

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Discipline : Informatique

présentée et soutenue publiquement

par

Jacques-Olivier LACHAUD

le 9 juillet 1998

Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable

Directeur de thèse: Mme Annick MONTANVERT

COMPOSITION DU JURY

| | |
|---------------------|------------|
| Bernard LACOLLE, | Président |
| Laurent COHEN, | Rapporteur |
| Pascal LIENHARDT, | Rapporteur |
| Jean-Marc CHASSERY, | Examineur |
| Hervé DELINGETTE, | Examineur |
| Annick MONTANVERT, | Examineur |

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein du laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, à l'ENS Lyon, et du laboratoire TIMC/IMAG, à Grenoble. Je tiens ici à exprimer tous mes remerciements et ma plus vive gratitude à :

- Bernard Lacolle, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury,
- Laurent Cohen et Pascal Lienhardt, qui ont eu la gentillesse d'accepter d'être rapporteurs de cette thèse, avec tout le travail que cela représente, et qui ont su me donner commentaires, conseils et encouragements au moment où j'en avais le plus besoin,
- Hervé Delingette, pour avoir accepté de participer à mon jury, et dont les travaux ont profondément influencé ma thèse,
- Jean-Marc Chassery, pour m'avoir accueilli dans son équipe pendant cette dernière année de thèse, pour son enthousiasme et ses précieux conseils, et pour l'ambiance qui règne dans son équipe grâce à lui.

Je tiens bien sûr à remercier tout spécialement Annick Montanvert, qui a su diriger mes recherches pendant ces trois années, grâce à une confiance en mes capacités constamment renouvelée. Elle a su me laisser une grande autonomie et, malgré un emploi du temps inhumain, me consacrer le temps nécessaire pour que ma thèse se déroule dans les meilleures conditions. Grâce à elle, j'ai découvert le monde de la recherche et appris qu'un chercheur ne fait pas que chercher. Je la remercie pour tout cela et plus encore pour tous les bons moments que nous avons eu, qui ont réussi à forger une amitié et un respect mutuels.

Deux années de ma thèse se sont déroulées au LIP, et je remercie vivement Michel Cosnard et Yves Robert de m'avoir accueilli dans leur laboratoire. J'ai pu y faire la connaissance de gens passionnants, et ma reconnaissance va particulièrement à Serge Miguet.

Comment parler du LIP, sans parler du bureau 314, haut-lieu culturel où sévissaient Jean-Marc Pierson et Jean-Marc Nicod, mes deux acolytes de bureau. Qu'ils soient éternellement remerciés pour ces deux années passées ensemble. Je tiens aussi à remercier tout spécialement le grimpeur Pierre-Yves Calland et le philosophe Thierry Chich (deux baby-footers de la première heure), le sociologue Richard Baron (vive l'aviron libre), le pilier Olivier Peyran et le graphologue Cyril Gavaille. Merci pour ces excellentes années.

L'intermède militaire à Paris n'aura pas complètement été perdu. J'ai eu la chance d'être avec des compagnons d'infortune de haute volée et je remercie tout particulièrement les membres de Janus, alias Guillaume Berche (BEEEEERRRCHE !!), Jean-Michel Savignat et Xavier Cavin.

Ma dernière année s'est déroulée à TIMC. Là-bas, j'ai pu côtoyer un certain nombre de personnes qui ont grandement influencé mes travaux et ma personnalité : Laurent Héliot et Dominique Attali (mes co-bureaux), Fabien Mongelard et Yves Usson (les biologistes). Enfin, un grand merci à toute l'équipe Infodis (mais aussi aux équipes SIC et RFMQ) pour leur accueil et leur excellente compagnie pendant cette dernière année, avec des remerciements tout particulier pour Joëlle Vittone, Patrick et Ingrid Bas, Didier Morel, ainsi que pour Paulette Souillard et Nicole Brochier.

J'adresse aussi ma plus vive gratitude aux gens que j'ai pu rencontrer dans le cadre de conférences (je pense particulièrement à Ruzena Bajcsy et Walter Kropatsch) et dans le cadre du projet « cœur battant » (avec une mention spéciale pour Marie-Paule Cani-Gascuel et Mathieu Desbrun).

En l'honneur de tous ces hommes et ces femmes qui se battent pour le bonheur de l'humanité, je salue respectueusement Rodolphe, Pascal, Guillaume et Marc, qui œuvrent dans l'ombre pour la promotion de la recherche.

Je remercie aussi ma famille au grand complet pour leur constant soutien affectif.

Enfin, je tiens à remercier tout spécialement Nadège, qui a réussi l'exploit, somme toute assez rare, de supporter le même thésard pendant ses trois années d'errements.

En bref, merci à toutes et à tous.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Préambule | 9 |
| 1 Imagerie tridimensionnelle | 11 |
| 1.1 Introduction | 11 |
| 1.2 Moyens d'acquisition | 12 |
| 1.2.1 En médecine | 12 |
| 1.2.2 En biologie | 13 |
| 1.3 Exploitation des données volumétriques | 14 |
| 1.4 Organisation de la thèse | 15 |
| 2 Extraction de structures géométriques de données volumétriques | 17 |
| 2.1 Introduction | 17 |
| 2.2 Méthodes discrètes de reconstruction | 18 |
| 2.2.1 Segmentation et classification des données | 18 |
| 2.2.2 Extraction directe d'un modèle géométrique | 22 |
| 2.3 Segmentation/reconstruction par modèle déformable | 24 |
| 2.3.1 Modèle déformable | 25 |
| 2.3.2 Approche frontière: image de contours | 25 |
| 2.3.3 Approches hybrides | 26 |
| 2.4 Conclusion | 26 |
| 3 Reconstructions discrètes | 29 |
| 3.1 Introduction | 29 |
| 3.2 Génération d'iso-surfaces | 31 |
| 3.3 Topologie digitale et combinatoire | 32 |
| 3.3.1 Définitions | 32 |
| 3.3.2 Plongement d'ensembles de voxels dans l'espace Euclidien | 34 |
| 3.3.3 Intérieur et extérieur de variétés | 36 |
| 3.3.4 Variétés combinatoires | 36 |
| 3.4 Construction de l'iso-surface | 38 |
| 3.4.1 Propriétés attendues des iso-surfaces | 38 |
| 3.4.2 Construction locale sur une configuration | 39 |
| 3.4.3 Construction de l'iso-surface toute entière | 46 |
| 3.5 Subdivision de la $\kappa\lambda$ -iso-variété | 47 |
| 3.5.1 Subdivision g -convexe | 48 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.5.2 | Séparation du fond et du devant | 50 |
| 3.5.3 | Obtention de la $\kappa\lambda$ -iso-surface | 53 |
| 3.6 | Résultats expérimentaux | 53 |
| 3.6.1 | Calcul des tables de configurations | 53 |
| 3.6.2 | Résultats sur des images synthétiques | 54 |
| 3.6.3 | Application à la reconstruction de données médicales | 56 |
| 3.7 | Propriétés des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces | 56 |
| 3.7.1 | Définitions | 57 |
| 3.7.2 | Adjacence entre surfels de l'interface | 60 |
| 3.7.3 | Lien surfaces digitales et iso-surfaces | 61 |
| 3.8 | Conclusion | 63 |
| 4 | Modèles déformables en imagerie | 65 |
| 4.1 | Introduction | 65 |
| 4.2 | Déformation par minimisation d'énergie | 67 |
| 4.2.1 | Modèles actifs élastiques | 68 |
| 4.2.2 | Autres contours actifs élastiques (2D) | 70 |
| 4.2.3 | Extension 3D : les surfaces actives | 71 |
| 4.2.4 | Modèles actifs paramétriques | 72 |
| 4.3 | Modèles déformables probabilistes | 73 |
| 4.3.1 | Formulation | 73 |
| 4.3.2 | Lien avec la minimisation d'une énergie | 75 |
| 4.4 | Evolution par application de forces locales | 76 |
| 4.4.1 | Modèles non-structurés | 76 |
| 4.4.2 | Modèles à structure fixe | 76 |
| 4.4.3 | Modèles à structure variable | 77 |
| 4.5 | Modèles déformables à base physique | 77 |
| 4.6 | Approche discrète des déformations | 79 |
| 4.7 | Déformations basées sur un modèle de référence | 80 |
| 4.8 | Approche Eulerienne | 81 |
| 4.8.1 | Formulation | 82 |
| 4.8.2 | Extensions et discussion | 83 |
| 4.8.3 | Lien avec la minimisation d'une énergie | 84 |
| 4.9 | Conclusion | 84 |
| 4.9.1 | Discussion sur les modèles présentés | 84 |
| 4.9.2 | Elaboration d'un modèle générique | 85 |
| 5 | Modèle générique pour la segmentation/reconstruction d'images 3D | 87 |
| 5.1 | Motivation | 87 |
| 5.2 | Descriptif du modèle | 88 |
| 5.3 | Géométrie et topologie | 89 |
| 5.3.1 | Une surface combinatoire triangulée | 89 |
| 5.3.2 | Contraintes géométriques | 93 |
| 5.3.3 | Transformations topologiques Euleriennes | 95 |
| 5.3.4 | Transformations topologiques non-Euleriennes | 96 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3.5 | Raffinement | 102 |
| 5.3.6 | Autres modèles à topologie adaptative | 103 |
| 5.4 | Dynamique et évolution du modèle | 106 |
| 5.4.1 | Dynamique Lagrangienne | 106 |
| 5.4.2 | Contraintes internes | 106 |
| 5.4.3 | Lien avec la minimisation d'une énergie | 107 |
| 5.4.4 | Estimation et influence des paramètres | 108 |
| 5.4.5 | Heuristique de traitement des sommets immobiles | 108 |
| 5.4.6 | Résolution numérique | 109 |
| 5.5 | Interaction avec les données | 112 |
| 5.6 | Espace image et multi-résolution | 114 |
| 5.6.1 | Approche multi-échelle avec des pyramides | 114 |
| 5.6.2 | Pyramide d'images 3D de réduction arbitraire | 115 |
| 5.6.3 | Relation image – modèle | 119 |
| 5.6.4 | Surface évoluant dans une image anisotrope | 121 |
| 5.7 | Algorithme de segmentation/reconstruction | 122 |
| 5.7.1 | Évolution dynamique, géométrique et topologique | 122 |
| 5.7.2 | Segmentation/reconstruction | 122 |
| 5.8 | Conclusion | 125 |
| 6 | Applications en imagerie biomédicale | 129 |
| 6.1 | Présentation des données | 129 |
| 6.1.1 | Coupes dans les données volumétriques | 129 |
| 6.1.2 | Iso-surfaces extraites | 131 |
| 6.2 | Segment./Recons. par modèle déformable | 134 |
| 6.2.1 | Comparaison approche directe/pyramidale | 134 |
| 6.2.2 | Autres exemples | 140 |
| 6.2.3 | Optimisation de la convergence | 141 |
| 6.3 | Enchaînement des deux approches | 143 |
| 6.3.1 | Simplification par modèle déformable | 143 |
| 6.4 | Robustesse du modèle déformable | 146 |
| 6.4.1 | Vis-à-vis de la multi-résolution | 146 |
| 6.4.2 | Vis-à-vis du paramétrage | 147 |
| 6.5 | Conclusion | 148 |
| 7 | Conclusion et perspectives | 149 |
| 7.1 | Résumé et contributions | 149 |
| 7.2 | Perspectives | 151 |
| A | Eléments de topologie des surfaces | 155 |
| A.1 | Définitions | 155 |
| A.1.1 | Variétés et surfaces | 155 |
| A.1.2 | Orientation des 2-variétés dans \mathbb{R}^3 sans bord | 156 |
| A.1.3 | Polyèdres | 159 |
| A.1.4 | Objets et variétés combinatoires | 160 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A.2 | Propriétés et théorèmes | 163 |
| A.2.1 | Variétés et surfaces | 163 |
| A.2.2 | Triangulations | 164 |
| A.3 | Classification des surfaces | 165 |
| A.3.1 | Classification et invariants topologiques | 165 |
| A.3.2 | Caractéristique d'Euler des surfaces triangulées | 165 |
| A.4 | Homotopie | 166 |
| B | Singularités lors d'évolution de surfaces | 167 |
| C | Justification analytique des transformations topologiques | 171 |

Préambule

L'imagerie tridimensionnelle regroupe l'acquisition, l'exploitation et l'interprétation de données volumétriques (on dit aussi *images tridimensionnelles*). C'est un domaine qui connaît un plein essor depuis une dizaine d'années, notamment grâce aux progrès techniques et à ses nombreux débouchés dans les domaines médicaux et biologiques.

Si leur simple visualisation est utile pour appréhender les formes composant l'image, elle ne suffit pas pour en extraire des informations quantitatives, informations indispensables à toute exploitation. Il faut donc extraire des représentations géométriques des constituants de l'image, sous forme de surfaces ou de volumes. Les caractéristiques géométriques, topologiques, physiques ou statistiques des différentes composantes de l'image sont déduites de ces représentations.

Cette extraction rassemble deux opérations majeures sur les données : la *segmentation*, qui réalise une partition de l'image en ses composantes, et la *reconstruction*, qui transforme les composantes détectées en structures géométriques.

