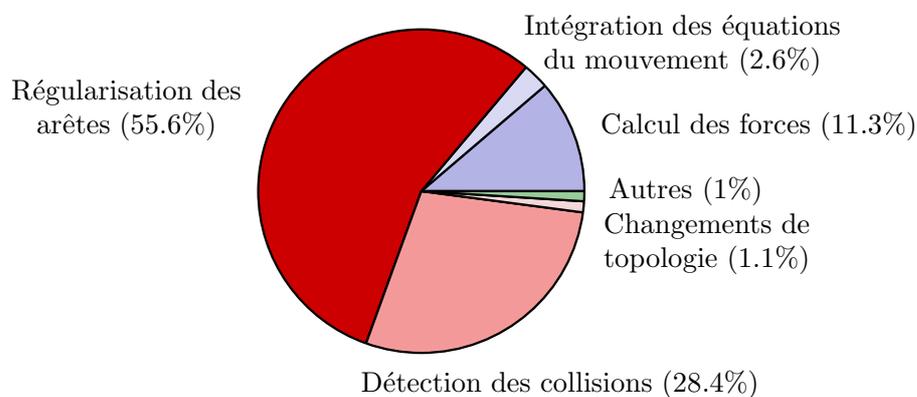


FIG. 5.10 – Répartition des temps de calculs par sommet avec une métrique riemannienne. La forte proportion du temps requise pour la régularisation des arêtes doit être nuancée car une partie des calculs effectués sont stockés et réutilisés pour les opérations ultérieures (détection de collisions, calcul des forces).

50 fois plus coûteux environ) que celui requis dans un contexte euclidien. Ces résultats doivent toutefois être nuancés : il convient de remarquer que certains calculs effectués à l'étape de régularisation de la maille (longueur des arêtes, interpolation de la métrique...) sont conservés pour être utilisés dans les calculs des forces.

Globalement, en tenant compte du calcul des forces et de la régularisation de la maille, le temps de calcul par sommet est multiplié par un facteur allant de 6 (dans le cas du crâne) à 35 (dans le cas du cube). Cet accroissement considérable est néanmoins largement compensé par le nombre très réduit de sommets et la diminution du nombre d'itérations nécessaire à la convergence du modèle (voir les paragraphes qui suivent). Il est important toutefois de noter que ces chiffres sont très variables. Ils dépendent notamment de la forme du modèle, de sa position initiale, du choix des forces appliquées et de la résolution maximale souhaitée. Dans une moindre proportion il dépend également de la résolution de la métrique, qui détermine le nombre de pas d'intégration utilisée dans l'estimation de la longueur des arêtes les plus longues (voir le paragraphe 3.3.3).

Optimisations. Pour la détection des collisions, l'implémentation utilisée tire partie de deux types d'optimisations adaptées des travaux de Lachaud et Montanvert [35]. Premièrement, pour déterminer l'ensemble des sommets susceptibles d'entrer en collision avec une face adjacente à un sommet u , il est suffisant de prendre seulement en compte les sommets dans une boule de rayon $\lambda\zeta\delta$ autour de u . Lorsque les sommets sont stockés dans un arbre (un *quadtree* en deux dimensions, ou un *octree* en trois dimensions) il est possible de sélectionner efficacement tous les sommets situés dans une boîte englobante (alignée avec les axes) donnée. Dans le contexte euclidien, cette boîte est indépendante du sommet considéré : c'est un cube de côté $\lambda\zeta\delta$. Lorsque la métrique est changée, il est préférable d'utiliser des boîtes adaptées à la valeur de métrique dans un voisinage. L'implémentation proposée utilise des boîtes cubiques dont le côté $c(\mathbf{x})$ pour un sommet placé en \mathbf{x} est donné par :

$$c(\mathbf{x}) = \frac{\lambda\zeta\delta}{\mu_{\min}(\mathbf{x})}, \quad (5.3)$$

où $\mu_{\min}(\mathbf{x})$ désigne la plus petite valeur propre de la métrique au point \mathbf{x} (c'est-à-dire μ_n en dimension n). Il est très certainement possible de construire des boîtes plus représentatives de la métrique et qui prennent en particulier en compte son anisotropie locale, et éventuellement la géométrie du modèle. Cependant cela implique de mettre en balance le temps nécessaire au calcul de la boîte avec le gain obtenu en évitant d'emblée de tester les collisions avec un certain nombre de sommets. Par ailleurs il est envisageable d'utiliser d'autres méthodes de détection de collisions. Il semble par exemple qu'une approche hiérarchique par *OBBTrees* [28] pourrait être exploitée avantageusement.

En plus de cette première optimisation, les tests de collisions ne sont effectués pour un sommet que lorsque, depuis le dernier test qu'il a subi, il a parcouru une distance suffisamment importante pour risquer d'entrer en collision avec une face de la maille déformable. Ne sont donc testés que les sommets qui ont encore un mouvement significatif. Pour être certain de détecter toutes les collisions, la distance maximale qu'un sommet doit pouvoir

parcourir sans être testé est donnée par $\frac{1}{2}d_{\max}$ (où d_{\max} représente la distance riemannienne maximale parcourue par un sommet en une itération). Dans un espace muni d'une métrique définie comme cela est décrit au chapitre 4, cette heuristique se révèle particulièrement efficace. En effet, la maille du modèle n'est raffinée qu'à proximité des frontières à reconstruire, c'est-à-dire précisément au voisinage des positions d'équilibre des sommets (voir le paragraphe suivant et en particulier la figure 5.12). La proportion de sommets quasi immobiles dans l'ensemble des sommets est donc beaucoup plus grande que dans le cas euclidien. En conséquence, la proportion de sommets pris en compte pour les tests de collisions est donc réduite.

Nombre de sommets sur la maille

Le nombre de sommets sur la maille après convergence dépend de paramètres connus, comme la longueur δ ou les coefficients κ_{ref} et s_{ref} , mais également de la géométrie des frontières reconstruites, et de l'intensité des contours à leur voisinage, qui ne sont accessibles qu'après la segmentation. Il est donc difficile d'estimer *a priori* le nombre des sommets qui seront utilisés pour décrire la forme finale du modèle. De même le nombre de sommets utilisés au cours de l'évolution du modèle est difficile voire impossible à évaluer à l'avance. En pratique, le gain en nombre de sommets est principalement déterminé par

- la forme des frontières à reconstruire,
- l'étendue des variations autorisées pour les longueurs euclidiennes des arêtes du modèle, et donc par les paramètres choisis pour la construction des métriques.

L'optimisation du nombre de sommets est d'autant plus significative que l'objet reconstruit présente à la fois de larges zones planes (ou peu courbées) le long desquelles les arêtes sont fortement allongées et des structures fines bien localisées.

A l'inverse, l'intérêt du changement de métrique est moins sensible si l'intégralité de surface à reconstruire présente des aspérités et des détails qui nécessitent un nombre important de sommets pour être représentées précisément. Toutefois, si la position initiale du modèle est très éloignée des objets à reconstruire, le gain peut se révéler appréciable puisque les sommets sont autorisés à se déplacer plus rapidement dans les zones de l'images dépourvues de structures d'intérêt (voir la section 5.4.2).

L'histogramme des longueurs des arêtes est un bon indicateur qui prend simultanément en compte la répartition des courbures à la surface des objets d'intérêt et le paramétrage de la métrique. Deux exemples sont donnés à la figure 5.11. Ils montrent que l'utilisation d'une métrique riemannienne permet de répartir les longueurs des arêtes (donc la densité de sommets sur la maille déformable) sur une plage de valeurs bien plus large qu'avec une métrique euclidienne : alors que la version originale du modèle déformable n'autorise qu'un rapport de ζ entre les longueurs euclidiennes de la plus grande et de la plus petite arêtes, ce rapport passe à $\sqrt{\mu_{\max}}\zeta$ pour une métrique riemannienne dont la plus grande valeur propre sur tout le domaine de l'image est notée μ_{\max} .

Les représentations tridimensionnelles des surfaces déformables correspondantes sont données aux figures 5.13, 5.14 et 5.15. Des détails plus fins sont par ailleurs présentés au paragraphe 5.6.1.

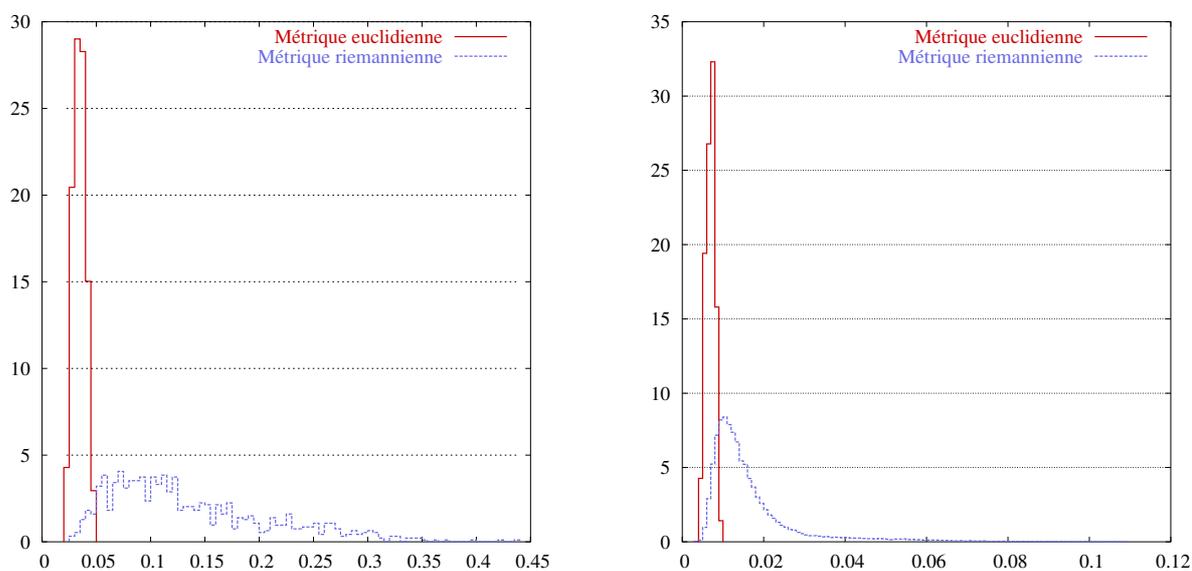


FIG. 5.11 – Répartition des longueurs des arêtes. L'ordonnée représente le pourcentage d'arêtes dont la longueur est comprise entre les deux extrémités du créneau. Gauche : répartition des arêtes pour la reconstruction de l'ellipsoïde donné à la figure 5.13. Droite : répartition des arêtes pour la reconstruction d'un crâne (voir Fig. 5.14 et Fig. 5.15).

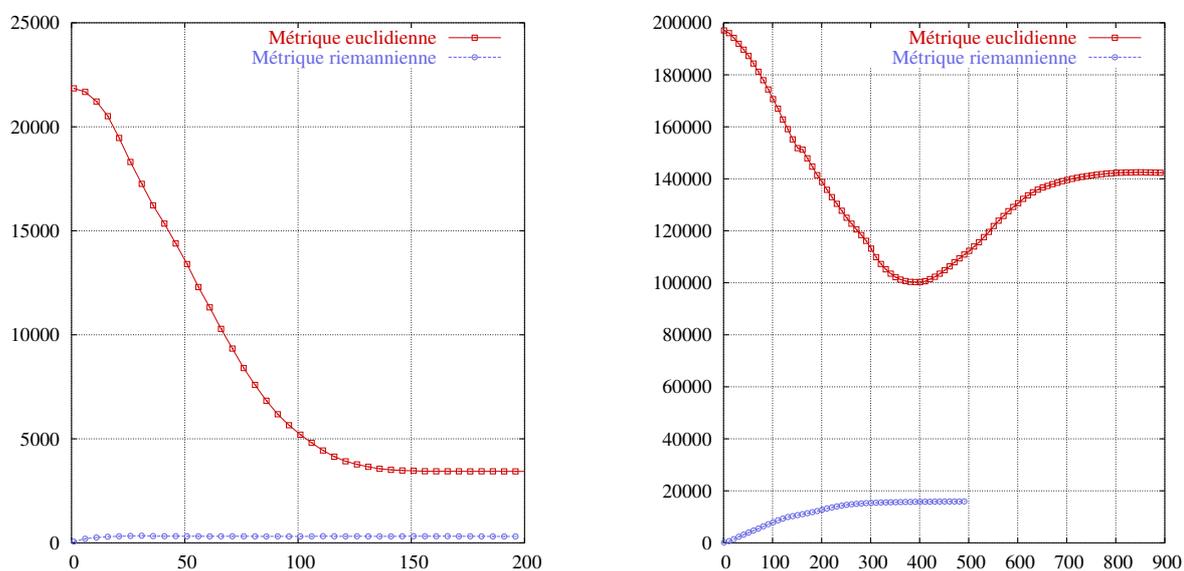


FIG. 5.12 – Évolution du nombre de sommets sur la maille déformable pour une métrique euclidienne et une métrique riemannienne pour la reconstruction d'un ellipsoïde à gauche, pour la reconstruction d'un crâne à droite. Des représentation tridimensionnelles des surfaces déformables sont données aux figures 5.13, 5.14 et 5.15.

Par ailleurs, comme cela a déjà été signalé, la maille du modèle n'est raffinée qu'au voisinage des structures d'intérêt, et uniquement si ces dernières sont suffisamment courbées. Lorsque le modèle évolue loin de l'objet à reconstruire le nombre de ses sommets est donc réduit. Il n'augmente qu'au dernier moment, lorsque la frontière déformable approche de sa position d'équilibre. Cette propriété est illustrée pour deux exemples à la figure 5.12. Dans le cas de la reconstruction de l'ellipsoïde avec une métrique riemannienne, le nombre de sommets reste toujours très faible, et augmente légèrement lorsque le modèle se stabilise sur l'isosurface recherchée. Le même comportement est observé pour la reconstruction du crâne. Sur la courbe correspondant à la reconstruction avec une métrique euclidienne, la remontée du nombre de sommets correspond à l'ajout des sommets nécessaires pour représenter la face interne du crâne.

5.4.2 Nombre d'itérations avant convergence

Le nombre d'itérations requis pour que la surface déformable se stabilise dans sa position d'équilibre dépend conjointement du réglage des forces, de la géométrie du modèle, de la métrique et bien entendu de la position initiale du modèle. Comme le nombre de sommets sur la maille, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est donc difficile à prévoir.

Bien que variables, les gains peuvent être assez significatifs, en particulier lorsque la position initiale du modèle est éloignée de sa position d'équilibre. Les exemples donnés aux figures 5.13, 5.14 et 5.15 montrent ainsi que la surface déformable se déplace très rapidement vers les zones d'intérêt. Dans ces régions la métrique étend très fortement l'espace dans la direction orthogonale au contour, ce qui :

- i. diminue artificiellement le pas de temps de l'intégration (voir le paragraphe 3.4.2),
- ii. réduit la longueur euclidienne des déplacements des sommets (on rappelle en effet que la longueur riemannienne du déplacement d'un sommet entre deux itérations est maintenue sous un seuil d_{\max}).

Par conséquent, les sommets ralentissent (au sens euclidien) fortement en arrivant dans ces régions, ce qui se traduit par une stabilité accrue et une plus grande précision du modèle.

Ce comportement est confirmé sur les tracés de la figure 5.16. Les courbes présentent l'évolution des énergies cinétiques moyennes des sommets de la maille déformable dans les cas euclidien et riemannien pour les deux exemples de l'ellipsoïde et du crâne. On constate que les énergies cinétiques sont au départ très élevées pendant les premières itérations, ce qui correspond à des déplacements très rapides (toujours au sens euclidien). Elles chutent brutalement lorsque les sommets approchent de leurs positions d'équilibre respectives. Les sommets se déplacent donc plus lentement ce qui aide le modèle à se stabiliser sur sa position d'équilibre.

5.4.3 Temps de calcul de la métrique

Le calcul de la métrique fait intervenir :

1. le calcul du tenseur de structure,

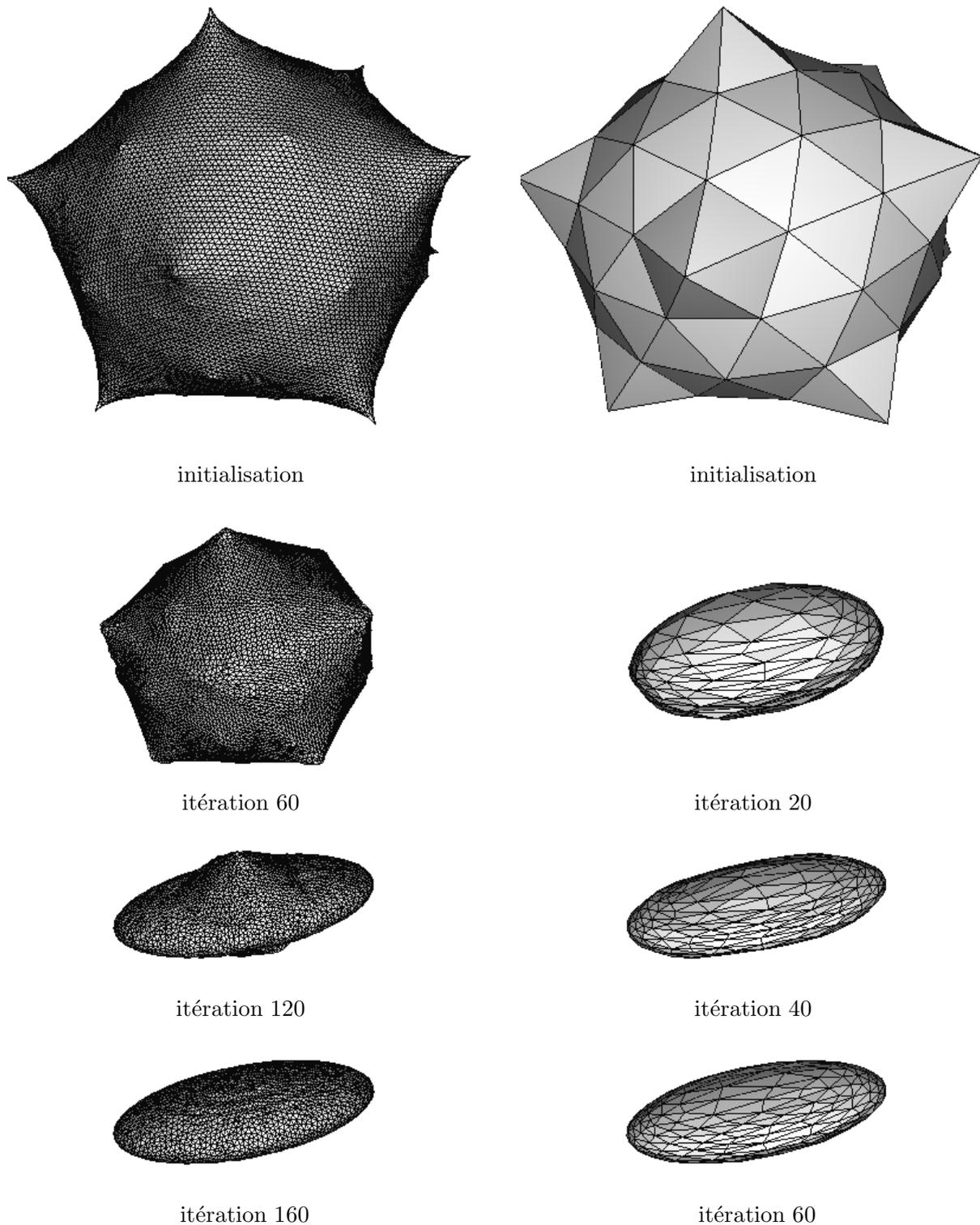


FIG. 5.13 – Différentes itérations de la reconstruction d'un même ellipsoïde avec une métrique euclidienne (à gauche) et une métrique riemannienne (à droite).

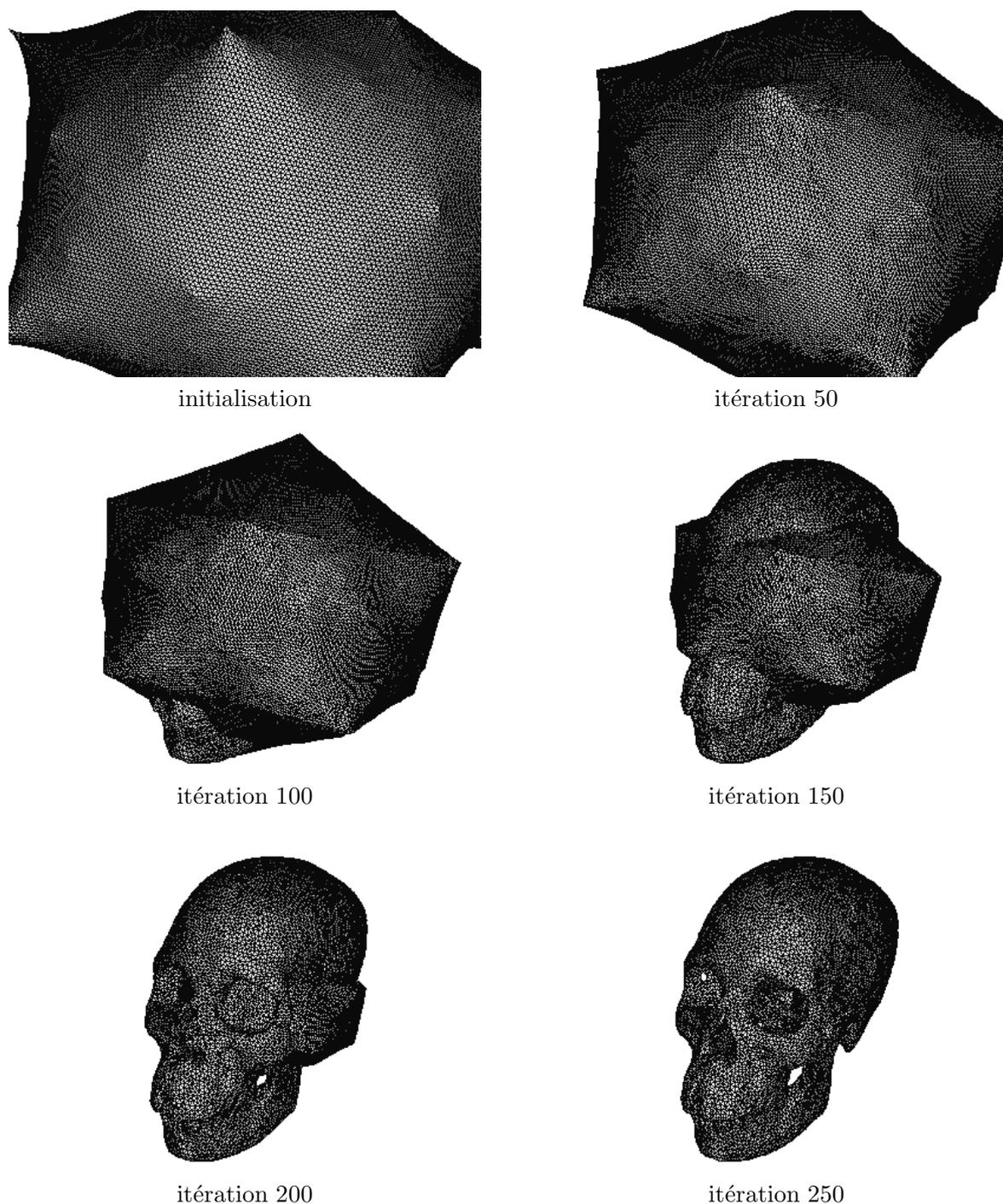


FIG. 5.14 – Surface déformable à différentes étapes de la reconstruction d'un crâne à partir d'un volume de données obtenu par tomodensitométrie, et avec une métrique euclidienne (voir la figure 5.15). Pour que l'affichage reste lisible, le modèle montré ici est légèrement moins précis que celui utilisé pour obtenir les courbes données aux figures 5.11, 5.12 et 5.16.

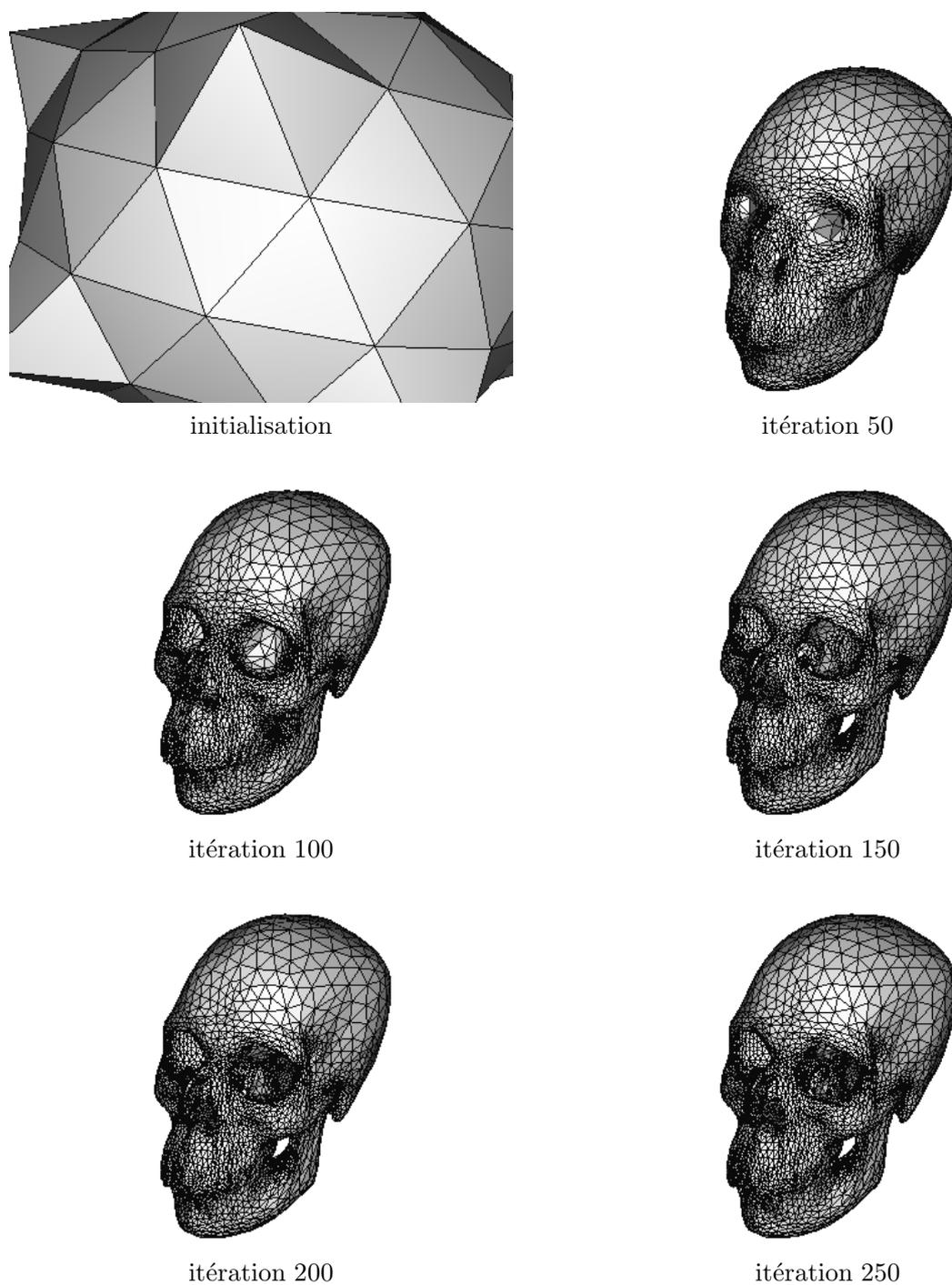


FIG. 5.15 – Différentes étapes de la reconstruction du même crâne qu'à la figure 5.14, mais avec une métrique riemannienne calculée comme indiqué au chapitre 4.

		Nombre de sommets	Nombre d'itérations	Temps de calcul
Métrique euclidienne	a	3440	160	4min 10s
	b	142 340	900	3h 22min
Métrique riemannienne	a	314	60	2s (+43s)
	b	15 936	500	22min (+3min 49s)

TAB. 5.3 – Comparaison des complexités des segmentations et reconstructions de l'ellipsoïde (a) et du crâne (b) présentés aux figures 5.13, 5.14, et 5.15 avec une métrique euclidienne et une métrique riemannienne. Les valeurs entre parenthèses correspondent au temps de calcul de la métrique (voir le paragraphe 5.4.3 pour plus de détails). L'ellipsoïde est représenté par un volume de données de taille 100^3 , la résolution de la tomodensitométrie du crâne est $256 \times 256 \times 68$.

2. la diagonalisation du tenseur de structure pour chaque voxel de l'image,
3. pour chaque voxel, le calcul des courbures et l'estimation de l'intensité des contours à partir de la structure spectrale du tenseur obtenu en 2,
4. la construction des valeurs propres de la métrique à partir des quantités calculées en 2 et 3,
5. la construction du tenseur métrique à partir des valeurs propres calculées en 4 et des vecteurs propres du tenseur de structure obtenus en 2.

Globalement, la complexité du calcul est donc linéaire en la taille de l'image, avec une constante multiplicative relativement élevée toutefois.

Avec l'implémentation utilisée pour effectuer les expériences, la plus grande part de l'effort de calcul (environ 99% dans les expériences effectuées) est consommée pour l'évaluation du tenseur de structure. Ce calcul fait appel à n produits de convolutions pour le calcul du gradient de l'image lissée (où n désigne toujours la dimension de l'image, 2 pour une image bidimensionnelle et 3 pour un volume de données), et $n(n+1)/2$ nouveaux produits de convolution pour intégrer l'information sur un voisinage.

Pour les expérimentations présentées ici, le calcul du produit de convolution est effectuée par passage dans le domaine de Fourier. La convolution est donc transformée en un simple produit et la complexité du calcul est ainsi rendue indépendante des tailles σ et ρ des filtres gaussiens utilisés. L'essentiel des coûts réside dans le calcul de la transformée de Fourier de l'image à traiter, en $O(N \log N)$, où N désigne la taille de l'image.

D'autres méthodes de calculs sont envisageables : d'une part lorsque les paramètres σ et ρ sont faibles, une simple discrétisation des filtres et l'implémentation naïve de la convolution peuvent s'avérer plus efficaces et suffisamment précises. Dans tous les autres cas, des implémentations récursives [23, 62] du lissage gaussien peuvent être utilisées et se révéleraient sans doute plus rapides. Par ailleurs il est également envisageable de calculer séparément et en parallèle chaque composante du champ de gradient et chacun des $n(n+1)/2$ coefficients du tenseur de structure.

Dans le contexte tridimensionnel, la construction de la métrique requiert le maintien en mémoire d'une grande quantité de données. En effet, la métrique est représentée sous la forme d'un champ de matrices symétriques. A chaque pixel sont donc associés six coefficients réels, ce qui pour une image de taille N^3 et une représentation des flottants en simple précision correspond à une taille de $24 N^3$ octets en mémoire (soit par exemple 480Mo pour une image 128^3). Cette quantité déjà importante est en réalité un minorant qui ne tient pas compte des calculs intermédiaires dont le stockage est nécessaire pour éviter de calculer plusieurs fois les mêmes quantités. Pour s'affranchir du problème, deux solutions au moins sont envisageables. La méthode la plus directe consisterait à traiter l'image morceau par morceau pour minimiser la quantité de mémoire nécessaire au stockage des calculs intermédiaires. Une autre possibilité serait de travailler sur une version sous-échantillonnée de l'image. Cela se justifie d'autant plus que les lissages successifs effectués pour le calcul du tenseur de structure éliminent les hautes fréquences du signal.

Pour finir, le calcul de la métrique peut également être exploité pour définir diverses forces. En particulier, il a été montré au chapitre 4 que le tenseur de structure permet d'estimer l'intensité d'un contour, qui peut alors être directement utilisée comme un champ de potentiel.

5.4.4 Bilan

Pour un sommet, les temps de calcul sont multipliés par un facteur allant de 6 à 35. Les coûts supplémentaires sont en grande partie consommés pour la régularisation du modèle déformable et la gestion des changements de topologie. Ce facteur dépend principalement

- de la forme du modèle,
- de la métrique choisie,

ce qui explique la grande variabilité des coûts.