Cette thèse s'inscrit dans cette problématique de segmentation/reconstruction, en explorant différentes approches, et en combinant leurs spécificités. Dans un premier temps, nous évoquons le contexte d'utilisation que nous avons approfondi, à savoir l'imagerie biomédicale tridimensionnelle, puis nous rappelons les deux approches mises en œuvre pour répondre à cette problématique : les algorithmes de *reconstruction discrète* et les *modèles déformables*.

Nous étudions d'abord les algorithmes de *reconstruction discrète*, qui s'appuient sur la nature discrète des données pour en extraire rapidement des représentations géométriques. Par une approche formelle, nous proposons un algorithme de reconstruction qui fait le lien entre les deux méthodes discrètes les plus couramment employées (le *marching-cubes* et le suivi de surfaces digitales).

L'inconvénient des approches précédentes est de négliger le problème de la segmentation des données : elles font l'hypothèse que les données ont été segmentées préalablement ou que leur simple *seuillage* est suffisant pour isoler les différents constituants.

Un *modèle déformable* réunit les deux aspects de la segmentation/reconstruction, car il s'appuie sur sa forme géométrique et sur des contraintes issues de l'image pour en estimer de plus en plus précisément les composantes. Sa forme géométrique finale représente directement la composante de l'image extraite.

Les modèles déformables sont très souvent limités à l'extraction de formes simples. Nous proposons un modèle générique, basé sur une surface triangulée hautement déformable, apte à appréhender des formes arbitrairement complexes, et réunissant des caractéristiques intéressantes provenant de modèles déformables variés.

Nous appliquons les deux approches à des données biomédicales, afin d'estimer leurs qualités respectives et de mesurer la validité et la robustesse des approches proposées. Nous

montrons enfin les potentialités offertes par la combinaison des deux approches.

Si les approches proposées ont été appliquées à l'extraction de formes d'images biomédicales, elles peuvent aussi être employées dans d'autres domaines. En topologie digitale, les propriétés des surfaces extraites par notre algorithme de reconstruction discrète montrent l'équivalence entre une représentation combinatoire et une représentation discrète des images. En outre, de nombreux domaines ont besoin de modèles géométriques possédant une topologie adaptative : en modélisation, en animation et synthèse d'images, en reconstruction de données non-structurées, en simulation, etc. Ces applications constituent autant de nouvelles directions de recherche, qu'il est intéressant de poursuivre.

Chapitre 1

Imagerie tridimensionnelle

1.1 Introduction

L'imagerie tridimensionnelle est un domaine récent, en pleine expansion, qui est apparu avec la mise au point de modalités d'acquisition d'images effectuant l'échantillonnage d'un volume d'espace. Elle autorise l'examen de structures internes de manière non-invasive, souvent avec une totale innocuité. Ces modalités sont particulièrement intéressantes dans l'examen de tissus vivants.

Les techniques d'imagerie tridimensionnelle sont devenues indispensables en médecine, notamment dans l'aide au diagnostic pour le spécialiste. Les pathologies peuvent ainsi être détectées dans un état d'avancement moindre, avant même l'apparition de symptômes externes. Ces techniques permettent au chirurgien de localiser précisément les tumeurs et foyers infectieux et de mesurer leur étendue. En biologie, elles fournissent une carte des structures biologiques microscopiques, dont l'étude permet leur interprétation fonctionnelle. La géologie s'intéresse aussi à ce nouveau domaine, par exemple dans l'analyse de la structure des composés minéraux.

Depuis peu, de nombreuses recherches sont menées pour dépasser la simple « visualisation » des données tridimensionnelles et tenter d'exploiter au maximum la richesse des informations contenues dans ce type de données. Des techniques de *segmentation* et de *reconstruction* sont peu à peu mises au point pour construire des représentations géométriques des structures anatomiques ou biologiques cartographiées dans ces données. Ces représentations constituent une information ré-exploitable dans beaucoup d'autres applications. Elles permettent la constitution d'atlas anatomiques, qui quantifient la variabilité de certaines structures anatomiques. Elles permettent à un chirurgien de planifier une opération. En radiothérapie, elles facilitent la détermination des directions « optimales » pour irradier une zone tumorale en minimisant les dégâts sur les tissus sains. Les représentations géométriques sont primordiales dans la mise au point de prothèses : celles-ci peuvent être validées « virtuellement » puis fabriquées simplement à partir de cette représentation.

Ainsi, un grand nombre d'applications nécessite des représentations géométriques des structures internes décrites par les images. Pour les construire, deux transformations doivent être faites sur les images : la *segmentation* qui isole les différents constituants et la *reconstruction* qui fabrique une ou plusieurs structures géométriques à partir des constituants extraits. Ces transformations ne sont en général pas triviales, car les modalités d'acqui-

tion des images ne fournissent qu'un *échantillonnage* du volume d'espace considéré et cet échantillonnage n'est représentatif que de certaines propriétés *spécifiques* des objets ou tissus observés. En conséquence, deux composantes distinctes mais de même nature seront indissociables sur l'image si elles se touchent dans la réalité. Plus problématique, deux tissus différents pourront avoir des caractéristiques communes qui les feront réagir identiquement sur certaines modalités d'acquisition. D'autres problèmes peuvent gêner le calcul de ces représentations : bruits sur les données, anisotropie des images, déformations suivant un axe, contraste ou luminosité variable dans l'espace image, artefacts produits par des objets métalliques, résolution d'échantillonnage.

Cette thèse s'intéresse à l'extraction de formes géométriques à partir de telles données, et à ses applications dans le domaine biomédical. Dans ce chapitre, nous présentons succinctement les principales modalités d'acquisition d'images tridimensionnelles utilisées dans ce domaine, puis nous examinons les problèmes spécifiques liés à la visualisation et à l'exploitation de données volumétriques. Nous terminons ce chapitre en présentant l'organisation de ce mémoire et les principales contributions que cette thèse apporte à ce domaine de recherche.

1.2 Moyens d'acquisition

1.2.1 En médecine

Les différentes modalités d'acquisition d'images tridimensionnelles permettent d'obtenir un panel varié de « cartes » anatomiques ou fonctionnelles du corps humain. Suivant ce que le praticien souhaite examiner en priorité, certaines modalités répondront mieux à ce besoin.

La *tomodensitométrie*, ou *tomographie X assistée par ordinateur*, ou encore *scanner X*, est une technique dérivée de la radiographie qui s'appuie sur l'absorption plus ou moins importante des rayons selon le milieu traversé. Le principe est de prendre un certain nombre d'images ou projections suivant des directions différentes, puis, à partir d'une transformée mathématique, reconstruire un volume de données à partir de cet ensemble de projections. Plusieurs techniques sont utilisées pour balayer au mieux le volume d'intérêt afin d'augmenter la qualité des images tridimensionnelles reconstruites et de diminuer les doses de radiation : source en rotation ou en spirale, faisceaux parallèles ou coniques. L'image obtenue met particulièrement en valeur les tissus osseux du patient. En utilisant des produits de contraste, certaines régions peuvent être davantage mises en valeur. Son apport diagnostique est primordial dans les pathologies abdominales, les mesures orthopédiques, les pelvimétries et cette technique sert aussi pour repérer les tumeurs ou lésions cérébrales.

L'*Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire* (ou IRM) est une technique non-invasive, d'une totale innocuité, basée sur la détection de la résonance des atomes de certaines molécules (noyaux d'hydrogènes en IRM anatomique). L'émission de rayonnements radiofréquences stimule les noyaux d'hydrogène contenus dans l'eau. Après l'arrêt de la stimulation, les atomes d'hydrogène dissipent cette énergie suivant différents plans sous l'action d'un puissant champ magnétique. En recueillant cette énergie, on reconstruit une carte énergétique de la partie étudiée du corps. L'image tridimensionnelle résultante représente la composante en eau des tissus, leurs vascularisations et leurs éventuelles pathologies. L'IRM

anatomique est d'un usage courant aujourd'hui, notamment pour détecter des pathologies tumorales ou infectieuses.

L'IRM est aussi utilisée pour former des images angiographiques tridimensionnelles. On injecte au préalable au patient des produits de contraste. Certains vaisseaux (e.g., artères du cou, du cerveau) ressortent ainsi sur les images IRM obtenues.

Avec des techniques plus rapides d'acquisition, on peut réaliser des images de résonance magnétique nucléaire en des temps très brefs (un dixième à un centième de seconde). Cela permet de suivre certains aspects du métabolisme. Par exemple, en imagerie cérébrale, les propriétés de résonance magnétique de l'hémoglobine varient légèrement suivant que la molécule est liée ou non à l'oxygène. On accède ainsi à une information de l'activité cérébrale avec des images montrant les variations du débit sanguin.

L'*échographie* tridimensionnelle est une technique récente. Son principe est de projeter un faisceau d'ondes ultra-sonores qui sera plus ou moins réfléchi selon les structures organiques rencontrées. Une sonde est promenée sur la région que l'on souhaite examiner. En analysant les ondes réfléchies, une étape d'interprétation et de reconstruction par ordinateur permet de construire une image tridimensionnelle. L'inocuité de cette méthode est totale. Les premières applications concernent la recherche de malformations dans le fœtus. En utilisant l'effet Doppler, on peut aussi étudier les flux sanguins dans les artères et veines.

En imagerie fonctionnelle, et notamment en imagerie cérébrale fonctionnelle, d'autres outils ont été développés. Ainsi, l'*électro-encéphalographie* mesure les potentiels électriques à la surface du crâne par le biais d'électrodes et suit leur évolution avec une grande précision temporelle. La reconstruction d'une image tridimensionnelle à partir des positions des électrodes est en revanche délicate car il n'y a pas unicité de la reconstruction. La *magnéto-encéphalographie* mesure quant à elle l'intensité (ou le gradient) du champ magnétique au voisinage du cuir chevelu et possède aussi une très bonne résolution temporelle. La *tomographie par émissions de positons* (ou positrons) est une technique basée sur la localisation des désintégrations de certains éléments radioactifs (comme l'oxygène 15) : lorsque le positon produit rencontre un électron, deux photons gamma sont émis en directions opposées. En détectant plusieurs de ces événements, un ensemble de droites est déterminé dont l'intersection localise la source. Le procédé est donc réellement tridimensionnel et permet par exemple de localiser les zones où le débit sanguin s'est accru, en injectant de l'eau « marquée » au patient.

1.2.2 En biologie

L'examen des structures microscopiques fait de plus en plus appel aux techniques d'imagerie tridimensionnelle, même si les échantillons biologiques sont souvent détériorés par les modalités d'acquisition mises en œuvre. Suivant l'échelle où les échantillons sont examinés, différentes techniques sont utilisées. La *microscopie confocale* construit une série de coupes optiques en déplaçant progressivement le plan focal d'intérêt. La résolution est légèrement inférieure au micromètre. Les structures d'intérêt doivent être marquées (par exemple à l'aide de marqueurs fluorescents) pour se détacher des autres composants. La *microscopie électronique* atteint des résolutions encore plus importantes (inférieures à 50 nm) en utilisant un faisceau d'électrons au lieu du rayonnement visible. En métallisant les échantillons biologiques, une image tridimensionnelle de leur surface peut être construite.

Ces images construites permettent l'étude des structures des cellules, des noyaux des cellules et de leurs constituants (chromosomes et ADN par exemple). Elles sont indispensables pour comprendre leur structure avant de comprendre leur fonctionnement. L'analyse de ces images permet aussi une étude quantitative des objets étudiés.

1.3 Exploitation des données volumétriques

L'être humain visualise naturellement des images bidimensionnelles (le plus souvent sous forme de grilles de pixels d'intensité variable). Il est en revanche très difficile de lui présenter une image tridimensionnelle sous une forme qu'il appréhende facilement. Similairement aux images bidimensionnelles, on appelle *voxel* un point d'une image 3D.

La façon la plus simple et la plus naïve est de fournir à l'observateur un ensemble de coupes des données suivant différents axes. En visitant ces coupes, l'observateur a accès à toute l'information et doit théoriquement être capable de se représenter mentalement les formes contenues dans l'image. Cette opération est néanmoins très difficile à réaliser pour le cerveau humain et est pour le moins approximative. En effet, l'information est constituée de niveaux de gris, parfois peu discernables ou bruités, et les frontières entre objets ne sont visibles que suivant certains axes. Enfin, notre esprit peine à fusionner les informations de coupes distinctes. Un moyen de contourner ce problème est de connaître à l'avance la géométrie de la forme observée (par exemple, en ayant examiné un modèle obtenu par dissection). Le risque est alors d'*inventer* des informations qui, si elles apparaissent sur le modèle, n'existent pas forcément sur l'objet observé.

Une deuxième approche consiste à considérer les données du volume avec un certain degré de transparence et de réflexion et à examiner cet objet par lancer de rayons. Les images obtenues sont similaires à des projections où l'intensité du point projeté par un rayon dépend de l'accumulation des intensités et des transparences des données traversées par ce rayon (une radiographie suit quasiment le même principe). On parle de *rendu volumétrique* [38] (voir la Figure 1.1 qui montre deux exemples de ce rendu). Le degré de transparence est attribué à une intensité: tous les voxels qui ont la même intensité ont donc la même transparence. Toute la difficulté réside dans le choix de cette valeur de transparence pour chacune des intensités de l'image. En cherchant à faire disparaître certains tissus pour en mettre d'autres en valeur, il est très probable que des zones d'intérêt deviennent invisibles ou soient occultées par d'autres constituants. Même si on peut améliorer les résultats de cette technique en plaçant des plans découpant l'image, le rendu volumétrique reste inexploitable sur certains types d'images (e.g., IRM, échographie).