En contrepartie, le nombre de sommets sur maille est considérablement diminué, pendant et après la convergence. Les exemples proposés démontrent que des réductions d'un facteur 10 sont envisageables pour le modèle à sa position d'équilibre. Toutefois, la réduction du nombre de sommets est essentiellement conditionnée par la forme du modèle, et la métrique utilisée.

Enfin, le nombre d'itérations requis pour que le modèle atteigne sa position d'équilibre est réduit. Là encore, les divisions par deux obtenues dans les exemples présentés aux paragraphes précédents ne sont pas significatives. Le nombre d'itérations dépend bien entendu essentiellement des positions initiales et finales du modèle.

Ces remarques montrent que, suivant la situation, l'utilisation du modèle proposé dans cette thèse peut s'avérer plus ou moins efficace que la méthode existante. Quoi qu'il en soit, les segmentations et reconstructions présentées aux paragraphes précédents montrent que des gains substantiels peuvent être retirés de l'utilisation de la méthode proposée. Ces gains sont principalement obtenus lorsque :

- l'initialisation du modèle est très éloignée de sa position finale.
- les objets à segmenter présentent de larges structures planes ou faiblement courbées, et localement de fins détails qui requièrent une densité de sommet sur la maille

particulièrement importante pour être reconstruits correctement.

5.5 Segmentation d'images synthétiques

Cette section présente et compare des exemples de reconstructions d'images synthétiques avec et sans bruit (voir Fig. 5.18). Les reconstructions obtenues avec

- le modèle original de Lachaud [35] avec une maille uniforme grossière,
- le modèle original de Lachaud avec une maille uniforme fine,
- le modèle proposé au chapitre 3 lorsque l'espace image est muni d'une métrique construite comme indiqué au chapitre 4,

sont présentées à la figure 5.19.

Toutes les expérimentations sont menées avec le même équilibrage des forces qui s'appliquent aux sommets du modèle (régularisation, frottement, et recherche d'isosurface). Seuls le paramètre δ qui définit la précision globale du modèle et la métrique varient en fonction des cas.

Pour le modèle riemannien, dans le cas sans bruit, le tenseur de structure est calculé avec pour paramètres $\sigma = 1$ et $\rho = 3$. Dans le cas bruité, la valeur de σ est portée à 3 de manière à conserver une estimation raisonnablement précise de la courbure des composantes de l'image. La métrique est ensuite construite pour autoriser un rapport d'environ 40 entre les longueurs de la plus grande et la plus petite arête du modèle déformable.

Ces expérimentations montrent que le modèle proposé dans cette thèse permet d'obtenir des qualités de reconstruction au moins équivalentes à celles obtenues en exploitant un modèle dont la précision est uniforme et proche de la taille d'un voxel de l'image. En comparaison avec un tel modèle, le nombre de sommets utilisés pour représenter la forme est en revanche considérablement réduit (voir Fig. 5.19).

Les expérimentations montrent par ailleurs que, pour un nombre de sommets équivalent, la qualité de la reconstruction est bien meilleure avec le modèle à densité adaptative qu'avec un modèle dont les arêtes ont une longueur uniforme. Ceci est naturellement visible dans les parties les plus courbées des surfaces reconstruites, mais aussi que le long de structures d'épaisseur réduite. En effet, pour reconstruire correctement ces parties des objets, un modèle à densité uniforme doit nécessairement travailler avec une maille dont la finesse (globale) doit être proche de la résolution de l'image. Dans le cas contraire les parties courbées sont mal représentées, et des collisions sont détectées entre deux parties du modèle situées de part et d'autre d'une partie plane et fine de l'objet à reconstruire. Il en résulte une forte dégradation de la représentation des formes, et surtout une topologie erronée du modèle.

La surestimation des longueurs au voisinage des parties courbées des objets et dans la direction transversale aux contours corrige ces défauts. D'un part, les sommets du modèle s'accumulent dans les parties de la surface où leur utilité est la plus grande. D'autre part les détections de collisions entre parties de la maille située de part et d'autre d'une structure d'épaisseur réduite sont défavorisées, et la surface reconstruite possède la bonne topologie.

Les expérimentations présentées à la figure 5.19 mettent par ailleurs en évidence deux limites de la méthode proposée pour construire les métriques : contrairement à ce qui aurait été souhaitable, la résolution au centre des faces du cube n'est pas minimale (au contraire de ce qui est visible à la figure 3.2). Ce comportement est lié à la perturbation des vecteurs gradient correspondant à la frontière interne de l'objet à reconstruire (interface entre le cube et la cavité sphérique située à l'intérieur). En effet, le tenseur de structure n'est pas capable de distinguer les gradients qui proviennent d'un contour de l'image et de l'autre. En conséquence, la courbure de la face externe de l'objet est légèrement surestimée ce qui conduit le modèle déformable à introduire plus de sommets dans ces régions.

Pour les mêmes raisons la présence de bruit dans l'image provoque une légère surestimation des courbures, ce qui explique l'accroissement global du nombre de sommets dans le modèle adaptatif sur un image fortement bruitée (Fig. 5.19 en bas à gauche). Compte tenu de l'intensité importante du bruit, la reconstruction de l'objet d'intérêt est toutefois tout à fait acceptable, voir même légèrement meilleure que dans le cas d'un modèle uniforme avec une fine résolution. La limitation du nombre de sommets le long des parties planes est en effet comparable à un lissage local de la surface.

5.6 Segmentations d'images biomédicales

Ce paragraphe présente des résultats de segmentations et reconstructions d'images biomédicales variées.

5.6.1 Tomodensitométrie du crâne

Dans ce paragraphe, le modèle est expérimenté sur une image de crâne obtenue par tomodensitométrie. L'image échantillonne donc la densité osseuse en chaque nœud d'une grille discrète : l'os très dense correspond aux valeurs les plus élevées (en blanc), alors que l'air est représenté par les valeurs les plus basses (en noir). Comme l'image est peu bruitée et ne contient pas d'autres structures que le crâne, la segmentation/reconstruction se ramène à une simple recherche d'isosurface.

Par ailleurs, l'image est caractérisée par une importante résolution dans le plan transversal et une résolution approximativement quatre fois plus faible sur l'axe longitudinal (voir Fig. 5.20). La métrique est calculée comme indiqué au chapitre 4. Pour obtenir une estimation correcte des courbures, il est primordial de tenir compte du plongement des images. Pour ce faire, il convient d'échantillonner les fonctions gaussiennes aux mêmes fréquences que l'image à traiter.

Les résultats de la reconstruction sont présentés aux figures 5.21, 5.22 et 5.23. Les réglages de la métrique et du modèle déformable sont choisis de sorte que les détails les plus fins de l'image puissent être reconstruits. La longueur minimale d'une arête correspond donc à l'épaisseur d'un voxel dans le plan transversal. Les reconstructions présentées démontrent que l'approche proposée permet d'obtenir des reconstructions de qualité équivalente à celle de modèles existants, mais en utilisant une quantité de sommets nettement inférieure.

5.6.2 Angiographie

Image bidimensionnelle de la rétine

L'image segmentée est obtenue par *angiographie fluorescente* du fond de l'œil : un produit fluorescent (de la fluorescéine) est injecté dans le sang du sujet. Lorsque ce produit reçoit un rayonnement de longueur d'onde approprié (violet-bleu), il réémet une lumière dans une bande de longueurs d'onde caractéristique (vert-jaune). Celle-ci peut être distinguée des autres à l'aide d'un filtre bien choisi. Les clichés du fond de l'œil pris à travers le cristallin révèlent les structures des vaisseaux situés au niveau de la rétine et permettent donc de détecter d'éventuelles pathologies.

L'image utilisée est présentée à la figure 5.24 (à gauche). Les vaisseaux sanguins sont reconnaissables car ils sont plus clairs que le fond. Pour rendre la segmentation plus simple, les variations de luminosité sur l'ensemble de l'image sont éliminées en supprimant les basses fréquences de l'image. Ceci est réalisé en travaillant sur l'image $I_{\text{corrigée}}$ définie par :

$$I_{\text{corrigée}} = I - g_{\eta} * I, \quad (5.4)$$

où I est l'image originale et g_{η} est une fonction gaussienne bien choisie. L'effet de cette correction est illustré sur l'image de droite à la figure 5.24. On constate bien que l'illumination de l'image $I_{\text{corrigée}}$ est pratiquement uniforme. La segmentation/reconstruction peut alors être effectuée en recherchant un isocontour bien choisi.

Les résultats de la reconstructions sont présentés aux figures 5.25 et 5.26. Les reconstructions sont de qualités équivalentes avec une métrique euclidienne ou avec une métrique riemannienne.

L'utilisation d'une métrique riemannienne permet au modèle de pénétrer dans des vaisseaux légèrement plus fins, mais comme ceux-ci ne sont pas caractérisés par de forts gradients dans l'image, ils ne sont que peu dilatés par la métrique riemannienne. La précision du modèle à leur voisinage est donc relativement grossière.

Le nombre de sommets et donc aussi les temps de calculs sont significativement réduits. Lorsque la métrique est euclidienne 102 s sont nécessaires pour reconstruire les vaisseaux, et le modèle obtenu contient 3 649 sommets. Avec une métrique riemannienne adaptée comme indiquée au chapitre 4, le temps de calcul est ramené à 49s environ (plus approximativement 1s pour le calcul de la métrique) et le nombre de sommets à 2 070.

Angiographie cérébrale en trois dimensions

L'image utilisée comme exemple dans ce paragraphe est une angiographie par IRM à contraste de phase. Les détails concernant cette technique d'imagerie sont décrits avec précision dans [31]. L'examen révèle les zones du volume exploré où se trouvent des liquides animés d'un mouvement suffisamment rapide, et donc essentiellement les artères et les veines (l'image utilisée représente les vaisseaux qui irriguent le cerveau).

La métrique est toujours calculée comme indiqué au chapitre 4. Comme cela a déjà été signalé cette construction est bien adaptée à des structures tubulaires. Le long de ces

dernières, les arêtes peuvent s'allonger fortement, alors qu'elles restent de tailles réduites dans le plan transversal (voir Fig. 5.27). Le modèle déformable est initialisé à l'extérieur de l'image et évolue sous l'action des forces de régularisation et de friction classiques, et d'une force de recherche d'isocontour (décrite au paragraphe 3.4.2) réglée pour détecter l'isosurface de niveau de gris 19.2 sur une échelle allant de 0 à 256.

On retrouve des résultats de qualité comparable (ou légèrement inférieure) à ceux présentée par Lachaud [33]. Comme dans le cas à deux dimensions les vaisseaux les plus fins ne présentent que des contours très faibles. Il ne sont donc pas mis en valeur par la métrique et peuvent être perdus au cours de la segmentation. Un choix approprié du gradient de confiance s_{ref} compense en partie le problème, mais induit naturellement une plus grande sensibilité au bruit. Une partie de ces défauts serait probablement surmontée en construisant la métrique de manière à mieux exploiter les spécificités de ce type d'images.

Notons toutefois que le problème n'est pas spécifique au cas où la métrique est riemannienne. En effet, avec une métrique euclidienne, une très grande résolution est requise pour segmenter avec précision ces structures, car il est nécessaire d'éviter la détection de collisions entre parties de la maille déformables diamétralement opposées le long d'un même vaisseau.

5.6.3 Tomographie du thorax et de l'abdomen

Ces dernières expérimentations sont réalisées sur des tomodesitométries du thorax (Fig. 5.28) et de l'abdomen (Fig. 5.29). Dans le premier cas l'objet d'intérêt est l'arbre bronchique. Dans le second, l'aorte abdominale et ses ramifications.

Ces deux structures peuvent être détectées en recherchant les voxels d'un niveau de gris approprié dans l'image. Comme les images à analyser sont fortement bruitées (l'image du thorax en particulier), elle est d'abord traitée en suivant la méthode proposée par de Dietrich et Braquelaire [17]. L'image est lissée à l'aide d'un *filtre sigma* qui permet de réduire le bruit de l'image tout en préservant ses contours. Le niveau de gris de chaque voxel est remplacé par la moyenne des niveaux de gris de certains pixels d'un voisinage. Pour préserver les contours et les structures fines, ne sont pris en compte que les voxels dont la valeur est comprise dans un certain intervalle autour du niveau de gris du voxel considéré.

Une fois l'image débruitée, les structures pertinentes peuvent être détectées en sélectionnant uniquement les voxels dont le niveau de gris est compris dans un intervalle bien choisi. De Dietrich et Braquelaire [17] proposent un intervalle de -1024 à -940 pour les bronches et un intervalle de 250 à 370 pour les vaisseaux sanguins (les niveaux de gris sont exprimés en *unités de Hounsfield* ce qui permet de conserver les valeurs des seuils d'une image à l'autre).

Pour la segmentation/reconstruction, le modèle déformable est là encore soumis aux forces de régularisation et de friction classiques, ainsi qu'à une force qui pousse la surface suivant sa normale, soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur suivant que le niveau de gris local est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'intervalle recherché. Les objets d'intérêt sont entourées de structures parasites que le seuillage ne suffit pas à éliminer et qui en outre

sont détectées et prises en compte dans la construction de la métrique. Pour éviter de les reconstruire en pure perte, le modèle est initialisé à l'intérieur de l'arbre bronchique ou de l'aorte, où il gonfle jusqu'à remplir l'objet recherché.

Les résultats sont présentés à la figure 5.30 pour la tomodensitométrie du thorax, et à la figure 5.31 pour la tomodensitométrie de l'abdomen. On constate bien l'adaptation de la densité de sommets en fonction de la courbure des structures à extraire, et le raffinement progressif de la maille du modèle au fur et à mesure que le modèle progresse vers les vaisseaux les plus fins.

5.7 Conclusion

L'ensemble de ces expérimentations démontre que

- le modèle adopte le comportement escompté et adapte sa densité de sommets en fonction de la métrique,
- le procédé de construction des métriques proposé au chapitre 4 permet de prendre en compte la géométrie des objets pour sélectionner la finesse de la maille déformable de manière appropriée,
- le modèle reste capable d'adapter automatiquement sa topologie pour la maintenir cohérente avec sa géométrie.

Par ailleurs les expérimentations sur des images réelles illustrent la flexibilité du modèle proposé et la possibilité de l'adapter facilement pour diverses applications pour lesquelles il pourrait être exploité avantageusement. Elles montrent également les limites du procédé de construction des métriques, qui limite la précision du modèle déformable le long de contours faiblement marqués et pour des structures très fines et difficiles à distinguer du bruit ambiant.

De plus, bien qu'aucune validation quantitative ne soit présentée, la qualité géométrique des mailles produites semble (visuellement) légèrement meilleure avec le modèle proposé que dans le cas euclidien. La réduction du nombre de sommets dans les zones planes ou quasi-planes des objets agit en effet comme un lissage de la surface. Dans ces régions, la surface est donc plus régulière et le procédé de reconstruction est moins sensible au bruit et aux effets de la discrétisation. D'une part cela limite l'influence du bruit qui dégrade l'image. D'autre part, cela atténue les effets de la discrétisation en particulier sur des images anisotropes (voir par exemple le sommet du crâne présenté à la figure 5.22 qui laisse apparaître les rangées de voxels dans le cas euclidien). Il est d'ailleurs intéressant de noter que l'action des forces de régularisation qui déterminent le comportement du modèle déformable ont une formulation et un effet très similaires à la méthode de lissage des surfaces proposée par Taubin [4] pour débruiter les surfaces sans en détruire les structures intéressantes.

Par ailleurs, la topologie des objets est également mieux représentée, en particulier lorsque les objets présentent des régions planes et relativement fines. En effet, sauf si la densité de sommets sur la maille est particulièrement élevée, le modèle euclidien a tendance à détecter des collisions entre les parties de la maille déformable situées de part et d'autre

de ces structures. En conséquence, il creuse des tunnels dans ces parties planes et peut même les supprimer complètement. Avec une métrique riemannienne, les distances sont fortement dilatées dans la direction orthogonale à ces structures. Les parties de la surface déformable qui se trouvent de part et d'autre sont donc virtuellement éloignées, et aucune collision n'est donc détectée, et la structure est mieux reconstruite.

La qualité des reconstructions mériterait très certainement une étude quantitative précise. Cependant, il semble difficile de mettre au point un estimateur pour évaluer automatiquement la qualité des différents résultats, et dans la plupart des cas les compétences d'un expert semblent être la seule information fiable utilisable.

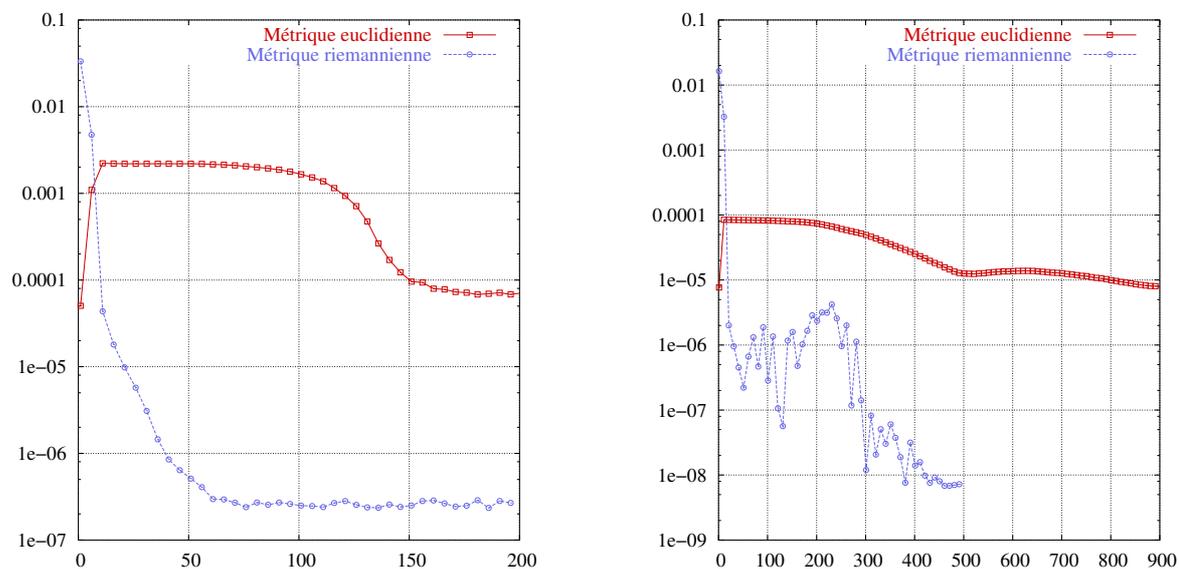
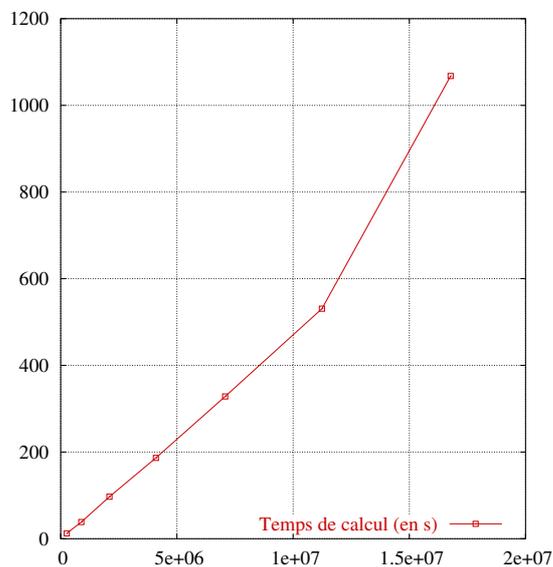


FIG. 5.16 – Évolution de l'énergie cinétique du modèle déformable dans les cas euclidien et riemannien pour la reconstruction d'un ellipsoïde à gauche, et d'un crâne à droite.



Taille de l'image (en pixels)	Temps de calcul (en s)
64^3	12.45
96^3	38.58
128^3	96.90
160^3	186.59
192^3	328.40
224^3	530.70
256^3	1067.83

FIG. 5.17 – Temps requis pour la construction de la métrique à partir d'une image, en fonction de la taille (en pixels) de l'image. L'augmentation du temps de calcul pour l'image de taille 256^3 pixels est liée à la saturation de la mémoire disponible sur la machine (1Go).

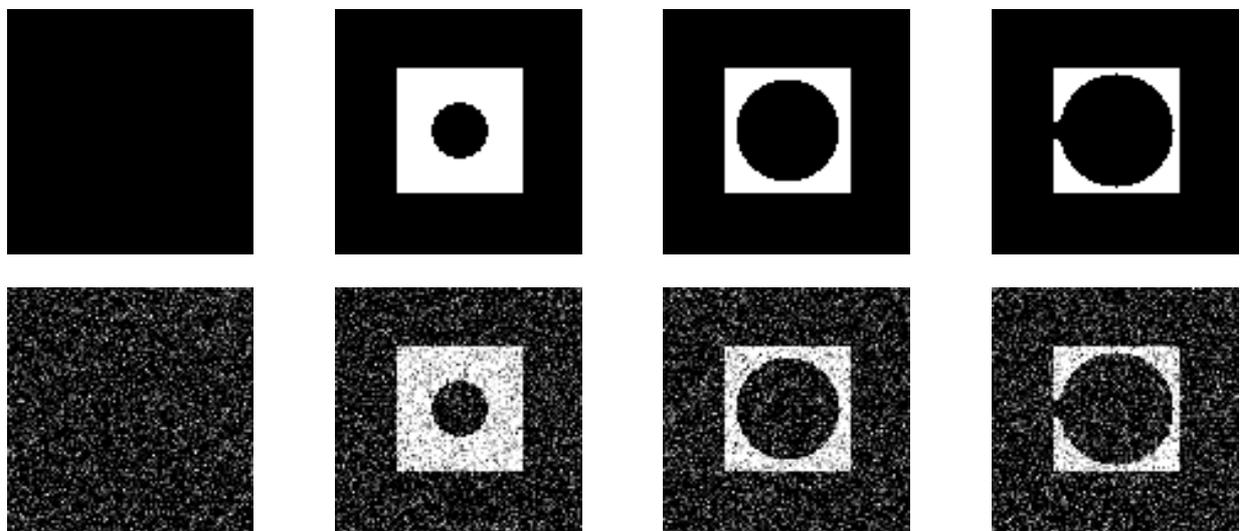


FIG. 5.18 – Coupes dans le volume reconstruit à la figure 5.19. En haut : image non bruitée. En bas : image dégradée par un bruit gaussien ($PSNR = 10\text{dB}$). L'image représente un cube dans lequel est creusée une cavité sphérique de rayon légèrement inférieur au côté du cube. La cavité communique avec l'extérieur par un tunnel cylindrique creusé au centre d'une des faces du cube. Les images sont de taille 100^3 voxels et le plongement est tel que la taille d'un voxel est $1 \times 1 \times 1$.

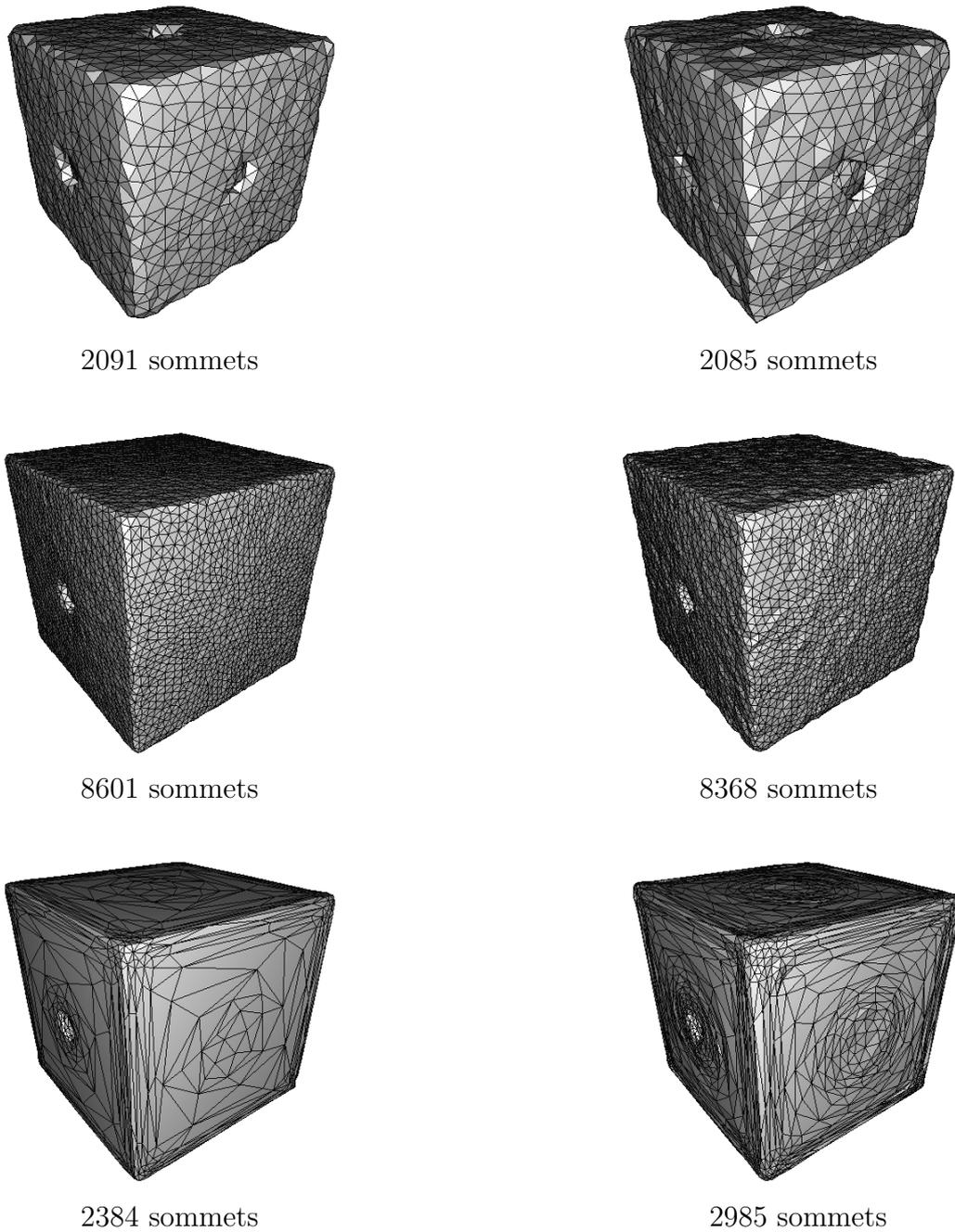


FIG. 5.19 – Reconstruction du volume présenté en coupe à la figure 5.18. À gauche reconstruction avec l'image non bruitée. À droite reconstruction avec l'image bruitée ($PSNR = 10\text{dB}$). Ligne du haut : modèle euclidien avec une taille de maille équivalente à 2 voxels. Ligne du centre : modèle euclidien avec une taille de maille équivalente à 1 voxel. Ligne du bas : modèle adaptatif (la plus petite arête est de taille comparable à la taille d'un voxel).

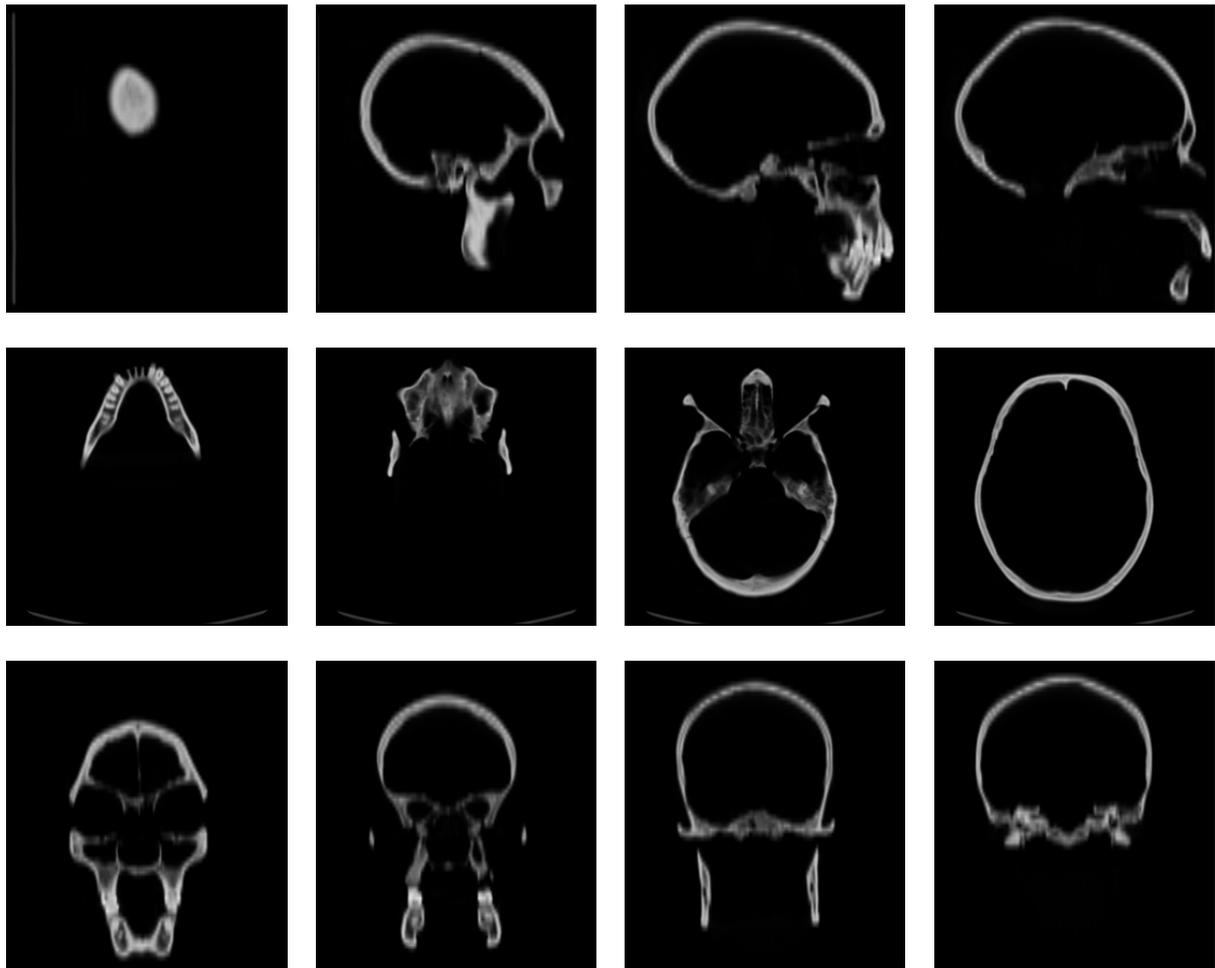


FIG. 5.20 – Coupes dans le volume de données (tomodensitométrie) qui représente le crâne reconstruit aux paragraphes 5.4 et 5.6.1. La résolution est de $256 \times 256 \times 68$.