Pour appréhender des formes tridimensionnelles, notre cerveau visualise le *bord* (ou *frontière*) de ces formes suivant différents points de vue. Les objets étant en général opaques, avoir une représentation du bord des constituants de l'image est suffisant pour les visualiser. Le problème est alors de déterminer les frontières de chacun des constituants de l'image, ce qui revient à construire une représentation géométrique des bords des composantes de l'image. Ainsi, même dans le cadre de la visualisation et du rendu de données volumétriques, il est parfois nécessaire de construire des objets géométriques approchant les formes de l'image. Certains auteurs, comme Udupa *et al.* [137], ont montré les avantages d'une extraction de surface frontière par rapport au rendu volumétrique dans le rendu d'os fins,

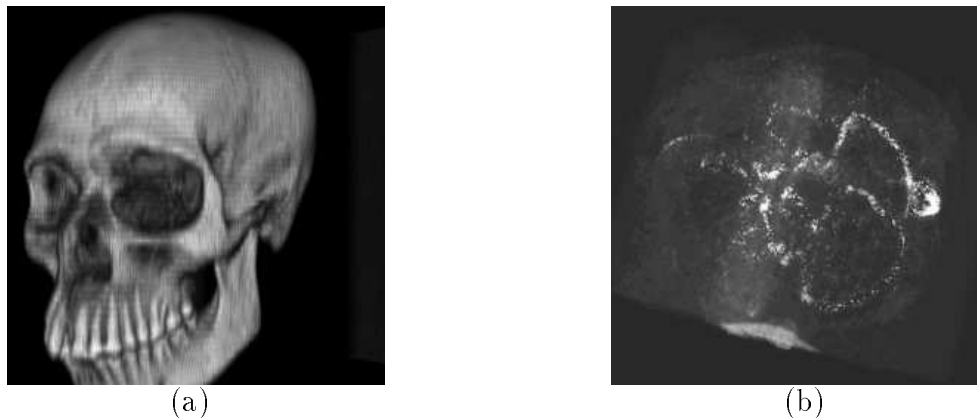


FIG. 1.1 – *Rendu volumétrique de deux volumes de données médicaux : (a) image obtenue par tomodensitométrie et mettant en valeur les tissus osseux de la tête ; (b) angiographie par résonance magnétique à contraste de phase et représentant les vaisseaux du cerveau.*

des fractures et sutures, des textures fines, mais aussi du point de vue du temps de calcul et de la mémoire nécessaire.

Par ailleurs, la simple « visualisation » des images n'est pas suffisante pour déduire des caractéristiques précises souvent nécessaires au diagnostic. Une représentation géométrique permet alors d'exploiter le contenu des données volumétriques dans un grand nombre d'applications : visualisation et examen non-invasif, analyse quantitative ou statistique, simulation, réalité augmentée, chirurgie assistée par ordinateur, enregistrement dans un atlas, extraction de caractéristiques, mise en correspondance, classification, etc. Si un ensemble de données spatio-temporelles est fourni, les représentations géométriques facilitent le suivi et la modélisation physique des constituants.

1.4 Organisation de la thèse

L'extraction de structures géométriques apparaît donc comme un processus indispensable à la visualisation et à l'exploitation des données tridimensionnelles. Les techniques d'extraction sont souvent très liées à la nature des données ; par exemple il est délicat d'appliquer une technique efficace en tomodensitométrie sur des images issues d'IRM.

Dans le Chapitre 2, nous rappelons qu'il existe deux grandes approches au problème de la détection des composantes d'une image. L'approche *région* conduit à des processus de *classification* des voxels des images suivant la composante à laquelle ils appartiennent, en utilisant des critères de similitude. L'approche *frontière* détermine les lieux des variations importantes dans les images et recherche les bords des constituants. Suivant l'approche, la construction des structures géométriques pourra être effectuée soit directement par des *algorithmes discrets de reconstruction*, soit itérativement par le biais de *modèles déformables*.

Le Chapitre 3 s'intéresse aux méthodes de reconstruction discrète et présente un procédé de reconstruction dérivé du classique *marching-cubes* [77] qui possède des propriétés intéressantes. En particulier, son lien étroit avec les algorithmes de suivi de surfaces digitales montre que l'on peut extraire des surfaces triangulées par des algorithmes de suivi. D'un point de vue théorique, ce lien montre que toute image binaire a une représentation

combinatoire de surface.

Le Chapitre 4 examine les différents modèles déformables présentés dans la littérature et appliqués à la segmentation/reconstruction des images. Il apparaît que la plupart des modèles proposés ne répondent qu'à certains aspects spécifiques du problème. Suivant la formulation du modèle, l'un des aspects suivants sera privilégié : adéquation modèle/données, gestion de formes arbitrairement complexes, robustesse aux bruits, intégration de connaissances *a priori*, interaction de l'utilisateur, autonomie, sensibilité au paramétrage et à l'initialisation, stabilité numérique.

Le Chapitre 5 présente un modèle déformable original, générique, qui cherche à rassembler des spécificités de différents modèles. Nous proposons un modèle explicite, basé sur une surface triangulée sans bords, de dynamique Lagrangienne, auquel un ensemble de contraintes internes et externes est associé. La formulation de l'adéquation modèle/données induite peut s'interpréter comme la minimisation d'une énergie. Un ensemble de contraintes géométriques élémentaires permet au modèle d'adapter la topologie de sa maille à ses déformations de manière automatique. Des formes arbitrairement complexes peuvent ainsi être extraites. Afin d'accélérer la convergence du processus, une approche multi-résolution, qui extrait les formes de l'esquisse aux détails, est proposée.

Le Chapitre 6 montre l'application à des données biomédicales des deux techniques d'extraction de structures géométriques présentées. Des résultats d'extraction par reconstruction discrète et par modèle déformable sont comparés sur des images acquises par des modalités diverses. L'intérêt de l'approche multi-résolution est discuté. Les possibilités d'enchaînement entre notre algorithme discret de reconstruction et notre modèle générique sont évoquées. Les performances des différentes méthodes sont comparées sur des images de modalités variées.

Le Chapitre 7 conclut ce mémoire en résumant les points abordés. Il montre que les contributions apportées, et particulièrement le modèle générique introduit, peuvent être exploitées dans d'autres domaines (modélisation géométrique, synthèse d'images et animation, reconstruction de données non-structurées). Enfin, il suggère un certain nombre de directions de recherche qu'il semble intéressant de poursuivre.

L'Annexe A rappelle les notions importantes de topologie des surfaces et souligne les liens entre surfaces combinatoires et variétés topologiques. L'Annexe B discute des problèmes topologiques ou *singularités* qui apparaissent lors de la déformation des surfaces dans l'espace Euclidien et exhibe une méthode pour les classifier. L'Annexe C présente une justification analytique des transformations topologiques utilisées par le modèle générique pour gérer les singularités.

Chapitre 2

Extraction de structures géométriques de données volumétriques

2.1 Introduction

Notre propos concerne l'extraction de structures géométriques représentant les composantes d'une image tridimensionnelle. Une image tridimensionnelle est une grille tridimensionnelle où une intensité (ou *niveau de gris*) est associée à chacun des nœuds de la grille. Ces nœuds sont très souvent appelés *voxels* de l'image. Construire une structure ou représentation géométrique à partir de ces données nécessite deux opérations essentielles, qui peuvent être disjointes ou couplées en un seul processus :

1. Isoler les données appartenant à la forme ou aux formes recherchées : c'est l'opération de *segmentation*. Un processus de segmentation complet étiquette chaque voxel de l'image par le numéro de la composante à laquelle il appartient. L'image est ainsi *partitionnée* en un ensemble de régions ; cette partition est supposée refléter la partition « réelle » des objets du monde physique à partir desquels l'image a été acquise.
2. Construire un ensemble de structures géométriques décrivant les données segmentées : c'est l'opération de *reconstruction*. Une « structure géométrique » peut être une maille polyédrique, une surface composée de carreaux B-splines, un squelette, un agrégat de tétraèdres, ou toute autre représentation qui contient sous une forme ou sous une autre l'information de géométrie des composantes segmentées. Une telle structure peut aussi intégrer des informations topologiques, physiques ou statistiques.

L'ensemble de ces transformations sera appelé processus de *segmentation/reconstruction*. On distingue deux approches différentes au problème de la segmentation : l'*approche région* et l'*approche frontière*. Le fait d'opter pour l'une ou l'autre de ces approches détermine si la segmentation/reconstruction est réalisée en deux étapes distinctes ou non :

- L'approche région se base sur les *caractéristiques propres des constituants* (e.g., répartition des niveaux de gris, texture, homogénéité) pour construire une zone dont les

éléments appartiennent à la composante que l'on recherche. On dit que les voxels ont été classifiés. Cette approche nécessite des informations *a priori* sur les constituants pour pouvoir les différencier.

De par sa formulation, un ensemble de zones (homogènes par exemple) est déterminé. Ces zones visent à définir les composantes de l'image. En collectant l'ensemble des voxels de chaque composante, une structure géométrique peut être extraite *directement* à partir de cet ensemble. Les propriétés (géométriques ou physiques par exemple) que l'on pourrait attribuer à cette structure n'influent donc pas sur la forme extraite : seule l'étape de segmentation différencie les constituants de l'image. Des *algorithmes discrets* sont donc employés pour construire rapidement une représentation géométrique à partir de la classification des voxels. La Figure 2.1 illustre cette approche de l'extraction de formes de données volumétriques.

- L'approche frontière exploite les différences entre régions de l'image pour détecter les bords de chaque constituant. En conséquence, cette approche est plus indépendante des caractéristiques propres de chaque constituant. Elle est en revanche dépendante de la netteté des bords entre chaque constituant.

On constate que cette approche ne construit pas une classification des voxels et la segmentation des données est *partielle* après cette étape. L'étape de reconstruction intègre donc une (importante) partie de l'étape de segmentation car elle doit extraire des structures géométriques à partir des données brutes et des données disparates de bords. Pour ce faire, il est indispensable d'introduire un *modèle* (géométrique, topologique, physique et/ou statistique) pour guider la reconstruction. Les propriétés associées au modèle sont exploitées pour combler l'information manquante. Naturellement, cette approche de la segmentation/reconstruction ne peut en général se faire de manière directe et résulte de la convergence d'un processus qui, en modifiant progressivement les paramètres du modèle, cherche à approcher des formes de l'image selon certains critères associés au modèle. On parle donc de *modèles déformables*. La Figure 2.2 schématise cette autre approche à l'extraction de formes d'images volumétriques ou d'images de contours.

Comme nous ne faisons pas d'hypothèses sur la nature des données (brutes, classifiées, bords détectés), nous nous intéressons d'une part aux méthodes discrètes de reconstruction (cf. Section 2.2) et d'autre part aux méthodes de segmentation/reconstruction guidées par des modèles dotés d'une géométrie (cf. Section 2.3).

2.2 Méthodes discrètes de reconstruction

2.2.1 Segmentation et classification des données

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étape de classification des données, nécessaire aux méthodes discrètes de reconstruction. De nombreux algorithmes ont été développés pour effectuer cette étape ; ils permettent de créer une partition de l'image en régions. Nous allons ici juste évoquer les principaux algorithmes, que nous classons en trois catégories :

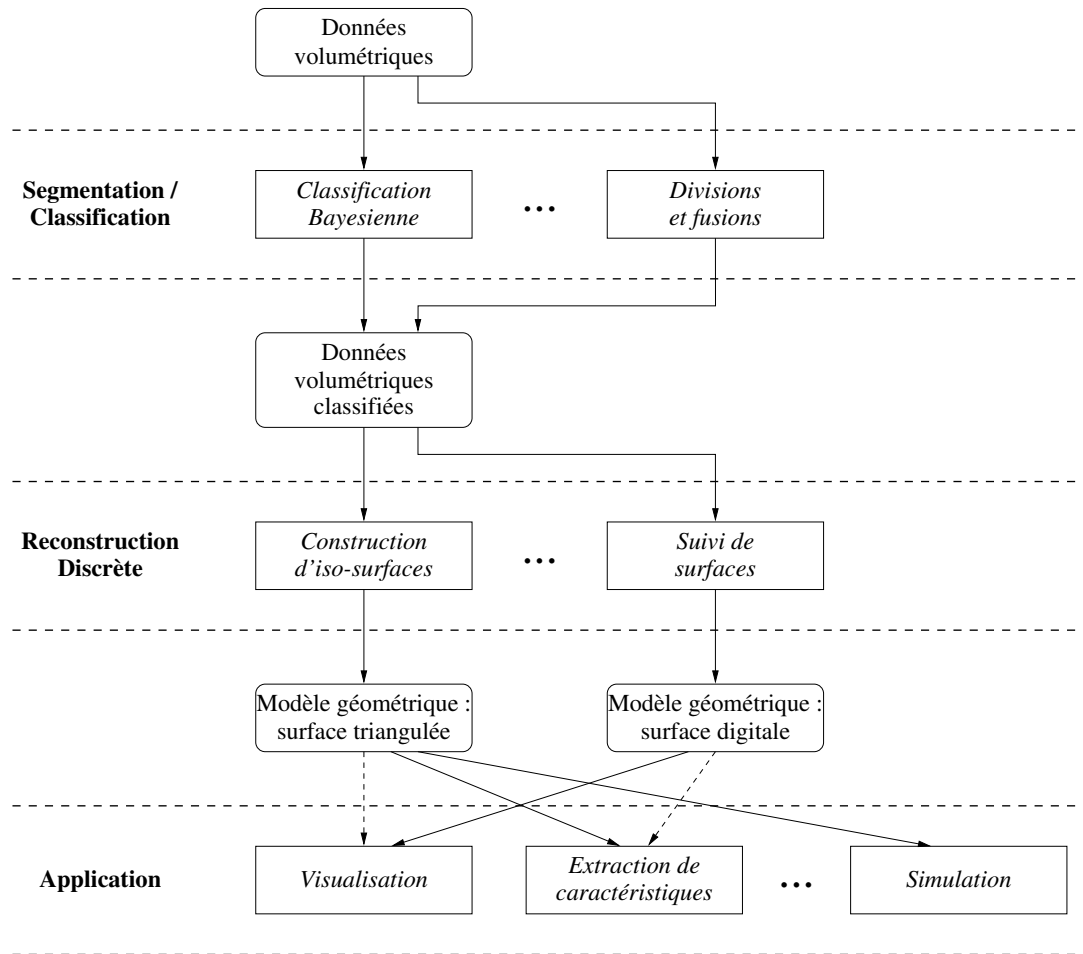


FIG. 2.1 – *Extraction des formes composant une image volumétrique par classification de ses voxels puis reconstruction discrète. Ces deux étapes sont disjointes et tout algorithme de reconstruction peut être utilisé après l'étape de classification. En revanche, les représentations géométriques conditionnent l'application en aval. Il s'agit donc de choisir la méthode de reconstruction adéquate en fonction de l'usage que l'on souhaite faire de la représentation géométrique des composantes de l'image.*

les algorithmes basés uniquement sur les intensités des voxels (la répartition spatiale des données est ignorée), ceux qui ajoutent l'information de voisinage entre les voxels, et ceux qui structurent les données pour imposer une répartition spatiale sur l'image.

Segmentation sans information spatiale

Ces algorithmes de segmentation ne se basent que sur l'*histogramme des intensités* de l'image pour classifier les données. Seul le niveau de gris du voxel détermine sa classification. Tout le problème réside dans l'obtention de la « meilleure » classification sur ces niveaux de gris.

La classification la plus fréquente est le simple seuillage de l'image. Vue sa simplicité, elle est souvent effectuée directement dans l'opération de reconstruction (cf. Section 2.2.2).

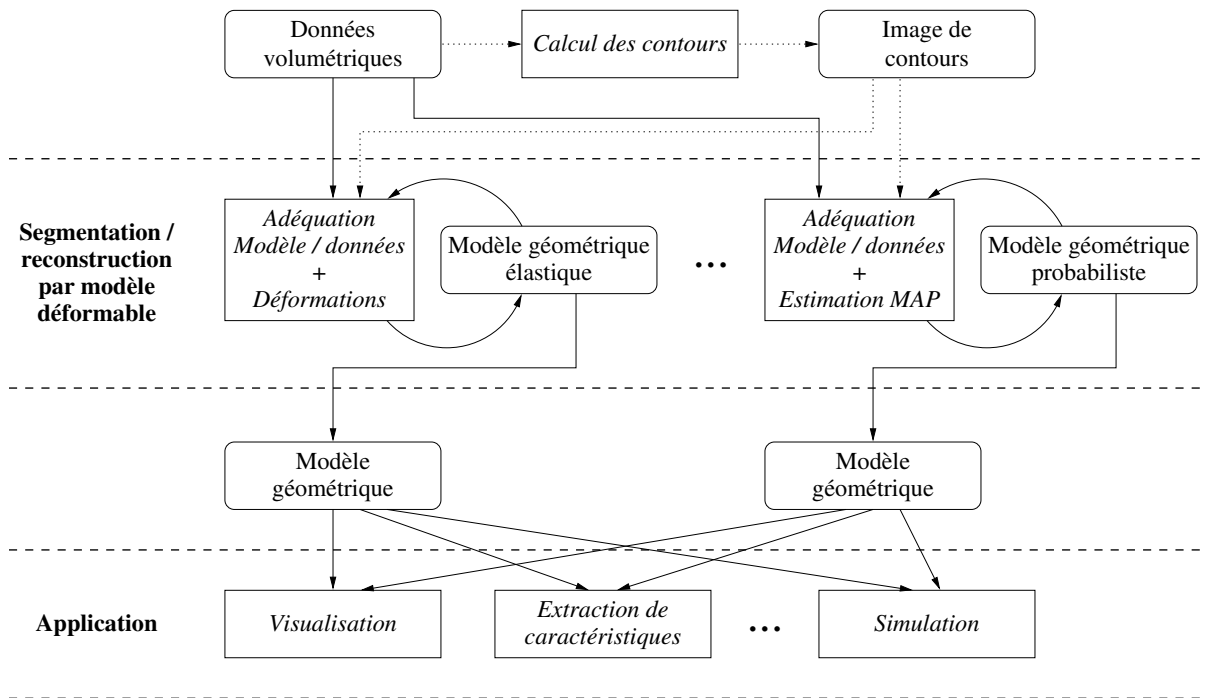


FIG. 2.2 – *Extraction des composantes d’une image volumétrique par modèle déformable. Une image de contours calculée à partir des données initiales peut aussi être exploitée. Le modèle géométrique produit est le modèle utilisé pour approcher les formes dans l’image. Le modèle dispose non seulement d’une géométrie mais aussi d’une formulation dynamique, élastique, ou probabiliste, qui guide et contraint ses déformations. De par leur formulation, les représentations géométriques obtenues sont souvent exploitables directement par la plupart des applications.*

La méthode classique de classification appelée *hard c-means* a besoin de connaître le nombre de classes de l’image pour attribuer à chaque niveau de gris une classe d’appartenance. Ce découpage en classes suppose que chaque classe a un niveau de gris moyen et une certaine variance. Une version plus fine de cet algorithme est le *fuzzy c-means* qui assigne à chaque niveau de gris une probabilité d’appartenance à chaque classe.

D’autres méthodes (appelées méthodes de Fisher) existent pour classifier les données en un nombre donné de classes différentes. On peut citer celles utilisant les réseaux de neurones [21] ou les approches Bayésiennes de type *maximum a posteriori* [142, 104] pour extraire les solutions.

Toutes ces méthodes requièrent très peu d’informations sur les données (nombre de classes seulement). Elles sont donc particulièrement adaptées à la segmentation automatique. En revanche, elles n’exploitent pas du tout la répartition spatiale des données : une grande partie de l’information n’est donc pas prise en compte.

Segmentation avec information de voisinage

Ces approches exploitent la notion de voisinage présente dans une image volumétrique : tout voxel (un voxel est un élément de l’image) est adjacent aux voxels qui le bordent. Elles

sont donc mieux adaptées que les précédentes pour localiser des textures dans les images.

La méthode la plus courante est une approche probabiliste de la segmentation par utilisation d'un champ Markovien (se référer à [25] ou [36] pour une analyse détaillée). Ce champ Markovien associe un système de voisinages à chaque voxel et détermine une loi de probabilité de réalisation sur l'image qui est fonction d'une énergie potentielle (mesure de Gibbs). On suppose qu'il existe un modèle sous-jacent qui a généré cette image (e.g., un modèle de texture, un modèle de région dont les niveaux de gris suivent une loi normale). En utilisant la règle de Bayes, on peut déterminer la probabilité d'avoir un modèle connaissant l'image. Le modèle le plus adéquat est obtenu à l'aide d'estimateurs comme par exemple le *maximum a posteriori*. Des algorithmes de simulation (e.g., recuit simulé, algorithme de Métropolis, algorithme ICM) sont utilisés pour approcher le bon modèle à partir d'une configuration initiale. De cette approche, deux classes d'algorithmes peuvent être déduites : des algorithmes de segmentation supervisée, où les différents paramètres que peut prendre le modèle sont connus (i.e., les différentes textures de l'image sont connues à l'avance), et des algorithmes de segmentation non-supervisée, qui estiment en plus les paramètres du modèle (e.g., des paramètres d'une texture peuvent être déterminés). Des mécanismes d'apprentissage sont aussi employés.

Ces algorithmes de segmentation déterminent pour chaque point de l'image le modèle qui l'a construit et extraient ainsi une classification. L'introduction des voisinages dans les champs Markoviens (sous forme de cliques) permet de prendre en compte des textures dans les images. En revanche, aucune propriété géométrique, comme la convexité ou la courbure, n'est prise en compte dans la segmentation. A noter que le champ Markovien (souvent utilisé en deux dimensions) inclut les approches Bayésiennes présentées dans la section précédente, approches qui sont plus fréquentes en imagerie tridimensionnelle.

Segmentation par structuration des données

Contrairement aux précédentes approches, aucune hypothèse n'est faite sur le processus de création de l'image. Les hypothèses portent sur la nature de l'homogénéité des régions à extraire. Une structure évolutive est associée à l'image et guide les agrégations ou divisions des zones de l'image en fonction de ces critères d'homogénéité.

Certaines approches sont basées sur la croissance de régions : un ensemble de germes est placé dans l'image, ces germes croissent en englobant les éléments qui leur ressemblent. D'autres adoptent la stratégie de divisions et fusions sur un ensemble de régions : une région est divisée en sous-régions si un prédicat (d'homogénéité en général) n'est pas respecté, deux régions *adjacentes* sont fusionnées si un autre prédicat est respecté. Cette stratégie implique l'existence d'un graphe d'adjacence entre régions et différentes partitions de l'image peuvent être envisagées : arbre quaternaire ou *quadtree* (*octree* en 3D), partition de Voronoï, pyramides de graphes [97], etc.

La structuration des données permet d'introduire quelques critères géométriques simples comme la convexité. La notion d'adjacence permet d'obtenir des régions connexes. Ces approches sont moins adaptées que les précédentes à la segmentation de textures.

En conclusion aux approches régions de segmentation, on constate que les algorithmes de classification des trois catégories présentées ci-dessus n'exploitent pas (ou très peu) la géométrie des données. Cela provient du fait que ces algorithmes conservent ou adaptent

la représentation grille de l'image et n'apportent quasiment pas d'informations extrinsèques de géométrie.

2.2.2 Extraction directe d'un modèle géométrique

Extraire un modèle géométrique à partir d'un calcul direct et local sur une image volumétrique peut servir deux objectifs : d'une part, la construction et la visualisation rapide de certaines composantes de l'image, d'autre part la fabrication d'une représentation géométrique à partir d'images dont les voxels ont été classifiés par un processus de segmentation antérieur.

Le premier objectif induit des algorithmes qui rassemblent le processus de segmentation et le processus de reconstruction. Comme ce processus calcule en une seule passe et localement le résultat, la segmentation produite doit être relativement élémentaire — en général, seul un simple *seuillage* est possible. Le modèle reconstruit peut prendre différentes formes suivant que l'on privilégie la réutilisabilité du modèle ou sa rapidité d'obtention. L'application principale est de permettre au praticien d'explorer l'image de manière quasi-interactive et de lui fournir un premier aperçu des données. La segmentation n'est souvent pas assez précise pour que le modèle reconstruit soit exploité directement dans d'autres applications (planification et simulation chirurgicale par exemple). En revanche, il peut servir d'initialisation à un processus type modèle déformable [67, 147].

Le deuxième objectif impose des algorithmes qui traitent en entrée des images dont les voxels ont été pré-segmentés (cf. section précédente). Ces algorithmes permettent alors d'extraire rapidement un modèle géométrique à partir d'une image binaire.

En fait, les mêmes algorithmes sont utilisés indifféremment pour ces deux objectifs : visualisation rapide, ou extraction d'un modèle géométrique exploitable dans d'autres applications. Nous les classons suivant le modèle reconstruit : une surface triangulée, une surface digitale, une *boundary representation* ou *B-rep*. Selon le but recherché par l'utilisateur, l'un ou l'autre est préféré.

Reconstruction sous forme de surface triangulée

Ces algorithmes sont en général utilisés sur des images volumétriques de niveaux de gris, même s'ils peuvent directement être appliqués sur des images binaires, la valeur de seuillage étant alors implicite. L'image est considérée comme une grille régulière dont les nœuds sont des valeurs d'échantillonnage d'un champ scalaire continu sous-jacent, dénoté $P(x, y, z)$. Ce champ est supposé être proche de l'interpolation trilineaire des valeurs données aux nœuds de la grille. L'utilisateur fournit un paramètre π , appelé iso-valeur. L'*iso-surface* π de ce champ ou potentiel P est défini comme l'ensemble des points tels que $P(x, y, z) = \pi$. La surface extraite par ces algorithmes, formée de triangles, doit alors approcher au mieux l'*iso-surface* π de ce champ.

L'algorithme le plus répandu est certainement le *marching-cubes*, développé par Lorensen et Cline [77]; une version très proche a été développée indépendamment par Wyvill *et al.* [145]. Son principe est de balayer l'image par blocs de huit voxels et d'extraire un ensemble de triangles dans ce bloc. La réunion de tous ces triangles forme une surface triangulée qui approche l'*iso-surface* demandée. Le pré-calcul d'une table de 256 configurations permet

d’optimiser l’extraction des triangles au sein de chaque bloc. Le seuil fourni par l’utilisateur définit implicitement l’image binaire. Les niveaux de gris ne sont alors utilisés que pour lisser la surface et extraire les normales par calcul du gradient.