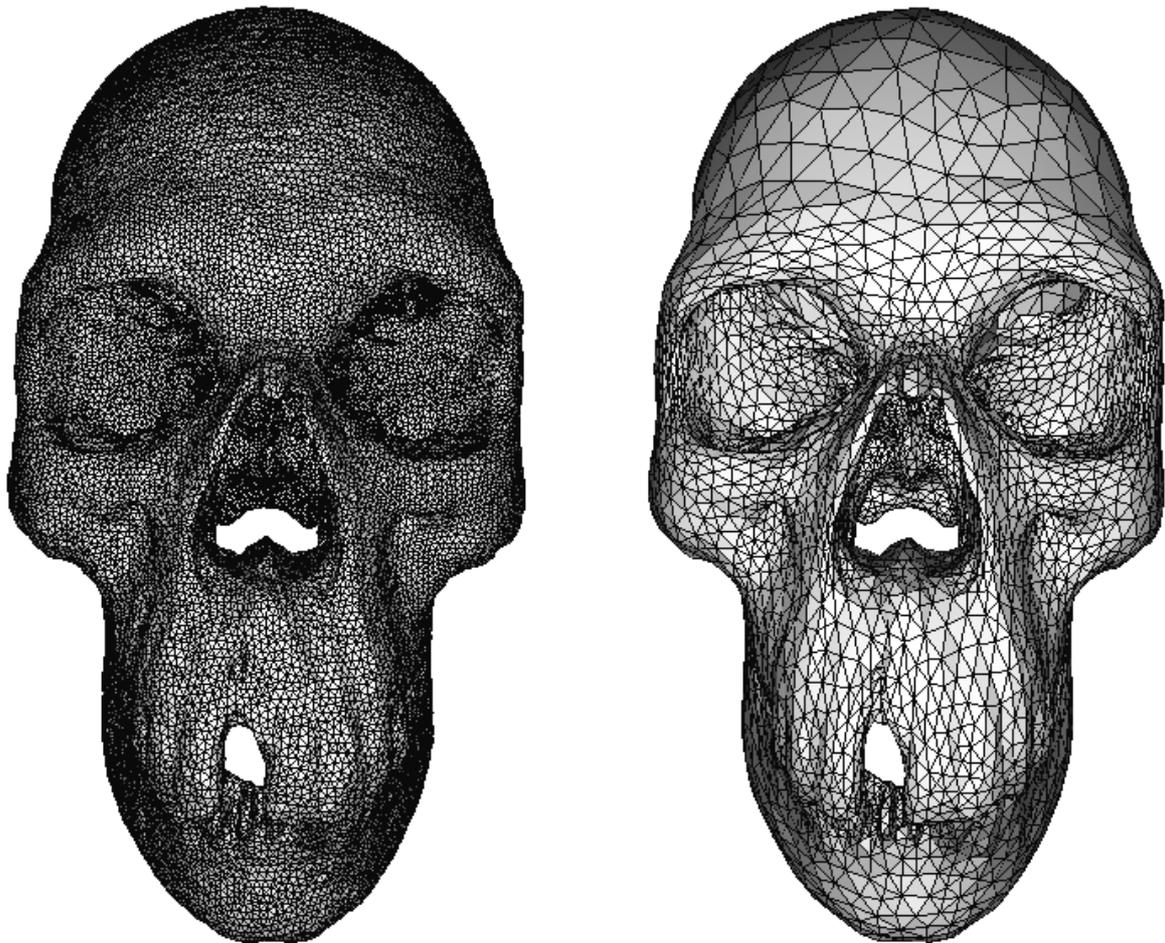


FIG. 5.21 – Vues de face des reconstructions du crâne (représenté à la en coupes figure 5.20) segmenté et reconstruit avec une métrique euclidienne à gauche et une métrique riemannienne à droite. Les temps de calcul et les nombre de sommets associés sont donnés dans la table 5.3.

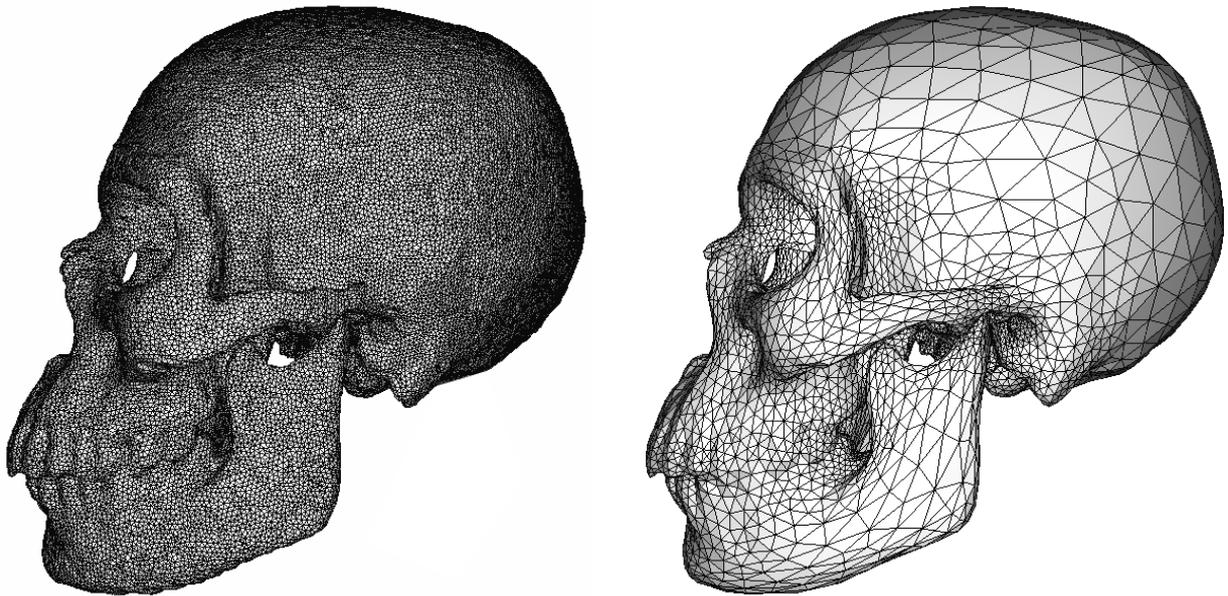


FIG. 5.22 – Vues de profil des reconstructions du crâne (représenté en coupes à la figure 5.20) segmenté et reconstruit avec une métrique euclidienne à gauche et une métrique riemannienne à droite. Les temps de calcul et les nombre de sommets associés sont donnés dans la table 5.3.

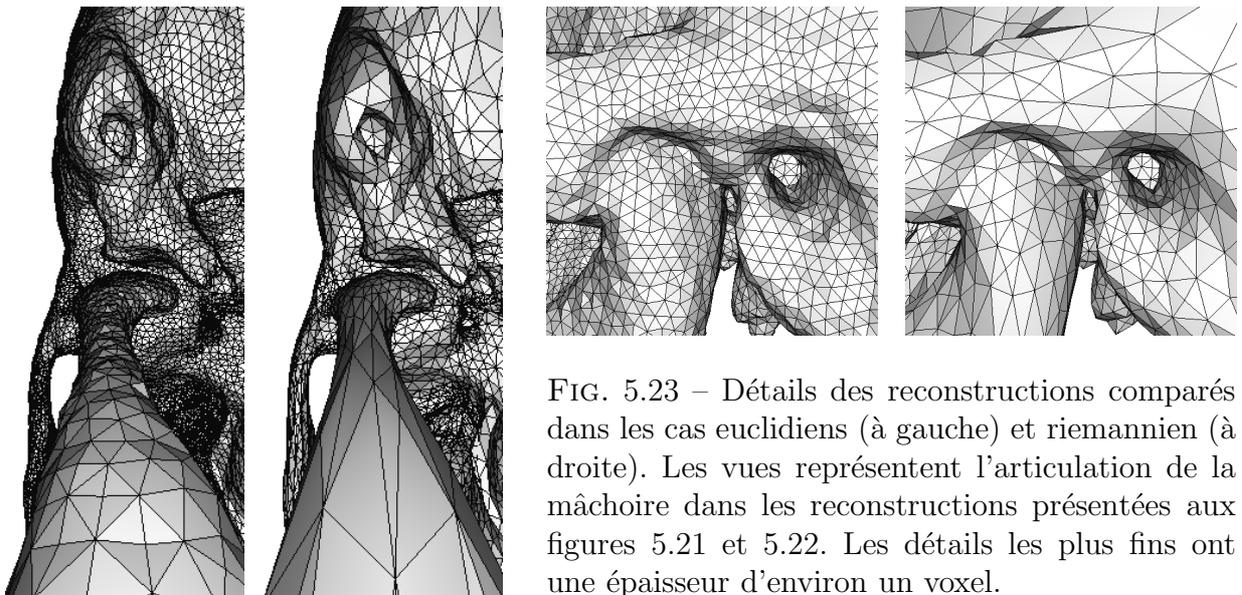


FIG. 5.23 – Détails des reconstructions comparés dans les cas euclidiens (à gauche) et riemannien (à droite). Les vues représentent l'articulation de la mâchoire dans les reconstructions présentées aux figures 5.21 et 5.22. Les détails les plus fins ont une épaisseur d'environ un voxel.

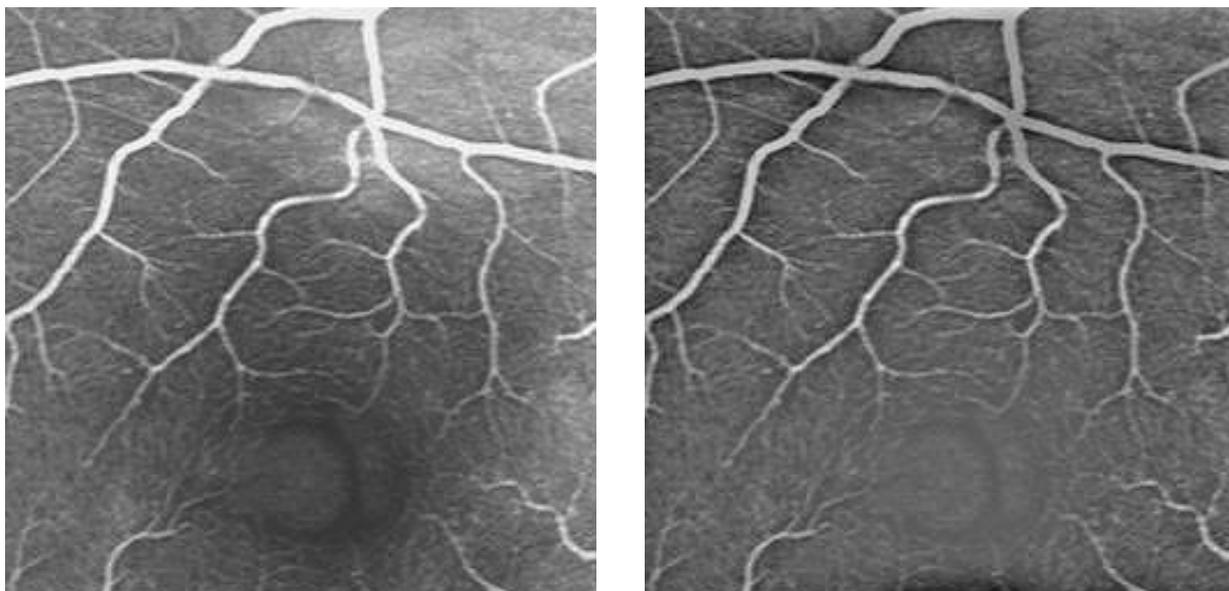


FIG. 5.24 – Gauche : angiographie fluorescente du fond de l'œil. Les vaisseaux sanguins transportent un produit fluorescent et apparaissent plus brillants que le fond. Droite : image corrigée en supprimant les basses fréquences de l'image pour rendre l'illumination plus homogène.

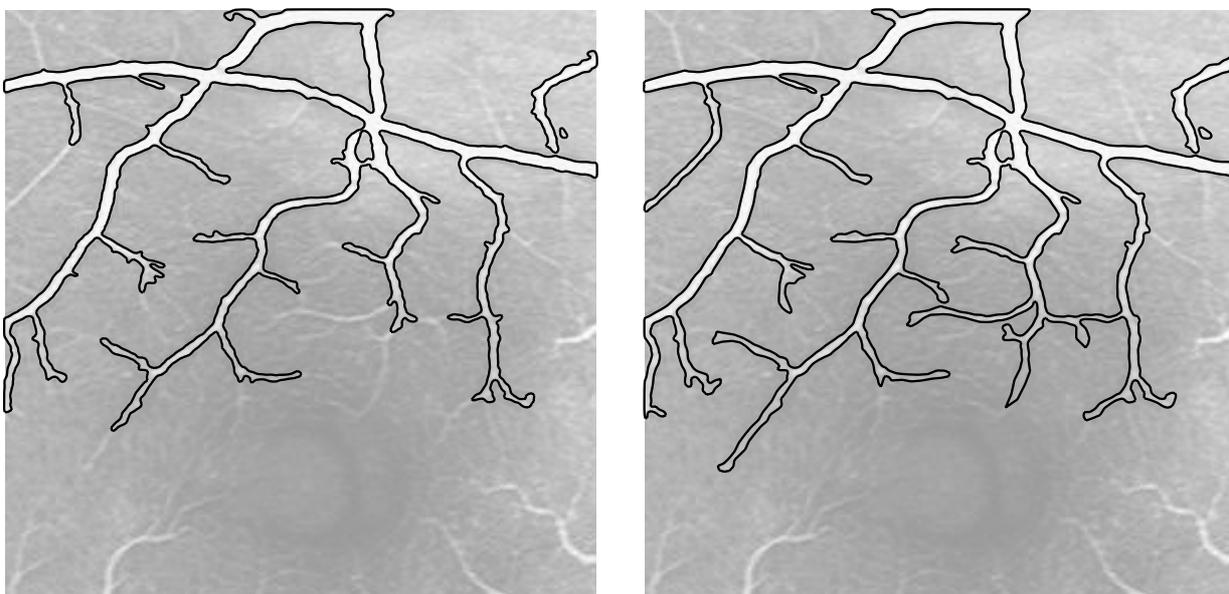


FIG. 5.25 – Résultats de segmentation/reconstruction pour l'angiographie fluorescente présentée à la figure 5.24. Gauche : résultats de la segmentation avec une métrique euclidienne (temps de convergence 102.4 s, 3 649 sommets). Droite : résultats avec une métrique riemannienne (temps de convergence 48.6 s, temps de calcul de la métrique 1.2 s, 2 070 sommets).

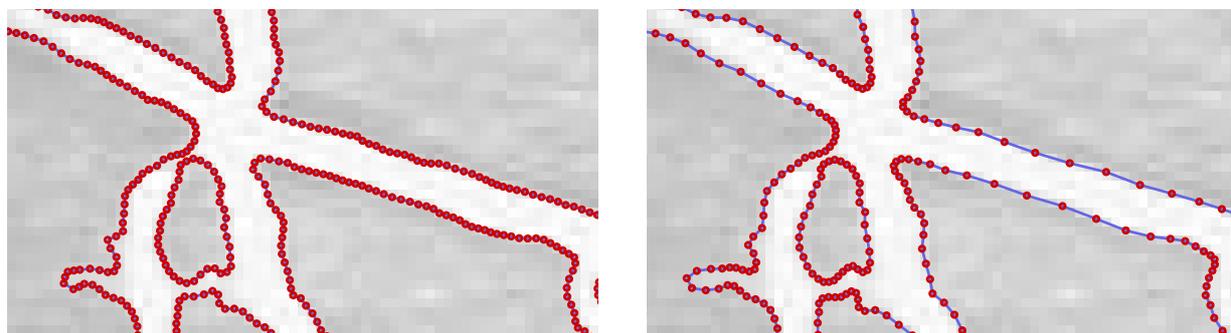


FIG. 5.26 – Détails de la segmentation/reconstruction présentée dans sa globalité à la figure 5.25.

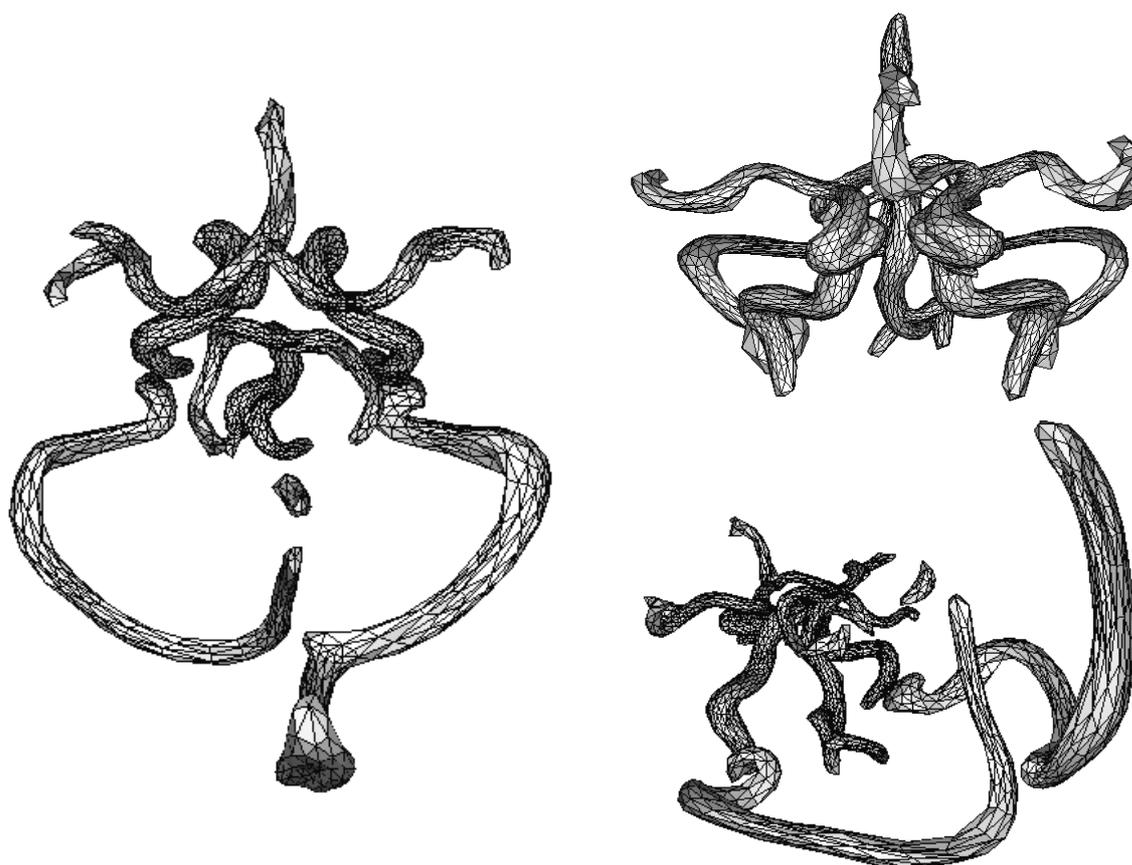


FIG. 5.27 – Différentes vues du résultat de la segmentation/reconstruction d'une l'angiographie par IRM à contraste de phase.

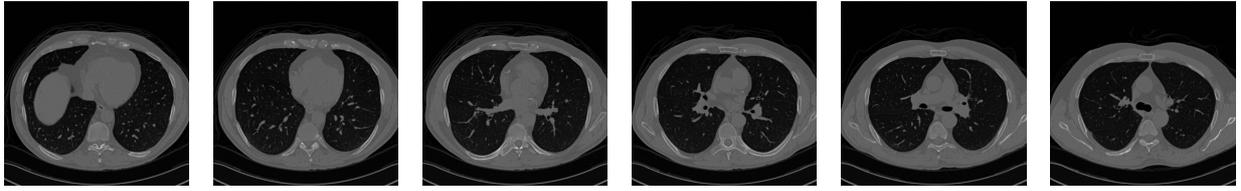


FIG. 5.28 – Coupes horizontales dans la tomographie du thorax. Voir la reconstruction des bronches à la figure 5.30.

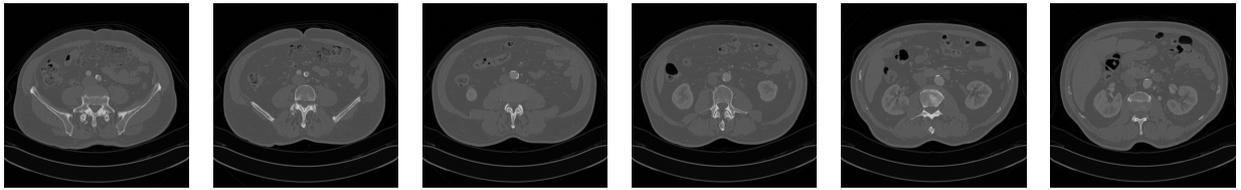


FIG. 5.29 – Coupes horizontales dans la tomographie de l'abdomen. Voir la reconstruction de l'aorte et de ses ramifications à la figure 5.31.

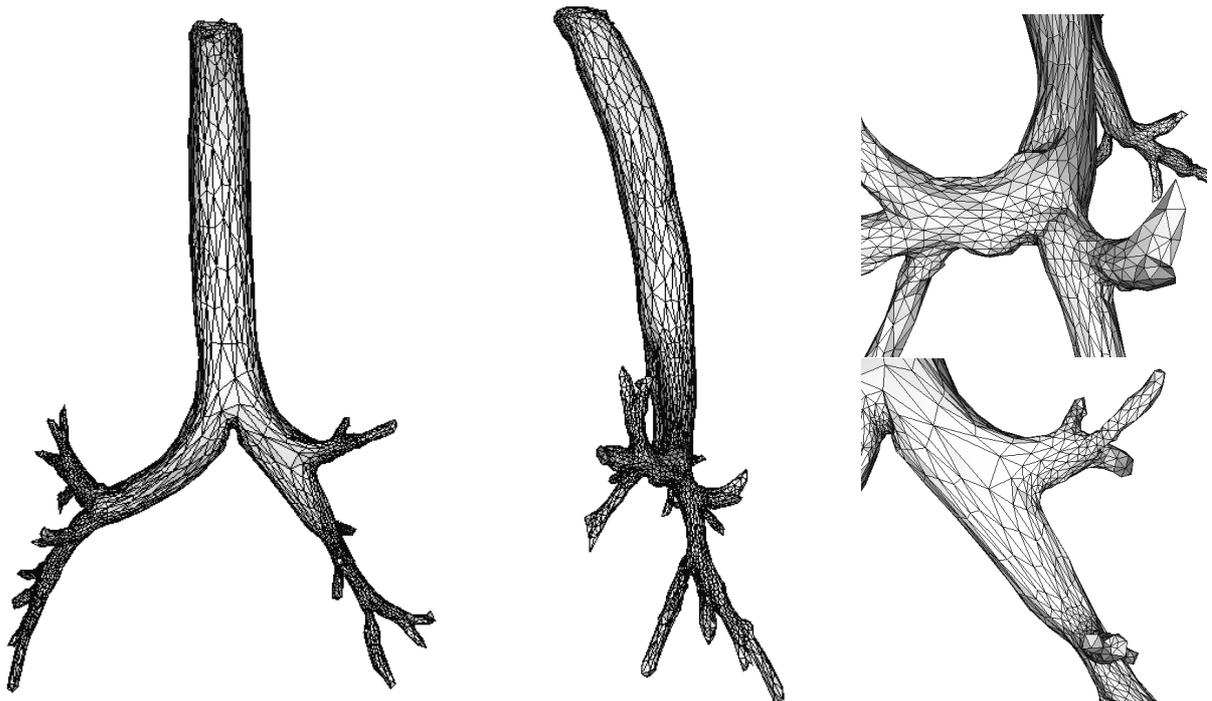


FIG. 5.30 – Reconstruction de l'arbre bronchique à partir d'une tomodensitométrie à rayons X. Gauche : vue de face. Centre : vue de profil. Droite : détails de la reconstruction qui mettent en évidence l'adaptation de la densité de sommet en fonction de la géométrie du modèle.

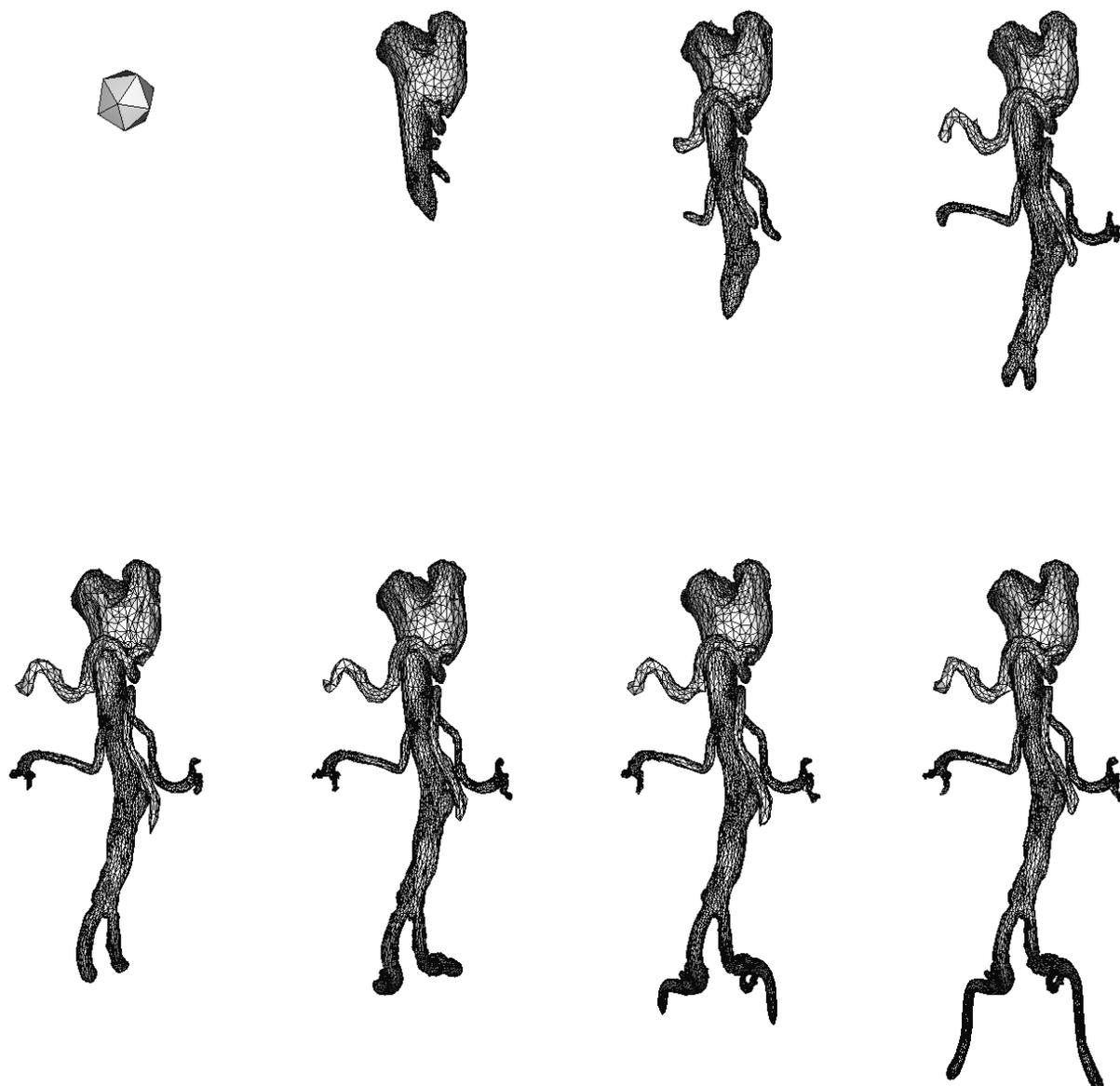


FIG. 5.31 – Étapes de la segmentation/reconstruction de l'aorte abdominale et de ses ramifications. L'excroissance au sommet de la structure n'est pas une erreur de segmentation mais est bien présente dans l'image.

Chapitre 6

Conclusion

6.1 Contributions

Cette thèse propose une extension au modèle déformable présenté par Lachaud et Montanvert [35]. Ce modèle permet d'extraire les objets d'intérêt échantillonnés dans des volumes de données. Son principal intérêt réside dans sa capacité à adapter dynamiquement sa topologie de manière à la maintenir cohérente avec sa géométrie. Cette aptitude, particulièrement utile lorsque les objets étudiés ont des formes complexes, s'accompagne malheureusement de coûts calculatoires importants : comme les autres modèles aux capacités similaires, sa complexité est directement déterminée par la résolution de l'image à traiter. La détection des auto-collisions de la surface déformable (nécessaire au maintien d'une topologie cohérente) n'est en effet possible qu'avec une maille suffisamment régulière c'est-à-dire avec une précision d'analyse uniforme. Pour exploiter tous les détails présents dans l'image, la longueur des arêtes doit rester du même ordre de grandeur qu'un pixel (ou un voxel en trois dimensions). Le travail présenté dans cette thèse lève en partie cette limitation : la notion de distance est déformée de manière à dilater virtuellement les zones les plus intéressantes de l'image. La longueur des arêtes de la maille déformable est donc découplée de la résolution des données à analyser, et ne dépend plus que de la géométrie des objets à reconstruire.

La première partie du travail présenté adapte la définition et le comportement du modèle déformable lorsqu'il évolue dans un espace muni d'une métrique non euclidienne. L'ensemble des caractéristiques du modèle déformable original sont revues dans ce contexte plus général :

- la méthode de détection des auto-collisions du modèle est revalidée pour tenir compte de la déformation de la notion de distance,
- la dynamique est reformulée dans le contexte plus général d'une variété riemannienne,
- les définitions des forces sont adaptées de manière à obtenir à la fois un comportement aussi invariant que possible par changement d'échelle et une stabilité accrue de la méthode d'intégration des équations du mouvement.

Remplacer la métrique euclidienne par une métrique riemannienne permet d'exercer un contrôle local sur la densité de sommets sur la maille du modèle déformable. Dans un voisinage, la longueur euclidienne des arêtes peut être adaptée indépendamment le long de trois axes orthogonaux en sélectionnant de manière appropriée les valeurs et vecteurs propres de la métrique.

Une méthode est proposée pour sélectionner ces paramètres automatiquement en tout point de l'image : le modèle déformable est contraint d'adapter sa résolution en fonction de la géométrie des objets détectables dans l'image et de la confiance accordée à l'information fournie par l'image : la longueur (euclidienne) des arêtes et inversement proportionnelle à la courbure des frontières reconstruites et, à courbure constante, inversement proportionnelle à l'intensité des contours rencontrés. L'algorithme de reconstruction introduit donc un nombre de sommets réduit tout en conservant une représentation précise des formes.

Pour construire la métrique qui amène à ce résultat, il est nécessaire d'estimer les courbures et directions principales des frontières des composantes de l'image. Une méthode est donc proposée pour surmonter la principale difficulté qui réside dans le fait que ces quantités doivent être calculées *avant* la segmentation : elles sont extraites directement à partir de l'image et non à partir d'une représentation géométrique des objets d'intérêt. La précision et la robustesse de l'approche proposée sont validées expérimentalement et comparées aux autres approches décrites dans la littérature.

Le comportement du modèle est validé sur des images de synthèses simples et pour lesquelles tous les paramètres sont connus. Ces tests démontrent que la densité de sommets s'adapte bien à la géométrie des composantes images et à l'intensité de leurs contours. Diverses segmentations/reconstructions d'images réelles sont également présentées. D'une part elles illustrent la pertinence de l'approche proposée, d'autre part elles mettent en évidence sa versatilité et la facilité avec laquelle elle peut être adaptée dans différents contextes.

6.2 Limites et perspectives

6.2.1 Initialisation

L'un des inconvénients majeurs des modèles déformables réside dans leur sensibilité à l'initialisation : une mauvaise position de départ peut conduire à une reconstruction erronée et se traduit en général par des temps de convergence accrus. Même si différentes techniques [13, 67, 72] limitent les effets d'une initialisation inappropriée, il reste préférable de positionner la surface déformable à proximité immédiate des structures à reconstruire avant de la laisser évoluer.

Si cette tâche peut être confiée à un utilisateur, elle se révèle en général fastidieuse, peu reproductible et n'est possible que lorsque l'objet d'intérêt possède une structure relativement simple à visualiser et éditer. Dans un contexte de segmentation d'images biomédicales telles que celles présentées à la fin du chapitre précédent cela est exclu, et il est donc préférable d'avoir recours à des procédés automatiques.

Lorsque les objets d'intérêts peuvent être caractérisés par leur niveau de gris dans l'image, une initialisation du modèle sous la forme d'une isosurface est envisageable. Les méthodes de *marching cubes* ou de *marching tetrahedrons* permettent d'obtenir une surface triangulée fermée proche des frontières recherchées. Les contraintes de régularité du modèle déformable permettent alors d'améliorer cette première représentation. Un grand nombre de petites composantes connexes créées par le bruit sont en effet détruites dès les premières itérations, et la surface est lissée.

Cependant, les complexités des méthodes de type *marching cubes* sont très dépendantes de la résolution de l'image traitée et, surtout, le nombre des triangles qui constituent les surfaces extraites peut être considérable. En outre, les triangulations produites par ces algorithmes sont relativement régulières et sont donc mal adaptées à l'initialisation du modèle présenté dans cette thèse. En effet, s'il est relativement facile de rétablir les contraintes géométriques lorsque le modèle évolue à partir d'une position "acceptable", la méthode utilisée se révèle très inefficace pour régulariser un modèle arbitraire. Pour initialiser le modèle déformable il serait donc utile de mettre au point des techniques particulières capables de régulariser (au sens riemannien) une maille quelconque (obtenue par une méthode de *marching cubes* classique), ou bien d'adapter la méthode de *marching cubes* de sorte qu'elle produise directement des maillages réguliers pour la métrique utilisée.