A l’origine, cet algorithme pouvait produire des surfaces triangulées non fermées [39] ce qui contredisait la définition de l’iso-surface dans un champ potentiel continu. Dans le cadre d’une simple visualisation, ce problème n’a quasiment aucune incidence sur le résultat affiché. En revanche, la correction de ce problème de fermeture devient nécessaire si l’on veut exploiter le modèle géométrique construit. De nombreuses méthodes ont été proposées pour modifier l’algorithme du *marching-cubes* de façon à ce que les surfaces construites soient fermées [67, 101, 103, 112, 47, 145] (pour une étude précise, se référer au travail de Van Gelder et Wilhelms [47]).

De nombreuses optimisations ont été rajoutées à l’algorithme initial, soit pour accélérer l’extraction de la surface [23, 117, 144, 150], soit pour construire efficacement l’adjacence entre les triangles [91, 150]. L’algorithme est également facilement parallélisable [90] et peut être étendu à l’extraction d’iso-surfaces (variétés de dimension 2) au sein d’images quadri-dimensionnelles [42].

D’autres auteurs [45] ont profité des propriétés des décompositions simpliciales de l’espace pour proposer un algorithme d’extraction d’iso-surfaces basé sur un balayage de tous les tétraèdres de l’image (une sorte de *marching tetrahedra* où tout cube de 8 voxels de l’image est décomposé en six tétraèdres). La surface générée est effectivement fermée.

Dans tous les cas, le but est de produire une surface triangulée, fermée et orientable, i.e., une variété de dimension 2. Ces algorithmes permettent d’extraire assez rapidement un modèle géométrique d’un volume de données, même si le critère de segmentation est naïf (simple seuillage). Dans certaines modalités d’acquisition (e.g., IRM, échographie), un pré-traitement est indispensable, par exemple sous la forme d’une classification.

Enfin, si l’utilisateur ne souhaite que visualiser une iso-surface et non obtenir un modèle, certains algorithmes dédiés peuvent être préférés : génération d’un nuage de points [24], construction d’un treillis approchant la surface [69, 132].

Reconstruction sous forme de surface digitale

Cette approche vise à extraire une surface, appelée *surface digitale*, formée d’éléments appelés *surfels*. En topologie digitale, un surfel est l’intersection de deux voxels adjacents (plus précisément 6-adjacents) [53, 76]. Ces éléments ont un plongement naturel dans l’espace continu : un quadrilatère à l’intersection des deux blocs (plongement des voxels) le formant. Les algorithmes extraient les surfels qui sont à la frontière de l’objet. En pratique, l’utilisateur fournit une valeur de seuillage et l’algorithme recherche les éléments de surface sur le volume de données ainsi seuillé. Similairement au *marching-cubes*, les informations de niveaux de gris permettent de calculer les normales.

Différents algorithmes existent pour calculer ces surfaces. Leur principale spécificité est de ne pas balayer l’image mais plutôt de pister les surfels connexes à partir d’un surfel donné en initialisation. Ils se basent sur une notion d’adjacence entre les surfels qui ont une arête commune [114, 135] ou un sommet commun [67, 68, 92]. L’approche étant surfacique, les algorithmes permettent donc d’extraire extrêmement rapidement (e.g., plus rapidement que le *marching-cubes*) une composante de surface de l’image 3D. Artzy *et al.* [5] ont proposé

un tel algorithme qui recherche les prochains surfels suivant trois directions de propagation. Herman et Webster [55] ont montré la validité de la surface extraite, i.e., la surface produite est fermée et vérifie un théorème de Jordan digital. Gordon et Udupa [49] l'ont amélioré en notant qu'il suffisait de pister les surfels suivant deux directions de propagation. La validité de cette approche a été montrée par Kong et Udupa [65].

Les surfaces extraites sont formées de faces de voxels, topologiquement connectées ou non suivant l'application. Le calcul et le rendu de telles surfaces est très rapide. En visualisation, on peut même s'affranchir du problème des « marches d'escalier » en exploitant l'information de gradient de l'image pour approcher les normales. En revanche, leur utilisation dans un post-traitement est plus problématique que les surfaces triangulées. En effet, ce ne sont en général pas des 2-variétés dans \mathbb{R}^3 . Certaines caractéristiques géométriques, comme la normale à la surface ou les courbures, ne sont pas directement calculables. Même si de nombreux auteurs se sont intéressés aux calculs de caractéristiques géométriques [73] ou topologiques [70], ce modèle de surface n'est pas le plus adéquat pour une éventuelle réutilisation.

A noter que Liu [76] a proposé un algorithme de suivi de surface qui ne se base pas sur un seuillage mais qui exploite les informations de gradients. L'algorithme de suivi ne fournit pas forcément une surface fermée.

Reconstruction sous forme de B-rep

Une autre approche a été proposée par Kalvin *et al.* [60]. L'algorithme, appelé «alligator», construit une surface en examinant l'image coupe par coupe. A partir d'une image volumétrique binaire, une *Boundary representation* ou plus communément *B-rep* est construite par additions successives de morceaux de surfaces. L'algorithme se sert d'opérations classiques sur les B-rep, comme l'addition de nouveaux morceaux de surfaces, pour garantir la consistance topologique du résultat. De même, la décimation des facettes coplanaires est implicite dans cette représentation. L'inconvénient est que la structure manipulée pendant l'extraction est plus onéreuse en mémoire et en temps de calcul que les simples surfaces triangulées. Si elle construit effectivement un modèle géométrique utilisable dans un post-traitement, son intérêt pour la visualisation est moindre.

2.3 Segmentation/reconstruction par modèle déformable

Au contraire des approches précédentes, les modèles décrits dans cette section intègrent des paramètres géométriques, mais aussi des paramètres physiques, dynamiques ou statistiques dans leur formulation. Ceux-ci fournissent un ensemble de lois et de contraintes qui permet au processus d'extraction d'utiliser au mieux les données disponibles et de combler l'information manquante.

2.3.1 Modèle déformable

Pour extraire effectivement les composantes d'une image brute ou d'une image de contours, il faut déterminer les paramètres d'un modèle de façon à ce que sa géométrie corresponde « au mieux » aux données. Le terme « au mieux » rend cette opération très subjective et les critères choisis seront donc en général plus ou moins adaptés au problème. Pour limiter la subjectivité de l'adéquation modèle/données, les paramètres associés au modèle sont souvent dérivés de modèles physiques. De même, les paramètres « optimaux » du modèle ne seront pas déterminés en une seule passe, mais ils seront plutôt corrigés de manière itérative. C'est pourquoi le terme *modèle déformable* s'est imposé.

Toutes les représentations géométriques ne conviennent pas aux modèles déformables, car elles doivent pouvoir prendre en compte les différentes déformations du modèle. Ainsi, les représentations utilisées couramment en Conception Assistée par Ordinateur (*Boundary-representation*, *Constructive Solid Geometry*) ne sont guère utilisables efficacement, malgré leur puissance de modélisation. De même, les modèles à base topologique, construits avec des structures combinatoires [75, 41], s'intéressent davantage à la topologie arbitrairement complexe du modèle qu'à son plongement dans l'espace (i.e., sa géométrie).

Dans l'objectif de la segmentation/reconstruction, les modèles représentant des surfaces sont les plus couramment employés, d'une part parce qu'ils sont moins coûteux en temps de calcul que les modèles purement volumiques, d'autre part parce qu'ils sont mieux adaptés à l'approche frontière de la segmentation. Une surface sans bord pourra représenter efficacement le bord d'une composante de l'image.

Beaucoup de modèles déformables de surfaces ou de frontières ont été développés. Le Chapitre 4 présente les principaux modèles déformables et leurs applications en extraction de formes.

2.3.2 Approche frontière : image de contours

Même si les modèles géométriques sont capables d'extraire des composantes à partir des seules données brutes, ils peuvent parfois exploiter des « images de contours » comme données.

L'information de contours peut être obtenue à l'aide de méthodes qui n'exploitent que la notion de voisinage entre les points de l'image. Ainsi, les méthodes dérivatives considèrent l'image comme un échantillonnage d'un signal multi-dimensionnel. Les lieux des variations fortes de ce signal (la dérivée du signal) sont les lieux des contours (ou frontières) de l'image. L'*image gradient* représentant les variations du signal image dans deux directions orthogonales constitue une « image de contours ». Un simple seuillage de cette image indique la présence ou non d'un contour. Le calcul du gradient en chaque point de l'image peut se faire avec l'un des nombreux filtres dérivatifs proposés dans la littérature (le plus facile à mettre en œuvre est l'opérateur de Sobel; l'opérateur de Canny-Deriche [18, 33] est plus précis mais plus complexe). On peut aussi exploiter les passages par zéro de la dérivée seconde pour repérer les contours. D'autres méthodes transforment l'image en une fonction dont le niveau de gris représente l'altitude. On déduit alors une formulation analytique dont on peut extraire très simplement la dérivée. Enfin, des méthodes de morphologie mathématique peuvent également calculer une information de contours.

Cette image de contours ne fournit malheureusement pas une partition de l'espace image en différentes régions disjointes. Les contours extraits ne sont en général pas fermés et les algorithmes de fermeture de contours, déjà imparfaits en dimension deux, ne sont pas applicables en dimension trois. La détection des contours n'est donc qu'un pré-traitement de l'image. En contrepartie, elle fournit automatiquement les zones frontières marquées entre les constituants de l'image. En conséquence, l'image de contours constitue une information complémentaire précieuse, et la plupart des modèles déformables base la détection des composantes sur cette information-là.

2.3.3 Approches hybrides

Afin de profiter des avantages de la segmentation par classification et des avantages de l'approche modèle déformable de l'extraction de formes, certains auteurs ont proposé des méthodes hybrides qui font coopérer ces deux approches.

Dans le cas bidimensionnel, Jones et Metaxas [59] utilisent la connexité floue pour détecter un ensemble de régions ; celles-ci repoussent un modèle physique déformable attiré quant à lui par les contours de l'image. Chakraborty *et al.* [20] utilisent un champ Markovien pour classifier l'image en régions ; un modèle déformable de type Fourier *snake* exploite ces informations pour dessiner les contours des régions. Zhu et Yuille [151] ont étendu la croissance de région en intégrant à chaque région une probabilité de distribution de ses éléments et un critère de minimisation de son périmètre.

En revanche, dans le cas tridimensionnel, très peu d'auteurs proposent des approches hybrides, sans doute parce que l'une ou l'autre des approches est déjà très onéreuse en temps de calcul et en mémoire. On peut citer le travail de Kapur *et al.* [61] qui utilise une segmentation région Bayésienne et des opérateurs morphologiques pour extraire les tissus d'un cerveau ; un modèle déformable *bidimensionnel* est employé pour affiner le résultat. Les approches hybrides tridimensionnelles constituent donc un domaine encore à explorer.

2.4 Conclusion

L'extraction de formes de données volumétriques est donc effectuée différemment suivant leur nature :

- Si les données sont adaptées à une approche région de classification ou si leur nature autorise un simple seuillage pour approcher leurs composantes, on choisira un algorithme discret d'extraction d'une représentation géométrique. Le Chapitre 3 montre comment construire une surface triangulée fermée à partir de ces données. La construction que nous proposons fait le lien entre les deux méthodes classiques — *marching-cubes* et suivi de surfaces digitales — usuellement employées. Ce lien montre que nous pouvons reconstruire très rapidement une surface triangulée à partir d'une composante segmentée de l'image (en $O(n^2)$ si l'image a n^3 voxels).
- Si les données sont brutes ou que leur nature impose une approche frontière à l'extraction de leurs composantes, une extraction par modèle déformable sera préférée. Le processus de segmentation sera indissociable de la construction de la représentation

géométrique. Le Chapitre 4 examine les différentes catégories de modèles déformables proposés dans la littérature. Il apparaît que leur lacune commune principale réside dans leur incapacité à appréhender efficacement des formes arbitrairement complexes de l'image. Dans le Chapitre 5, nous présentons un modèle déformable générique, basé sur une maille triangulée, et optimisé pour modifier sa topologie en fonction des déformations imposées à sa géométrie lors du processus d'adaptation aux données.

Le Chapitre 6 discute des résultats obtenus par ces deux méthodes sur des images volumétriques de modalités diverses. La méthode discrète de construction que nous proposons dans le Chapitre 3 produit une surface triangulée à partir de données classifiées (en intérieur et extérieur par exemple). Le modèle générique que nous proposons (cf. Chapitre 5) manipule des surfaces triangulées arbitrairement complexes. On peut donc exploiter cette reconstruction discrète comme initialisation de notre modèle générique. Les différents aspects de cette approche sont également abordés dans le Chapitre 6.

Chapitre 3

Reconstructions discrètes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux méthodes de segmentation/reconstruction discrètes, basées sur un balayage complet ou partiel des données. Ces méthodes exploitent le fait que les données sont inscrites dans un espace discret et effectuent la segmentation/reconstruction de manière directe par calcul local, c'est-à-dire que le résultat n'est pas obtenu par la convergence d'un processus.

Ainsi qu'il a été souligné dans la Section 2.2.2, ces méthodes sont extrêmement rapides et particulièrement adaptées aux applications de visualisation. De plus, si un pré-traitement a été effectué sur l'image (classification des voxels par méthode probabiliste par exemple), les méthodes discrètes fournissent efficacement un modèle géométrique.

Les méthodes discrètes ne sont donc pas des outils de segmentation à proprement parler ; en revanche, ce sont des outils rapides de construction de modèles géométriques à partir de données volumétriques, dont le résultat est exploitable pour la visualisation ou pour l'initialisation d'un autre processus. C'est particulièrement le deuxième aspect qui nous intéressera, car nous souhaitons exploiter le résultat d'une méthode discrète comme initialisation de notre modèle générique que nous présentons dans le Chapitre 5.

Nous allons examiner les liens unissant les deux approches discrètes les plus utilisées : les méthodes d'extraction d'*iso-surfaces* et les méthodes d'extraction de *surfaces digitales*.

Dans la Section 2.2.2, nous avons décrit succinctement les méthodes d'extraction d'*iso-surfaces*. Celles-ci considèrent l'image implicitement ou explicitement comme un échantillonnage uniforme d'un champ scalaire continu. Ces méthodes calculent une surface triangulée qui est censée approcher une iso-potentielle donnée (par l'utilisateur) de ce champ ; on dit souvent *iso-surface*. En décomposant le calcul sur des petites parties de l'image (blocs de 8 voxels pour le *marching-cubes* [77], blocs de 4 voxels pour les *marching tetrahedra* [45]), ces méthodes déterminent localement les voxels intérieurs et les voxels extérieurs et en déduisent un ensemble de triangles. L'union de ces triangles forme une surface triangulée. La recherche d'une iso-valeur dans les données est donc équivalente à la *binarisation* de ces données suivant cette valeur. Les iso-surfaces ont la propriété intéressante d'être des 2-variétés dans \mathbb{R}^3 sans bord (Définition A.3). Un grand nombre de caractéristiques géométriques et topologiques peuvent donc être calculées efficacement. De plus, ces surfaces sont directement exploitables par d'autres applications (e.g., visualisation, modèles déformables, conception

assistée par ordinateur).

La Section 2.2.2 a évoqué les méthodes d'extraction de *surfaces digitales*. A partir d'une image *binnaire*, ces méthodes construisent l'interface séparant les voxels intérieurs (ou les voxels de l'objet) des voxels extérieurs (ou les voxels du fond). Elles sont plus rapides que les méthodes d'extraction d'iso-surfaces, mais les surfaces extraites ne sont pas des 2-variétés dans \mathbb{R}^3 . En contrepartie, les surfaces digitales satisfont à des théorèmes de Jordan *digitaux* sous des considérations de *connexité*: elles séparent les composantes de l'objet des composantes du fond *dans l'espace digital*. A noter que les surfaces digitales (ou *surfaces discrètes*) sont parfois définies comme des ensembles de voxels [63, 64, 81, 99]. *Nous conserverons au cours de cette thèse la définition des surfaces digitales comme ensemble de surfels.*

D'après ce qui précède, les deux approches précédentes semblent posséder quelques points communs, notamment la définition d'un intérieur et d'un extérieur. Les surfaces extraites ont la propriété de Jordan de séparation, mais l'une dans \mathbb{R}^3 , l'autre dans \mathbb{Z}^3 . La construction des iso-surfaces par *blocs discrets* semble toutefois indiquer une relation entre les surfaces digitales et les iso-surfaces.

En utilisant des considérations de topologie digitale (notamment la connexité digitale), nous allons déduire *formellement* deux résultats aux conséquences pratiques intéressantes :

1. D'une part, nous mettons en évidence un mécanisme de construction des tables de configurations utilisées par l'algorithme du *marching-cubes* et par ses nombreuses optimisations. L'utilisation de ces tables garantit que *la surface résultante est une 2-variété dans \mathbb{R}^3* . En conséquence, cette surface peut servir d'initialisation à un processus de segmentation/reconstruction basé sur le modèle générique que nous proposons (Chapitre 5).
2. D'autre part, nous démontrons que la surface construite par ces tables est étroitement liée à la surface digitale calculée avec les mêmes considérations topologiques. Ainsi, *il est possible de construire directement les surfaces digitales d'une image avec les iso-surfaces de cette image et réciproquement* (il y a bijection entre ces représentations). Grâce à ce résultat, l'une ou l'autre de ces représentations peut être utilisée indifféremment en fonction du contexte où elle est la plus efficace.

La structure de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps, nous faisons un bref rappel des différentes variantes de l'algorithme du *marching-cubes* qui construisent des surfaces sans bord. Puis nous rappelons quelques définitions essentielles de topologie digitale et de topologie combinatoire. Ensuite, nous explicitons une méthode de construction d'une iso-surface combinatoire basée sur des critères de connexité digitale. Pour « plonger » cette surface combinatoire dans l'espace Euclidien, nous présentons une méthode de subdivision des boucles de la variété combinatoire: la surface résultante vérifie effectivement l'ensemble des propriétés précitées que l'on peut légitimement attendre des iso-surfaces. Nous validons la construction d'iso-surfaces sur des exemples synthétiques et sur des données médicales. Enfin, nous explicitons le lien entre iso-surfaces et surfaces digitales et nous en déduisons quelques propriétés intéressantes.

3.2 Génération d'iso-surfaces : *marching-cubes* et extensions

Pour extraire l'iso-surface d'une image, l'utilisateur fournit un seuil : les voxels dont la valeur est inférieure au seuil sont dits *extérieurs*, les autres sont *intérieurs*. L'algorithme originel du *marching-cubes* de Lorensen et Cline [77] est basé sur la tabulation de 256 configurations. A chaque configuration est associé un ensemble de triangles. L'algorithme balaie l'image par blocs de 8 voxels contigus. Chacun de ces voxels est soit intérieur, soit extérieur, ce qui donne les $2^8 = 256$ configurations différentes. L'image est donc implicitement transformé en image binaire (i.e., une image en noir et blanc) : les niveaux de gris de l'image ne sont généralement utilisés que pour lisser la surface ou calculer les normales aux sommets. Ainsi, la définition des tables de configurations détermine entièrement les propriétés des iso-surfaces extraites.

A l'origine, cet algorithme ne garantissait pas que l'iso-surface construite était une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 , comme l'a entre autres remarqué Dürst [39]. En effet, les tables de configurations, déterminées empiriquement, présentaient quelques incohérences : des « trous » apparaissaient sur la surface à cause de l'ambiguïté de la situation de la Figure 3.1 en topologie digitale. Pour les applications de visualisation, ces « défauts » n'ont absolument aucune incidence. En revanche, la surface reconstruite n'est pas exploitable efficacement par d'autres applications.

De nombreuses méthodes ont corrigé avec succès ces défauts dans la surface, parmi lesquelles on peut citer (voir Van Gelder et Wilhelms [47] pour un compte-rendu précis de ces méthodes) :

- choix arbitraire d'une connexion suivant l'une des diagonales [103] ;
- utilisation de la valeur moyenne (en niveaux de gris) au milieu de cette configuration [145] ou d'une interpolation bilinéaire ou trilinéaire [101, 103] pour décider de la connexion dans cette configuration ;
- remplissage des trous créés par l'algorithme du *marching-cubes* avec un quadrilatère [112] ;
- ré-échantillonnage du cube de voxels si une ambiguïté apparaît [94] ;
- utilisation d'un voisinage étendu et d'une interpolation tri-cubique pour le choix de la connexion [47] ;
- utilisation de la cohérence vis-à-vis de l'information de gradient [47].

La plupart de ces méthodes ont été conçues et testées empiriquement ou par examen systématique de milliers de configurations. Certaines extraient des informations supplémentaires des niveaux de gris autour des cas problématiques pour décider de la connexité. En revanche, d'autres décident de la connexité suivant des critères implicites de topologie digitale : par exemple, Nielsen et Hamman [103] choisissent de connecter systématiquement les voxels du fond dans le cas de la Figure 3.1 — cela correspond à un choix de *6-connexité* pour les voxels

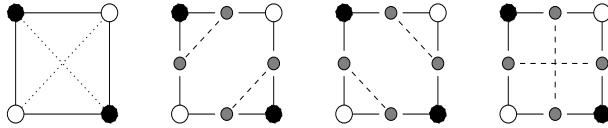


FIG. 3.1 – La configuration problématique dans l’algorithme du *marching-cubes* et quelques choix de connexion arbitraires.

objets et *18-* ou *26-connexité* pour les voxels fonds (ou, suivant la terminologie de Udupa et Ajjanagadde [136], respectivement la *0-connexité* et la *1-* ou *2-connexité*).

Nous allons nous démarquer de ces méthodes en introduisant explicitement la connexité digitale dans le calcul de la table des configurations : une connexité est associée aux voxels du fond (ou voxels extérieurs) et une connexité est associée aux voxels du devant (ou voxels intérieurs). Ainsi, la table des configurations est une fonction de ces deux connexités. En conséquence, nous n’essayons pas de reconstruire une surface qui représente (i.e., est homéomorphe à) l’iso-surface continue sous-jacente d’un champ potentiel scalaire dont l’image ne serait qu’un échantillon discret) : le problème difficile de la cohérence entre iso-surface extraite et iso-surface *réelle* ne se pose donc pas [101, 47]. Les tables de configurations que nous calculons sont conçues pour représenter la *surface digitale* de l’image binaire considérée avec les mêmes connexités.

3.3 Topologie digitale et combinatoire

Nous ne nous intéressons pas à l’extraction d’une surface en vue d’une simple visualisation, mais nous cherchons à construire une surface avec des propriétés bien définies : ce point est essentiel pour les applications de modélisation géométrique ou de segmentation. Dans les sections qui suivent, nous présentons une méthode originale pour construire quatre tables de configurations, chaque table correspondant à une connexité précise pour les voxels du fond et les voxels du devant. Les surfaces générées avec ces tables possèdent des propriétés intéressantes : par exemple, le problème classique des « trous » dans les iso-surfaces construites par le *marching-cubes* de Lorensen et Cline [39] est résolu.

Nous commençons donc par rappeler quelques définitions essentielles de la topologie digitale, puis nous montrons comment nous *plongeons* les voxels de l’espace discret \mathbb{Z}^3 dans l’espace continu \mathbb{R}^3 , et nous introduisons quelques définitions et propriétés des variétés combinatoires.

3.3.1 Définitions

Une *image* I est un couple (\mathcal{E}, h) où h est une application d’un sous-ensemble \mathcal{E} de \mathbb{Z}^3 , appelé le *support* de I , vers un ensemble $D(I)$ qui est le domaine de valeur de h . Une image dont le domaine est l’ensemble $\{0, 1\}$ formé de deux éléments est appelée une *image binaire*. Toute image seuillée est une image binaire. Dans la suite, I est une image binaire avec un support fini, et nous notons I^- le *néгатif* de l’image I .

Un *voxel* v est un élément du support \mathcal{E} ; l’élément $h(v)$ est la *valeur du voxel* v dans I . Un voxel de valeur 0 (resp. 1) est un *0-voxel* (resp. 1-voxel). Le *fond* $\mathcal{N}(I)$ de l’image I est

le sous-ensemble de \mathcal{E} composé de tous les 0-voxels de I . Le devant $\mathcal{U}(I)$ de l'image I est son complémentaire dans \mathcal{E} .

Nous ne nous intéressons qu'aux images finies. Nous supposons que le bord du support d'une image est un sous-ensemble soit du fond, soit du devant de l'image. Cela n'est pas restrictif, car on peut toujours étendre le support pour qu'il n'y ait que des voxels de même nature sur le bord. Sous ces hypothèses, l'image I est une *scène sur \mathbb{Z}^3* d'après la terminologie de Udupa [135].

Chaque voxel v peut être identifié à ses trois coordonnées entières $v = (i, j, k) \in \mathcal{E}$. Cette identification nous permet de définir des relations d'adjacence entre les voxels. Deux voxels sont dits ρ -adjacents pour $\rho \in \{6, 18, 26\}$ si leurs coordonnées diffèrent de ± 1 sur : exactement une coordonnée si $\rho = 6$ (adjacence de face), une ou deux coordonnées si $\rho = 18$ (adjacence de face ou d'arête), une, deux ou trois coordonnées si $\rho = 26$ (adjacence de face, d'arête ou de sommet). Deux voxels sont dits *strictement* ρ -adjacents si leurs coordonnées diffèrent de ± 1 sur : exactement une coordonnée si $\rho = 6$ (adjacence de face), exactement deux coordonnées si $\rho = 18$ (adjacence d'arête), exactement trois coordonnées si $\rho = 26$ (adjacence de sommet). On désigne par $\rho(u, v)$ deux voxels u et v qui sont ρ -adjacents. La relation de ρ -adjacence est une relation irréflexive, symétrique, non transitive.

Pour définir des objets, nous utilisons la fermeture transitive de cette relation, appelée la relation de *connexité*. Deux voxels v_1 et v_n d'un sous-ensemble A de \mathcal{E} sont ρ -connexes (dans l'ensemble $A \subset \mathcal{E}$) s'il existe une suite v_1, v_2, \dots, v_n d'éléments de A telle que pour tout $1 \leq i < n$, v_i est ρ -adjacent à v_{i+1} . L'ensemble A est ρ -connexe si toute paire de voxels de A est ρ -connexe. Comme la ρ -connexité est une relation d'équivalence, les classes d'équivalence de cette relation pour un sous-ensemble arbitraire A de \mathcal{E} sont appelées les ρ -composantes de A (elles sont évidemment ρ -connexes). Ainsi, l'ensemble A est ρ -connexe s'il ne possède qu'une ρ -composante. Par abus, nous dirons que deux 1-voxels (resp. deux 0-voxels) sont ρ -connexes s'ils sont ρ -connexes dans l'ensemble $\mathcal{U}(I)$ (resp. l'ensemble $\mathcal{N}(I)$).