Une première idée relativement simple à mettre en œuvre, consisterait à régulariser la maille en remplaçant progressivement la métrique euclidienne par la métrique choisie. L'inconvénient majeur de cette approche résiderait dans le fait que la surface triangulée produite par la méthode de *marching cubes* resterait très volumineuse et ne serait adaptée que par la suite.

Une approche plus séduisante consisterait à produire directement une triangulation adaptative à partir de l'image. Pour y parvenir il est envisageable de construire une grille adaptative, régulière vis-à-vis de la métrique. L'image pourrait alors être rééchantillonnée aux nœuds de la grille obtenue, et une méthode de type *marching cubes* fournirait donc une surface triangulée adaptative directement utilisable comme initialisation pour le modèle déformable.

Pour construire un maillage adaptatif de l'espace il est envisageable d'utiliser des méthodes similaires à celles proposées par Vasilescu et Terzopoulos [61, 63] ou encore Balmelli *et al.* [5]. Ces approches s'apparentent de près à des modèles déformables classiques : une grille initiale est déformée itérativement de manière à augmenter sa résolution dans les zones intéressantes de l'image. L'ensemble des outils d'approximation des distances exposés dans ce manuscrit serait bien sûr directement réutilisable pour l'implémentation de ces algorithmes.

Comme suite à ces travaux, il serait également envisageable d'utiliser les grilles produites par des algorithmes de ce type comme support pour faire évoluer des représentations implicites de surface. L'intérêt serait le même que pour le modèle explicite présenté dans cette thèse : l'effort de calcul serait principalement consommé au voisinage des structures d'intérêt, et en fonction de leur géométrie. Toutefois, il conviendrait d'étudier en détail le comportement numérique des méthodes ainsi obtenues.

6.2.2 Construction des métriques

La méthode de construction des métriques proposée au chapitre 4 n'est qu'une possibilité parmi d'autres. Elle fournit de bons résultats lorsque les frontières des objets à reconstruire sont caractérisés par des contours forts. Pour un certain nombre d'applications cependant les objets d'intérêt sont mieux caractérisés par une information de région, voire simultanément par des informations de contours et de régions. Plusieurs travaux [10, 29] démontrent que l'incorporation de forces prenant en compte l'information de région dans la dynamique du modèle est possible. La prise en compte de ce type de critères non locaux dans la construction de la métrique pourrait donc se révéler utile. Elle ne trouve pas de réponse immédiate et il pourrait être intéressant de pousser plus loin les investigations dans cette direction.

Par ailleurs, la relation qui détermine la longueur des arêtes en fonction de la courbure des objets est purement arbitraire. Il serait plus pertinent de définir une mesure de l'erreur commise par le procédé de segmentation/reconstruction et de la relier à la fonction qui détermine la longueur des arêtes en fonction de la courbure de l'objet à reconstruire. Une étude précise du problème à été récemment proposée par Alauzet et Frey [3]. Si une telle étude se révélait concluante, il deviendrait raisonnable d'espérer obtenir une complexité optimale pour une qualité de segmentation requise.

6.2.3 Définition des forces

La plupart des modèles déformable n'utilisent pas directement l'image à traiter pour définir les forces, mais effectuent des précalculs d'une part pour mettre en valeur les structures d'intérêt mais également pour propager à une certaine distance l'information fournie par l'image en un point. Cette façon de procéder est plus satisfaisante que l'utilisation directe de l'image à analyser. En effet, plutôt que d'être liée à des caractéristiques purement locales, la force appliquée à un sommet rend compte d'une plus grande partie de l'information disponible dans un voisinage.

En particulier, Lachaud et Montanvert [34] utilisent une approche pyramidale qui lisse puis sous-échantillonne l'image à traiter, de manière à toujours travailler avec des arêtes de tailles voisines de celle d'un voxel. L'intérêt est que la force appliquée à chaque sommet correspond en réalité à l'intégration de l'information image sur un voisinage. Ce précalcul est possible car la densité de sommets sur la maille du modèle est uniforme. Lorsque l'espace est muni d'une métrique riemannienne ce n'est plus vrai et une telle approche n'est clairement pas satisfaisante. L'implémentation utilisée pour effectuer les expérimentations présentées au chapitre 5 utilise toujours une image dont la résolution est déterminée par la taille $\delta/\sqrt{\mu_{\max}}$ de la plus petite arête possible du modèle où μ_{\max} représente la plus grande valeur propre de la métrique sur tout le domaine de l'image.

Une approche plus satisfaisante exploiterait une image lissée différemment suivant les régions : il conviendrait de lisser fortement l'image lorsque les distances sont contractées et de laisser l'image pratiquement intacte là où la métrique dilate le plus fortement les distances. Les techniques de diffusion anisotrope [47] semblent bien adaptées au problème.

En particulier, Weickert [66] utilise le tenseur de structure de l'image pour élaborer un procédé de lissage qui préserve les contours de l'image et ses structures fortement courbées tout en lissant ses zones homogènes. L'adaptation de cette technique au cas qui nous concerne semble assez directe et pourrait être exploitée avantageusement pour améliorer le comportement du modèle déformable.

6.2.4 Applications possibles

Comme le démontrent les expérimentations présentées au dernier chapitre, le modèle proposé se révèle très versatile. Il est facile d'ajouter de nouvelles forces spécialement adaptées pour rechercher certaines structures d'intérêt.

Si les usages possibles sont très variées, l'imagerie biomédicale reste un domaine d'application privilégié. En effet, les organes étudiés ont souvent des formes complexes et peuvent se révéler anormaux, ce qui justifie le recours à des modèles robustes capables d'adapter automatiquement et dynamiquement leur topologie aux composantes trouvées dans les images. A ce jour, aucune mise en œuvre dans une application réelle n'a été entreprise, faute de temps d'une part et de l'expertise nécessaire d'autre part. Une application qui pourrait tirer avantage de la résolution adaptative du modèle serait la segmentation de la matière grise du cerveau, représentée. Pour s'insinuer dans les minces replis du cortex, la maille déformable doit en effet être particulièrement fine. Cependant une fois à convergence, la surface reste relativement régulière : une forte densité de sommets n'est donc utile que de manière très localisée. Il s'agit précisément du type de situations dans lesquelles l'approche proposée dans cette thèse prend son plus grand intérêt.

Par ailleurs, l'adaptation de triangulations à l'aide de métriques riemannienne peut être utilisée pour construire des grilles adaptées à la résolution de problèmes numériques par des méthodes de type éléments finis. En choisissant donc une métrique adaptée (là encore, voir les travaux d'Alauzet et Frey [3]) il est envisageable de construire, directement à partir des images, des représentations géométriques des objets étudiés bien adaptées à la simulation de phénomènes physiques. Par exemple, à partir de microtomographies osseuses, il est envisageable d'étudier la réponse de tissus osseux à diverses contraintes mécaniques.

D'autre part, il est également envisageable d'utiliser les métriques construites de la manière présentée au chapitre 4 comme support pour divers algorithmes de remaillage de surface. L'utilisation des algorithmes proposés par Alauzet et Frey [3] semble relativement immédiat. La méthode proposée par Peyré et Cohen [25] semble également utilisable : elle consiste à sélectionner itérativement des points sur la surface en choisissant à chaque étape le point le plus éloigné de tous les autres pour la métrique utilisée. Le résultat est donc un maillage de la surface régulier pour la métrique choisie, c'est-à-dire en réalité adaptatif si la métrique étend certaines régions plus intéressantes. L'efficacité de l'algorithme est garantie par l'utilisation de l'algorithme de *fast marching* [50] (voir le paragraphe 2.3.2 pour une description succincte). En revanche cela limite la méthode à l'usage de métrique isotropes (c'est-à-dire pour lesquelles toutes les valeurs propres sont égales). Pour pouvoir utiliser cet algorithme, il conviendrait donc soit de mettre au point une méthode pour supprimer l'anisotropie de la métrique construite comme indiqué au chapitre 4, soit de mettre au

point des techniques efficaces pour le calcul de cartes de distances pour des métriques anisotropes.

Enfin, les modélisations d'objets par des surfaces implicites fournissent un accès très facile aux caractéristiques géométriques des objets et en particulier à leurs normales et leurs directions propres. Il est donc facile de construire une métrique qui tienne compte de ces informations et permette de générer des surfaces triangulées avec un nombre de sommets optimisé pour une erreur de représentation donnée. Ces triangulations pourraient être exploitées dans un contexte de rendu ou de synthèse d'images.

6.2.5 Limite de stabilité

Bien que le modèle ait dans la pratique un comportement tout à fait acceptable, il est possible de mettre en évidence certains cas pathologiques pour lesquels il est impossible de trouver une configuration du modèle qui satisfasse les contraintes géométriques utilisées pour détecter les auto-collisions de la surface déformable. Un tel exemple est proposé à la figure 6.1.

Dans la pratique, ce type de configuration ne se produit que très rarement, et seulement lorsque la métrique présente des variations *exagérément importantes et rapides*. Ces remarques restent très floues et, naturellement, il serait nettement plus satisfaisant de définir précisément quand ce type de problème peut se produire et comment l'éviter. Malheureusement, la question semble particulièrement difficile à formaliser et à résoudre.

Sur un plan purement empirique, on constate que pour des valeurs propres de la métrique inférieures à 2 500 (ce qui correspond à une dilatation des longueurs d'un facteur 50) le modèle reste stable et fonctionne sans problème. Lorsque les valeurs propres maximales de la métrique s'approchent de ce seuil le modèle rencontre de difficultés croissantes pour régulariser la maille. La procédure de régularisation de la longueur des arêtes consomme alors une quantité de ressources déraisonnable.

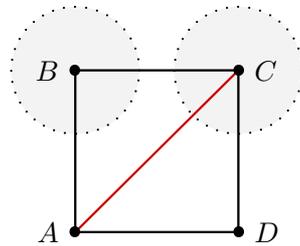


FIG. 6.1 – Exemple de configuration où il n'existe pas de point qui soit à la fois à égale distance de A et C et à égale distance de B et D . La métrique est euclidienne sur tout le plan excepté dans les disques centrés en B et C , où elle dilate les distances d'un facteur k important. Il est facile de rendre cette métrique C^∞ par convolution avec un noyau gaussien. Il est clair que si k est suffisamment grand l'ensemble des points équidistants de A et C n'intersecte pas l'ensemble des points équidistants de B et D . L'algorithme de régularisation des longueurs des arêtes se trouvera donc dans l'incapacité de subdiviser l'arête AC .

Annexe A

Géométrie riemannienne

A.1 Vecteur tangent comme opérateur différentiel

A.1.1 Définition

On donne ici une définition alternative de la notion de *vecteur tangent*. Cette définition est en réalité équivalente à celle proposée au paragraphe 3.2.3. Suivant les situations, l'une ou l'autre de ces définitions se révèle plus ou moins appropriée.

Pour définir la notion de vecteur tangent, on commence par définir la notion de *fonction germe*. Intuitivement une fonction germe est une fonction dont n'ont été conservées que les propriétés locales au voisinage d'un point choisi, c'est-à-dire la valeur de la fonction et de ses dérivées successives.

Plus formellement, on considère un point p sur un variété M et on s'intéresse à l'ensemble $\tilde{\mathcal{G}}_p$ des applications définies sur M au voisinage de p et à valeurs dans \mathbb{R} . On considère alors deux de ces applications $\tilde{f} : \mathcal{U}_{\tilde{f}} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{g} : \mathcal{U}_{\tilde{g}} \rightarrow \mathbb{R}$, et on dit qu'elles sont équivalentes (ce qu'on notera $\tilde{f} \sim \tilde{g}$), s'il existe un ouvert \mathcal{V} de M autour de p , inclus dans l'intersection $\mathcal{U}_{\tilde{f}} \cap \mathcal{U}_{\tilde{g}}$ et tel que

$$\forall q \in \mathcal{V}, \quad \tilde{f}(q) = \tilde{g}(q). \quad (\text{A.1})$$

Les classes d'équivalences de $\tilde{\mathcal{G}}_p$ pour la relation \sim seront appelées *fonctions germes* sur M en p . Leur ensemble, noté \mathcal{G}_p , est naturellement muni de lois d'addition et de multiplication par des scalaires, induites par celles de $\tilde{\mathcal{G}}_p$ et qui en font un espace vectoriel.

On appellera *vecteur tangent* à M en p , ou *opérateur différentiel du premier ordre* toute application linéaire D de \mathcal{G}_p dans \mathbb{R} qui vérifie la relation de Leibniz :

$$\forall f, g \in \mathcal{G}_p, \quad D(f \times g) = D(f) \times g + f \times D(g). \quad (\text{A.2})$$

Muni des lois d'addition et de multiplication externe :

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(f) &= D_1(f) + D_2(f), \\ (\lambda D)(f) &= \lambda(D(f)). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

leur ensemble est lui aussi un espace vectoriel, noté T_pM et qu'on appelle *espace tangent* à M en p .

A.1.2 Équivalence avec la définition précédente

Il est facile d'établir l'équivalence de la définition donnée au paragraphe précédent avec la définition donnée en 3.2.3.

Pour cela on se donne un vecteur tangent \mathbf{v} au sens du paragraphe 3.2.3, c'est-à-dire une classe d'équivalence de chemins sur M qui en p possèdent la même vitesse. On se donne un chemin quelconque γ dans cette classe et on définit l'opérateur différentiel $D_{\mathbf{v}}$ comme :

$$D_{\mathbf{v}}(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (\text{A.4})$$

On vérifie que l'application $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}$ est un isomorphisme de l'espace des classes d'équivalences de chemins sur l'espace des opérateurs différentiels sur les fonctions germes en p . Modulo cet isomorphisme, les deux notions sont donc équivalentes.

A.2 Géodésiques

On redémontre ici que tout chemin γ qui relie p à q et minimise l'intégrale

$$L_R(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right)^{\frac{1}{2}}}_{\sqrt{L(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n)}} dt \quad (\text{A.5})$$

est solution du système de n équations différentielles

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \ddot{\gamma}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0. \quad (\text{A.6})$$

Pour simplifier le problème, on cherche une courbe minimale avec un paramétrage tel que $L(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n)$ est une constante non nulle, indépendante du temps. Dans ce cas, les équations d'Euler-Lagrange se réécrivent :

$$\frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \gamma^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \sqrt{L}}{\partial \dot{\gamma}^i} = \frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial \gamma^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{L}} \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} \right). \quad (\text{A.8})$$

En éliminant le coefficient constant $\frac{1}{2\sqrt{L}}$ on reconnaît les équations d'Euler-Lagrange associée à :

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n) dt. \quad (\text{A.9})$$

Avec l'hypothèse d'un paramétrage telle que L est constant, minimiser la première fonctionnelle implique de minimiser la seconde.

On montre alors que toutes les courbes minimales pour (A.9) possèdent un paramétrage tel que $L(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n)$ est une constante non nulle. En conséquence, une courbe minimale pour (A.9) est aussi minimale pour (A.5). Pour démontrer cette propriété on introduit les équations d'Euler-Lagrange dans la dérivée de L par rapport au paramètre t :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i \frac{\partial L}{\partial \gamma^i} + \sum_{i=1}^n \ddot{\gamma}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{\gamma}^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} + \ddot{\gamma}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Or il est facile de vérifier que

$$\sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^i} = 2L. \quad (\text{A.11})$$

En substituant dans (A.10) on obtient immédiatement

$$\frac{dL}{dt} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Pour obtenir (A.6) il suffit alors d'écrire les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle (A.9) :

$$\begin{aligned} \forall k \in 1, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^k} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^k} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n g_{kj} \dot{\gamma}^j + \sum_{i=1}^n g_{ik} \dot{\gamma}^i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^k} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{kj}}{\partial \gamma^i} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial \gamma^j} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \\ &\quad - \sum_{j=1}^n g_{kj} \ddot{\gamma}^j - \sum_{i=1}^n g_{ik} \ddot{\gamma}^i = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

En renommant les indices muets, et en utilisant la symétrie de g , cela se réécrit encore :

$$\forall k \in 1, \dots, n, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \gamma^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial \gamma^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^k} \right) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + \sum_{l=1}^n g_{kl} \ddot{\gamma}^l = 0. \quad (\text{A.14})$$

En écrivant l'équation sous forme matricielle et en multipliant à gauche par la matrice inverse de g , on retrouve immédiatement (A.6) :

$$\forall k \in 1, \dots, n, \quad \ddot{\gamma}^k + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^n g^{kl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \gamma^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \gamma^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \gamma^l} \right)}_{\Gamma_{ij}^k} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0. \quad (\text{A.15})$$

A.3 Calcul de la métrique sur la sphère

Pour calculer la métrique sur la sphère de \mathbb{R}^3 , on commence par trouver la décomposition des deux vecteurs tangents $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial}{\partial\phi}$ sur la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$. Le produit scalaire sur $T_p\mathcal{S}_3$ est alors obtenu comme la restriction du produit scalaire (euclidien) g de $T_p\mathbb{R}^3$ à $T_p\mathcal{S}_3$ et est exprimé dans la base $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi})$.

On rappelle que la réciproque de la carte (θ, ϕ) est donnée par :

$$(\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\theta} = -\cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial\phi} = -\sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} - \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial x^3} \end{cases}. \quad (\text{A.17})$$

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on détermine facilement les trois coefficients :

$$\begin{cases} g_{(\theta,\phi)}(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}) = \cos^2 \phi \\ g_{(\theta,\phi)}(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi}) = g_{(\theta,\phi)}(\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\theta}) = 0 \\ g_{(\theta,\phi)}(\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\phi}) = 1 \end{cases}. \quad (\text{A.18})$$

On en déduit immédiatement la matrice de la métrique de $T_{(\theta,\phi)}\mathcal{S}_3$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi})$:

$$g_{(\theta,\phi)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Annexe B

Estimateurs de courbure

B.1 Courbure des lignes de niveau

On considère une application de classe C^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , et dont le gradient au point (x, y) est non nul. On montre que la courbure $\kappa_{|(x,y)}$ de la ligne de niveau de f qui passe en (x, y) peut s'écrire sous la forme :

$$\kappa_{|(x,y)} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) = \frac{2 f_{xy} f_x f_y - f_x^2 f_{yy} - f_y^2 f_{xx}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{B.1})$$

On suppose que la ligne de niveau f_0 qui passe en (x, y) est localement paramétrée par $u \in]-\epsilon; \epsilon[\mapsto c(u) = (x(u), y(u)) \in \mathbb{R}^2$, et on cherche à exprimer la tangente unitaire \mathbf{t} à c en fonction de f et de ses dérivées. Par définition,

$$f(x(u), y(u)) = f_0. \quad (\text{B.2})$$

En dérivant cette relation par rapport à u on obtient

$$(x'(u), y'(u)) \times \nabla f = 0. \quad (\text{B.3})$$

On obtient donc immédiatement :

$$\mathbf{t}_{|(x,y)} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \begin{pmatrix} f_y(x, y) \\ -f_x(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{|(x,y)} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Pour obtenir l'expression de la courbure, il suffit de calculer la quantité :

$$\kappa_{|(x,y)} = \frac{d\mathbf{t}_{|(x(u),y(u))}}{du} \Big|_{(x,y)} \cdot \mathbf{n}_{|(x,y)}. \quad (\text{B.5})$$

Il est aisé de vérifier que cela se réécrit :

$$\kappa_{|(x,y)} = \frac{2 f_{xy} f_x f_y - f_x^2 f_{yy} - f_y^2 f_{xx}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Application de Knutsson

On rappelle la définition de l'application de Knutsson K :

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \frac{\mathbf{v} \times {}^t\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

et on montre que :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial K}{\partial \mathbf{w}} \right\| = \sqrt{2} \|\mathbf{w}\|. \quad (\text{B.8})$$

Les coefficients de la matrice $K(\mathbf{v})$ s'écrivent :

$$K_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{v^i v^j}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (\text{B.9})$$

où les v^i désignent les composantes du vecteur \mathbf{v} sur la base canonique de \mathbb{R}^n . La dérivée partielle de K dans la direction v^k s'écrit :

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial v^k} \Big|_{\mathbf{v}} = \frac{\delta_{ik} v^j + \delta_{kj} v^i}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{v^i v^j v^k}{\|\mathbf{v}\|^2}, \quad (\text{B.10})$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ représente le symbole de Kronecker.

On exprime maintenant la dérivée de K dans la direction d'un vecteur \mathbf{w} supposé orthogonal à \mathbf{v} :

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^n w^k \frac{\partial K_{ij}}{\partial v^k} \Big|_{\mathbf{v}} \quad (\text{B.11})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{ik} w^k v^j + \delta_{kj} w^k v^i}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \sum_{k=1}^n v^i v^j v^k w^k \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{w^i v^j + w^j v^i}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (\text{B.13})$$

La norme de $\frac{\partial K}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{v}}$ s'exprime donc sous la forme :

$$\left\| \frac{\partial K}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{v}} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (w^i v^j + w^j v^i)^2} \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (w^i)^2 \times \sum_{i=1}^n (v^i)^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n w^i v^i}_{\text{nul car } \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0}} \quad (\text{B.15})$$

$$= \sqrt{2} \|\mathbf{w}\|. \quad (\text{B.16})$$

On obtient donc bien l'égalité (B.8).

Bibliographie

- [1] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148(1) :2–22, jan 1995.
- [2] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2) :269–277, 1995.
- [3] F. Alauzet and P. Frey. Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillage. Technical Report 4759, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, mar 2003.
- [4] Linear anisotropic mesh filtering. G. taubin. Technical Report RC-22213, IBM T.J. Watson Research Center, oct 2001.
- [5] L. Balmelli, C. Morris, G. Taubin, and F. Bernardini. Volume warping for adaptive isosurface extraction. In *Proc. IEEE Visualization 2002 Conference*, Boston, MA, oct 2002. IEEE Computer Society.
- [6] E. Bardinet, L.D. Cohen, and N. Ayache. Fitting of iso-surfaces using superquadrics and free-form deformation. In *Proc. IEEE Workshop on Biomedical Image Analysis*, Seattle, USA, jun 1994. IEEE Computer Society.
- [7] M. Berger. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer Verlag, jun 2003.
- [8] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66, 1993.
- [9] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proc. Int. Conference on Computer Vision 95*, pages 694–699, Boston MA, jun 1995.
- [10] A. Chakraborty, L. H. Staib, and J.S. Duncan. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 15(6) :859–870, dec 1996.
- [11] L. Cohen. Avoiding local minima for deformable curves in image analysis. In A. Le Mehaute, C. Rabut, and L. L. Schumaker, editors, *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*. Vanderbilt Univ. Press, Nashville, 1997.
- [12] L. Cohen, E. Bardinet, and N. Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, jul 1993.
- [13] L. D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53(2) :211–218, mar 1991.

-
- [14] L. D. Cohen and I. Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2d and 3d images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, nov 1993.
- [15] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models : a minimal path approach. *Int. Journal of Computer Vision*, 24(1) :57–78, aug 1997.
- [16] T.F. Cootes, A. Hill, C.J. Taylor, and J. Haslam. The use of active shape models for locating structures in medical images. *Image and Vision Computing*, 12(6) :355–366, jul 1994.
- [17] G. de Dietrich and A. Braquelaire. A framework for tubular organs segmentation. In V. Skala, editor, *Proc. Winter School of Computer Graphics 2004*, Plenz, Czech Republic, feb 2004. UNION Agency.
- [18] H. Delingette. Simplex meshes : A general representation for 3d shape reconstruction. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 856–859, Los Alamitos, CA, USA, jun 1994. IEEE Computer Society.
- [19] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. Research Report 3111, INRIA, Sophia Antipolis, France, feb 1997.
- [20] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2) :111–146, sep 1999.
- [21] H. Delingette. On smoothness measures of active contours and surfaces. In *Proc. 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 43–50, Vancouver, Canada, jul 2001. IEEE Computer Society.
- [22] H. Delingette and J. Montagnat. New algorithms for controlling active contours shape and topology. In D. Vernon, editor, *Proc. European Conference on Computer Vision 2000*, volume 1843 of *LNCS*, pages 381–395, Dublin, Ireland, jun 2000. Springer Verlag.
- [23] R. Deriche. Recursively implementing the gaussian filter and its derivatives. In *Proc. 2nd Int. Conference on Image Processing*, pages 263–267, Singapore, sep 1992.
- [24] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of minimal paths in 3d images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*, 5(4) :281–299, dec 2001.
- [25] O. Faugeras and N. Paragios, editors. *Geodesic remeshing and parameterization using front propagation*, Nice, France, October 2003. IEEE.
- [26] D.M. Gavrilu. Hermite deformable contours. In *Proc. Int. Conference on Pattern Recognition*, volume 1, Vienna, Austria, aug 1996. IEEE Computer Society.
- [27] J. Gomes and O. Faugeras. Reconciling distances functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2) :209–223, jun 2000.
- [28] S. Gottschalk, M.C. Lin, and D. Manocha. Obbtree : a hierarchical structure for rapid interference detection. In *Proc. 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 171–180, New Orleans, Louisiana, USA, aug 1996. ACM Press.

-
- [29] S. Jehan-Besson. *Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, jan 2003. in french.
- [30] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1987.
- [31] B. Kastler. *Comprendre l'IRM - Manuel d'auto-apprentissage*. MASSON, nov 2003.
- [32] S. Kim. A $O(n)$ level set method for eikonal equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(6) :2178–2193, apr 2001.
- [33] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998.
- [34] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Volumic segmentation using hierarchical representation and triangulated surface. In *Proc. 4th European Conference on Computer Vision, Cambridge, UK*, volume 1064 of *LNCS*, pages 137–146. Springer Verlag, apr 1996.
- [35] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Deformable meshes with automated topology changes for coarse-to-fine 3D surface extraction. *Medical Image Analysis*, 3(2) :187–207, 1999.
- [36] J.-O. Lachaud and B. Taton. Deformable model with adaptive mesh and automated topology changes. In *Proc. 4th Int. Conference on 3D Digital Imaging and Modeling (3DIM'03)*, pages 12–19, Banff, Canada, 2003. IEEE Computer Society.
- [37] J.-O. Lachaud and B. Taton. Resolution independant deformable model. In *Proc. 17th Int. Conference on Pattern Recognition*, Cambridge, UK, aug 2004. to appear.
- [38] F. Leitner and P. Cinquin. Complex topology 3d objects segmentation. In *Proc. of Advances in Intelligent Robotics Systems*, volume 1609 of *SPIE*, Boston, MA, nov 1991.
- [39] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape modelling with front propagation : A level set approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :158–174, feb 1995.
- [40] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical image segmentation using topologically adaptable snakes. In *Proc. of Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, pages 92–101, Nice, France, 1995. Springer Verlag.
- [41] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical image segmentation using topologically adaptable surfaces. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *LNCS*, pages 23–32, Grenoble, France, mar 1997. Springer.
- [42] R. G. N. Meegama and J. C. Rajapakse. Nurbs snakes. *Image and Vision Computing*, 21(6) :551–562, jun 2003.

- [43] O. Monga and S. Benayoun. Using partial derivatives of 3d images to extract typical surface features. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(2) :171–189, mar 1995.
- [44] J. Montagnat, H. Delingette, N. Scapel, and N. Ayache. Representation, shape, topology and evolution of deformable surfaces. application to 3d medical image segmentation. Technical Report RR-3954, INRIA, 2000.
- [45] J.-M Morel and S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhäuser, 1995.
- [46] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [47] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, jul 1990.
- [48] Frederic Precioso and Michel Barlaud. B-spline active contours with handling of topology changes for fast video segmentation. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2002(6) :555–560, jun 2002.
- [49] B. Rieger and L. J. van Vliet. Curvature of n -dimensional space curves in grey-value images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 11(7) :738–745, jul 2002.
- [50] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. of the National Academy of Science*, 93(4) :1591–1595, feb 1996.
- [51] J.A. Sethian. *Level Set Methods*, volume 3 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 1996.
- [52] L.H. Staib and J.S. Duncan. Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11) :1061–1075, nov 1992.
- [53] L.H. Staib and J.S. Duncan. Model-based deformable surface finding for medical images. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 15(5) :720–731, oct 1996.
- [54] J. Strain. Tree methods for moving interfaces. *Journal of Computational Physics*, 15(2) :616–648, may 1999.
- [55] G. Székely, A. Kelemen, C. Brechbühler, and G. Gerig. Segmentation of 2-d and 3-d objects from mri volume data using constrained elastic deformations of flexible fourier contour and surface models. *Medical Image Analysis*, 1(1) :19–34, mar 1996.
- [56] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling. Technical report, Digital Equipment Laboratory, Cambridge (Massachusetts), dec 1991.
- [57] B. Taton and J.-O. Lachaud. Deformable model with non-euclidean metrics. In A. Heyden, G. Sparr, M. Nielsen, and P. Johansen, editors, *Proc. of 7th European Conference on Computer Vision (ECCV'02)*, volume 2352 of *LNCS*, pages 438–453, Copenhagen, may 2002. Springer Verlag.

- [58] B. Taton and J.-O. Lachaud. Modèle déformable en métrique non-euclidienne. In *Actes du 13ème Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'02)*, Angers, France, jan 2002.
- [59] G. Taubin. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. In *Proc. of the 5-th Int. Conference on Computer Vision*, pages 902–907, Cambridge (Massachusetts), jun 1995. IEEE Computer Society.
- [60] D. Terzopoulos and D. Metaxas. Dynamic 3d models with local and global deformations : deformable superquadrics. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7) :703–714, jul 1991.
- [61] D. Terzopoulos and M. Vasilescu. Sampling and reconstruction with adaptive meshes. In *Proc. CVPR'91*, pages 70–75, Lahaina, jun 1991. IEEE.
- [62] L. van Vliet, I. Young, and P. beek. Recursive gaussian derivative filters. In *Proc. of 14th Int. Conference on Pattern Recognition (ICPR'98)*, volume 1, pages 509–514, Brisbane, Aug 1998. IEEE Computer Society.
- [63] M. Vasilescu and D. Terzopoulos. Adaptive meshes and shells. In *Proc. CVPR'92*, pages 829–832, Champain, jun 1992. IEEE Computer Society.
- [64] B. C. Vemuri and A. Radisavljevic. Multiresolution stochastic hybrid shape models with fractal priors. *ACM Transactions on Graphics*, 13(2) :177–207, apr 1994.
- [65] Baba C. Vemuri, Yanlin Guo, Christiana M. Leonard, and Shang-Hong Lai. Fast numerical algorithms for fitting multiresolution hybrid shape models to brain mri. *Medical Image Analysis*, 1(4) :343–362, sep 1997.
- [66] J. Weickert. Multiscale texture enhancement. In V. Hlaváč and R. Šára, editors, *Proc. of Computer Analysis of Images and Patterns, Prague, Czech Republic*, volume 970 of *LNCS*, pages 230–237. Springer, 1995.
- [67] C. Xu and J. L. Prince. Generalized gradient vector flow external force for active contour. *Signal Processing*, 71(2) :131–139, 1998.
- [68] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3) :359–369, mar 1998.
- [69] C. Xu, A. Jr. Yezzi, and J.L. Prince. On the relationship between parametric and geometric active contours. In *Proc. of 34-th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 483–489, Pacific Grove, USA, oct 2000. IEEE Computer Society.
- [70] C. Xu, A. Jr. Yezzi, and J.L. Prince. A summary of geometric level-set analogues for a general class of parametric active contours and surface models. In *Proc. of 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 104–111, Vancouver, Canada, jul 2001. IEEE Computer Society.
- [71] A. Jr. Yezzi, S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, and A. Tannenbaum. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(2) :199–209, apr 1997.

- [72] Z. Yu and C. Bajaj. Normalized gradient vector diffusion and image segmentation. In A. Heyden, G. Sparr, M. Nielsen, and P. Johansen, editors, *Proc. of 7th European Conference on Computer Vision (ECCV'02)*, volume 2352 of *LNCS*, pages 517–531, Copenhagen, May 2002. Springer.
- [73] A. Yuille, P.W. Hallinan, and D.S. Cohen. Feature extraction from faces using deformable templates. *Int. Journal of Computer Vision*, 8(2) :99–111, aug 1992.