L'algorithme du *marching-cubes* est basé sur des configurations de huit voxels adjacents. Nous définissons donc un *8-cube* \mathcal{C}_8 d'un support \mathcal{E} comme un sous-ensemble de huit éléments de \mathcal{E} tel que $\forall u, v \in \mathcal{C}_8, u \neq v \Rightarrow 26(u, v)$. Les éléments de \mathcal{C}_8 peuvent être ordonnés selon leurs coordonnées : si $\mathcal{C}_8 = \{v_0, \dots, v_7\}$ et $v_0 = (i, j, k)$, alors $v_1 = (i + 1, j, k)$, $v_2 = (i, j + 1, k)$, $v_3 = (i + 1, j + 1, k)$, \dots , et $v_7 = (i + 1, j + 1, k + 1)$. Le 8-cube est alors dit *ordonné* et est assimilé au 8-uplet (v_0, \dots, v_7) . Les *coordonnées d'un 8-cube* sont les coordonnées de v_0 . On définit similairement une *4-face* d'un support \mathcal{E} comme un sous-ensemble de quatre éléments de \mathcal{E} tel que $\forall u, v \in \mathcal{C}_4, u \neq v \Rightarrow 18(u, v)$. Deux m -voxels strictement 26-adjacents sont contenus dans un unique 8-cube, disons H . Le 8-cube H forme une *configuration 26-strictes de m -voxels* si tous les autres voxels de H sont des $(1 - m)$ -voxels.

Si A est un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel (ici, ce sera \mathbb{R}^3) doté de sa topologie usuelle, nous notons $\text{Fr}(A)$ le *bord de A* qui est égal à l'*adhérence de A* , notée \bar{A} , moins l'*intérieur topologique de A* , noté $\overset{\circ}{A}$, au sens du plus grand ouvert contenu dans A . L'*enveloppe convexe fermée de A* est notée $\text{Conv}(A)$ et est définie comme l'ensemble des points exprimables par combinaison linéaire de points de A . Si un sous-ensemble B est convexe, alors l'ensemble $\text{Extr}(B)$ est l'ensemble des *points extrémaux* de B (i.e., $b \in \text{Extr}(B) \Rightarrow B \setminus b$ est encore convexe).

Similairement à Kong et Roscoe [64], nos preuves sont basées sur le plongement de l'ensemble des voxels dans l'espace \mathbb{R}^3 . Ainsi, tout voxel $v \in \mathcal{E}$ possède un *point treillis*

(ou \star -point) correspondant v^* dans l'espace \mathbb{R}^3 avec les mêmes coordonnées (mais dans \mathbb{R}^3). Toute paire $\{u, v\}$ de voxels 6-adjacents (i.e., on appelle aussi cette paire un *surfel*, cf. Section 3.7) a un *segment treillis* (ou \star -segment) qui lui correspond : c'est un segment ouvert dans \mathbb{R}^3 reliant les \star -points u^* et v^* de u et v (on le note $\{u, v\}^*$). On associe de manière similaire à une 4-face de \mathcal{E} une *face treillis* (ou \star -face) de \mathbb{R}^3 qui est un carré ouvert, et à un 8-cube un *cube treillis* (ou \star -cube) qui est un cube ouvert. Cet assemblage de sous-ensembles de \mathbb{R}^3 s'appelle la *représentation treillis* d'un espace digital.

3.3.2 Plongement d'ensembles de voxels dans l'espace Euclidien

On est en droit d'attendre que la connexité choisie pour un sous-ensemble d'un espace digital influe sur sa représentation dans l'espace \mathbb{R}^3 . En effet, si on ne peut *traverser* un ensemble de voxels dans l'espace digital, il doit en être de même dans l'espace continu. *En d'autres termes, il paraît naturel de conserver les relations de connexité au travers de l'opération de plongement.* On peut remarquer que le plongement « traditionnel » des voxels dans \mathbb{R}^3 en tant que cubes fermés ou ouverts ne répond pas à ce principe.

Le plongement de l'image binaire, considérée avec certaines connexités, doit donc en dépendre. En conséquence, nous introduisons la notion de ρ -décomposition d'un ensemble de voxels :

Définition 3.1 (ρ -décomposition de \mathcal{E})

Nous définissons la ρ -décomposition de \mathcal{E} , notée $\mathcal{G}_\rho(\mathcal{E})$, où ρ est une relation d'adjacence sur les voxels de \mathcal{E} , comme le complexe dont les éléments sont les sous-parties de \mathbb{R}^3 suivantes :

- (i) Tous les points treillis des voxels de \mathcal{E} . Ces éléments sont appelés les *sommets* ou *0-cellules* de la décomposition par analogie avec les complexes cellulaires.
- (ii) Tous les segments ouverts entre les 0-cellules lorsque les voxels correspondants sont ρ -adjacents. Ces éléments sont les *arêtes* ou *1-cellules* de la décomposition.
- (iii) Tous les morceaux de plans ouverts qui peuvent être construits à partir des i -cellules, $0 \leq i \leq 1$, — leur bord peut être décomposé en i -cellules — et qui sont *minimaux* — $\forall p, q \in \mathcal{G}_\rho(\mathcal{E})$, $q \subset p \Rightarrow q = p$. Ces éléments sont les *faces* ou *2-cellules* de la décomposition.
- (iv) Tous les ouverts de \mathbb{R}^3 qui peuvent être construits à partir des i -cellules, $0 \leq i \leq 2$, et qui sont minimaux. Ces éléments sont les *volumes* ou *3-cellules* de la décomposition.

On peut aisément voir que toutes les i -cellules sont des ensembles convexes et que chacune des i -cellules est incluse dans au moins un cube unité fermé de \mathbb{R}^3 dont les sommets ont des coordonnées entières. Toute i -cellule est homéomorphe à l'espace \mathbb{R}^i et a ainsi une dimension bien définie i . Si Φ est une i -cellule, alors l'ensemble $\text{Extr}(\overline{\Phi})$ est un sous-ensemble des 0-cellules de $\mathcal{G}_\rho(\mathcal{E})$. On peut remarquer que $\mathcal{G}_6(\mathcal{E})$ est la représentation treillis de \mathcal{E} dans l'espace \mathbb{R}^3 : c'est la décomposition cellulaire standard en cubes, carrés, et segments unités, sur les points à coordonnées entières.

Définition 3.2 (ρ -décomposition d'un sous-ensemble de \mathcal{E}) La ρ -décomposition $\mathcal{G}_\rho(A)$ d'un sous-ensemble A de \mathcal{E} est définie comme le sous-ensemble de $\mathcal{G}_\rho(\mathcal{E})$ tel que, si $\Phi \in \mathcal{G}_\rho(A)$, alors les éléments de $\text{Extr}(\overline{\Phi})$ correspondent tous à des voxels de A .

Pour tout m , $0 \leq m \leq 3$, nous utilisons la notation $\mathcal{G}_\rho^m(A)$ pour désigner le sous-ensemble de $\mathcal{G}_\rho(A)$ composé de toutes ses i -cellules, pour $0 \leq i \leq m$.

Toutes les 0-cellules d'une ρ -décomposition d'un ensemble A sont donc des \star -points des voxels de A . Le bord d'une i -cellule ($0 < i \leq 3$) est l'union (dans \mathbb{R}^3) de j -cellules ($0 \leq j < i$).

Maintenant, nous avons tous les éléments pour définir un « plongement volumétrique » dans l'espace \mathbb{R}^3 d'un ensemble quelconque de voxels considéré avec une relation digitale d'adjacence. Informellement, tout ensemble de voxels remplit une partie de \mathbb{R}^3 dépendante de la relation d'adjacence digitale choisie pour cet ensemble.

Définition 3.3 (ρ -volume et ρ - m -squelette) Le ρ -volume $\bigcup \mathcal{G}_\rho(A)$ d'un ensemble de voxels A est le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui est l'union (dans \mathbb{R}^3) de toutes les cellules de $\mathcal{G}_\rho(A)$. Nous appelons ρ - m -squelette de A , pour $0 \leq m \leq 3$, et nous notons $\bigcup \mathcal{G}_\rho^m(A)$, le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui est l'union (dans \mathbb{R}^3) de toutes les cellules de $\mathcal{G}_\rho^m(A)$.

On dira que le ρ -volume d'un ensemble de voxels est le *plongement* dans \mathbb{R}^3 de cet ensemble digital.

Cette définition est très proche de la définition de *polyèdre digital* de Kenmochi *et al.* [63]. En effet, un polyèdre digital est construit en collectant tous les *simplexes discrets* définis sur chaque 8-cube de l'image. En utilisant une table de configuration de simplexes discrets — similairement à l'algorithme du *marching-cubes*, mais la configuration contient un morceau de volume défini sur les sommets du cube et non un morceau de surface défini sur des sommets intermédiaires —, ils construisent un polyèdre dans \mathbb{R}^3 . Cependant, ils restreignent leur étude aux objets dont le bord est un complexe cellulaire de dimension 2. Par ailleurs, leur table des configurations de simplexes est donnée telle quelle : il est difficile d'exploiter ces tables pour en déduire des propriétés.

La proposition suivante peut être vérifiée très simplement :

Proposition 3.4 Les trois déclarations suivantes sont équivalentes, si A est un sous-ensemble d'un support \mathcal{E} et ρ une relation d'adjacence sur \mathcal{E} :

- (i) l'ensemble A est ρ -connexe (dans \mathcal{E}),
- (ii) le ρ -volume de A est connexe par arcs (dans \mathbb{R}^3),
- (iii) le ρ -1-squelette de A est connexe par arcs (dans \mathbb{R}^3).

Une illustration bidimensionnelle de la ρ -décomposition et du ρ -volume d'ensemble de voxels est donnée sur la Figure 3.2. Les 1-voxels et les 0-voxels de l'image sont décomposés suivant des connexités différentes et leurs ρ -volumes correspondants sont montrés. On peut symboliser la 4-décomposition (en 2D) de 4 voxels adjacents par l'ensemble de sous-parties de \mathbb{R}^2 $\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \text{—}, |, \text{—}, |, \square\}$ alors que sa 8-décomposition nécessite l'ensemble $\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \text{—}, |, \text{—}, |, /, \backslash, \triangle, \triangle, \nabla, \nabla\}$ pour être correctement représentée. Les ρ -volumes de ces deux ensembles sont néanmoins identiques.

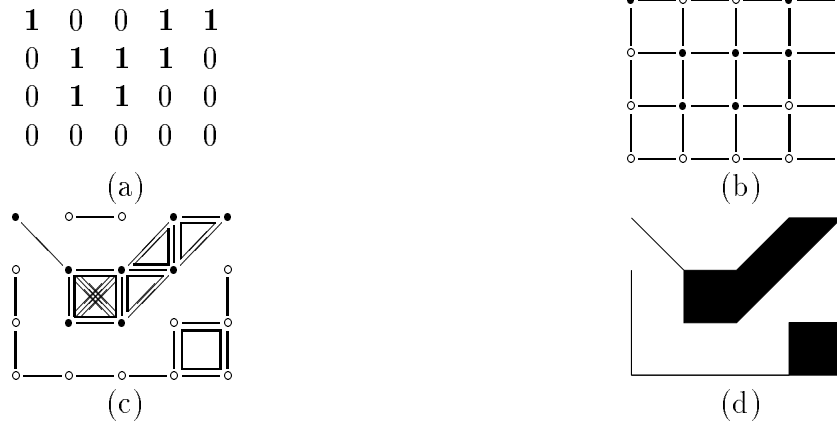


FIG. 3.2 – (a) Image binaire représentée par un ensemble de 0 et de 1 dans un espace digital; (b) la représentation treillis de ce support (sur le schéma, les voxels sont marqués différemment suivant leur valeur); (c) la 8-décomposition de l'ensemble des 1-voxels et la 4-décomposition de l'ensemble des 0-voxels symbolisés dans l'espace \mathbb{R}^2 ; (d) le 8-volume et le 4-volume de ces ensembles (sous-ensembles de \mathbb{R}^2).

3.3.3 Intérieur et extérieur de variétés

Les surfaces sont définies topologiquement comme des variétés. En conséquence, nous utiliserons au cours de ce chapitre les définitions de *2-variété dans \mathbb{R}^3* (voir Définition A.3 et Définition A.4) ainsi que la notion d'*orientation cohérente* sur ces variétés sans bords (voir Section A.1.2). De plus, nous construisons l'iso-surface à l'aide de *variétés combinatoires* (voir Section A.1.4).

On peut montrer aisément la proposition suivante, en utilisant l'équivalence de connexité donnée par la Proposition 3.4 et en utilisant le Corollaire A.13:

Proposition 3.5 Soit A un ensemble ρ -connexe de voxels (dans \mathcal{E}). Soit S une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 orientée de façon cohérente. Les deux assertions suivantes sont équivalentes (deux assertions symétriques existent pour l'extérieur de S):

- (i) $\bigcup \mathcal{G}_\rho(A) \subset \text{Int}(S)$,
- (ii) $\bigcup \mathcal{G}_\rho(A) \cap \text{Int}(S) = \emptyset$ et $\exists u \in \mathcal{G}_\rho(A) / u \subset \text{Int}(S)$.

Cette proposition est d'ailleurs vraie pour tout sous-ensemble connexe par arcs de \mathbb{R}^3 .

3.3.4 Variétés combinatoires

Soit M une 2-variété combinatoire *triangulée* sans bord, G son graphe, et $\{F_1, F_2, \dots, F_f\}$ son ensemble de boucles. Soit f une géométrie de l'objet combinatoire M (voir Section A.1.4) dans l'espace \mathbb{R}^3 . Ainsi, une géométrie associée à un sommet U de M des coordonnées \mathbf{u} dans l'espace \mathbb{R}^3 . Cette géométrie construit un f -complexe de M dans \mathbb{R}^3 noté \overline{M}^f .

Du fait de la géométrie *a priori* arbitraire imposée par f à la surface combinatoire, le complexe \overline{M}^f n'est pas une triangulation (donc un complexe simplicial) dans le cas général.

La Proposition A.24 montre que ce complexe est une triangulation lorsque ses éléments sont disjoints (on dit que le complexe est *propre*). On dira alors que M est *sans auto-intersection dans \mathbb{R}^3 par f* et, par abus, on appellera le corps de $\overline{M^f}$ le *plongement de M dans \mathbb{R}^3 par f* et on dira que M est *plongée dans \mathbb{R}^3 par f* . Lorsque le complexe $\overline{M^f}$ n'est pas propre, on dira que M est *immergée dans \mathbb{R}^3 par f* .

On notera $|\overline{M^f}|$ le corps de $\overline{M^f}$ (que le complexe soit propre ou non). Ici, nous utilisons l'équivalence (Proposition 5.2) entre 2-variété combinatoire triangulée sans bord (Définition A.25) et surface combinatoire triangulée fermée (Définition 5.1) pour obtenir le résultat suivant ; celui-ci permet de déterminer la « topologie intrinsèque » modélisée par une variété combinatoire :

Proposition 3.6 La 2-variété combinatoire triangulée sans bord M est sans auto-intersection dans \mathbb{R}^3 par f (ou, dit autrement, le f -complexe de M est propre) si et seulement si le corps du f -complexe de M est homéomorphe au corps des complexes canoniques associés à M (voir Définition A.26). En particulier, il est homéomorphe à une surface fermée. C'est une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 .

Preuve : Voir preuve de la Proposition 5.3. □

La variété combinatoire M est donc une représentation combinatoire d'une surface fermée dans \mathbb{R}^n (i.e., chaque composante connexe représente une sphère à p anses). Lorsque l'on impose une géométrie à la variété combinatoire, si la surface est plongée dans l'espace euclidien de dimension 3, alors elle a la même « topologie » que celle intrinsèquement définie par sa combinatoire. Cela implique que la géométrie de M influe sur la topologie (continue) que M vise à représenter dans l'espace.

La définition suivante établit la notion d'*orientabilité* d'une variété combinatoire :

Définition 3.7 (Orientabilité d'une variété combinatoire)

Soit M une 2-variété combinatoire sans bord, G son graphe et $\{F_1, F_2, \dots, F_f\}$ ses boucles. S'il existe une orientation pour chaque boucle F_i notée L_i (boucle orientée) telle que tout arc orienté de M est adjacent à exactement une boucle L_k et une boucle L'_l , alors M est *orientable*.

Orienter M , c'est alors orienter les boucles de chaque composante connexe de façon à ce que la propriété précédente soit respectée.

Si n est le nombre de composantes connexes du graphe de M , alors il existe 2^n orientations possibles pour M . Soit f une géométrie dans \mathbb{R}^3 sur M . Si $|\overline{M^f}|$ est une 2-variété (topologique) sans bord dans \mathbb{R}^3 , alors f est appelée par abus *plongement de M dans \mathbb{R}^3* et on dira que M est *plongée dans \mathbb{R}^3 par f* . On voit que l'on peut associer une orientation dans \mathbb{R}^3 (au sens de la Définition A.6) à l'orientation des boucles de chaque composante de M .

Définition 3.8 (Intérieur et extérieur d'une 2-variété combinatoire connexe orientée) Soient M une 2-variété combinatoire sans bord connexe orientée et f un plongement de M dans \mathbb{R}^3 . Par convention, tout point à l'*intérieur* de $|\overline{M^f}|$ voit les « boucles » de M

dans le sens antitrigonométrique, et tout point à l'*extérieur* voit les « boucles » dans le sens trigonométrique.

Evidemment, si on note \widetilde{M} la variété combinatoire connexe orientée inversement, alors l'intérieur du plongement par f de \widetilde{M} est l'extérieur du plongement par f de M et réciproquement. Pour une variété combinatoire connexe, la Définition 3.8 détermine un intérieur et extérieur pour un plongement f . Si cette variété n'est pas connexe, un intérieur et extérieur sont définis pour chaque composante plongée par f . On introduit la notion d'orientation cohérente suivant la cohérence de l'orientation induite dans \mathbb{R}^3 :

Définition 3.9 (Intérieur et extérieur d'une 2-variété combinatoire orientée) On dira donc qu'une 2-variété combinatoire sans bord M est *orientée de façon cohérente pour le plongement f* si l'orientation des boucles de M induit sur la surface $|\overline{M^f}|$ une orientation cohérente (cf. Définition A.9). L'*intérieur* et l'*extérieur* de $|\overline{M^f}|$ peuvent alors être définis naturellement (cf. Définition A.12).

Avec ces définitions, nous pouvons définir un ensemble de propriétés attendues pour les iso-surfaces d'images binaires.

3.4 Construction de l'iso-surface

Dans les sections qui suivent, $I = (\mathcal{E}, h)$ est une image binaire. Sauf si cela est notifié expressément, on associe une relation d'adjacence κ au devant $\mathcal{U}(I)$ de l'image I et une relation d'adjacence λ au fond $\mathcal{N}(I)$ de cette image. Ces relations induisent des κ -composantes sur $\mathcal{U}(I)$ et des λ -composantes sur $\mathcal{N}(I)$. Le couple (κ, λ) sera appelé *couple de connexité* (de l'image I).

3.4.1 Propriétés attendues des iso-surfaces

On appelle $\kappa\lambda$ -iso-surface un procédé de construction d'une surface à partir d'une image binaire I considérée avec le couple de connexité (κ, λ) :

Définition 3.10 ($\kappa\lambda$ -iso-surface) On appelle $\kappa\lambda$ -*iso-surface*, et on désigne par $M_{\kappa\lambda}$, tout application (i.e., un procédé de génération) qui transforme une image binaire considérée avec le couple de connexité (κ, λ) en une surface de \mathbb{R}^3 qui possède les propriétés suivantes, si I est une image binaire :

- (i) $M_{\kappa\lambda}(I)$ est une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 orientée de façon cohérente,
- (ii) $M_{\kappa\lambda}(I) = \widetilde{M_{\lambda\kappa}(I^-)}$,
- (iii) $\bigcup \mathcal{G}_{\kappa}(\mathcal{U}(I)) \subset \text{Int}(M_{\kappa\lambda}(I))$,
- (iv) $\bigcup \mathcal{G}_{\lambda}(\mathcal{N}(I)) \subset \text{Ext}(M_{\kappa\lambda}(I))$.

La 2-variété orientée ainsi construite est appelée une $\kappa\lambda$ -iso-surface de l'image I .

Le point (i) spécifie que l'objet généré est une surface fermée plongée dans \mathbb{R}^3 et orientée de façon cohérente (les surfaces à « trous » de l'algorithme du *marching-cubes* sont donc exclues). Le point (ii) exprime que l'iso-surface ($\kappa\lambda$ -iso-surface) construite pour une image I est identique à l'iso-surface ($\lambda\kappa$ -iso-surface) construite pour son négatif I^- en inversant l'orientation. Les points (iii) et (iv) imposent à la surface de séparer les κ -composantes de 1-voxels (plongées dans l'espace) des λ -composantes de 0-voxels (plongées dans l'espace). En conséquence, l'iso-surface construite se situe entre les limites imposées par les connexions entre voxels de valeur identique. A noter qu'une iso-surface peut posséder un nombre quelconque de composantes connexes.

Nous allons construire un tel procédé par une approche locale aux 8-cubes des images. En assemblant tous les morceaux construits, on vérifiera que les propriétés (i-iv) de la Définition 3.10 sont bien respectées.

3.4.2 Construction locale sur une configuration

La construction d'une $\kappa\lambda$ -iso-surface à partir d'une image I est basée sur une extraction locale sur chaque 8-cube de l'image. De plus, la surface sera construite de manière combinatoire, plus précisément sous forme d'une 2-variété combinatoire sans bord.

Au sein de chaque 8-cube \mathcal{C}_8 de I , nous définirons un graphe appelé *graphe local* $G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ du 8-cube \mathcal{C}_8 , qui est fonction de la connexité (κ, λ). Ce graphe sera composé de sommets et d'arcs orientés. Lorsqu'on lui associe un ensemble de boucles (orientées), le graphe local devient un objet combinatoire (voir Définition A.21) noté $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$; les boucles orientées définissent alors l'orientation des arcs. Le $\kappa\lambda$ -iso-graphe $G_{\kappa\lambda}(I)$ est le graphe formé de l'union de tous les graphes locaux de l'image I (sommets et arcs du graphe sont fusionnés s'ils sont identiques à l'orientation près) : ce graphe ne conserve donc que les arcs, non leur orientation.

On appelle *interface d'une image binaire* I l'ensemble des paires de voxels $\{u, v\}$ du support de I telles que $6(u, v)$ et $\{u, v\} = \{0, 1\}$. L'interface est un sous-ensemble des *surfels* de I (voir Section 3.4.1). Toute application de l'interface de I dans \mathbb{R}^3 qui envoie une paire $\{u, v\}$ de voxels 6-adjacents sur le \star -segment $\{u, v\}^*$ est appelée une *iso-application de l'image* I .

Dans la suite, g sera une *iso-application arbitraire* de I . Dans la Section 3.4.2, nous construirons les sommets du graphe local sur les éléments de l'interface de I . L'ensemble des sommets du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I est exactement l'interface de I . L'iso-application g détermine donc une géométrie dans \mathbb{R}^3 pour tout objet combinatoire construit sur les sommets du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I .

L'application g permet de régler la position des sommets formant l'iso-surface sur l'arête de la grille où ils sont définis : cela permet aux $\kappa\lambda$ -iso-surfaces de lisser leur aspect similairement au lissage proposé par Lorensen et Cline [77] dans le *marching-cubes*.

Toute 4-face d'un 8-cube peut être *ordonnée* en un 4-uplet (à une permutation circulaire près) de manière à ce qu'elle soit vue dans le sens trigonométrique de l'intérieur du 8-cube (voir Figure 3.3b). Une 4-face *ordonnée inversement* a l'orientation opposée de la 4-face ordonnée qui lui correspond. Les six 4-faces ordonnées d'un 8-cube sont désignées naturellement par *bas*, *haut*, *droite*, *gauche*, *avant* et *arrière*. Une *8-configuration* (resp. *4-*

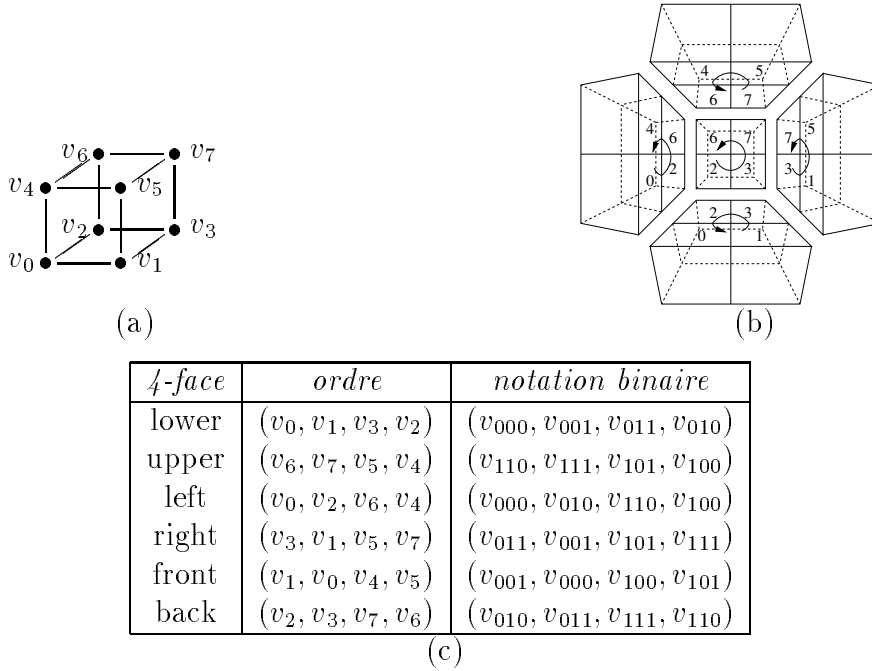


FIG. 3.3 – (a) Représentation treillis d’un 8-cube ordonné ; (b) les 4-faces ordonnées d’un 8-cube (la 4-face avant a été enlevée) ; (c) les 4-faces ordonnées d’un 8-cube et leur codage binaire correspondant.

configuration) est un 8-cube (resp. une 4-face) associé(e) aux valeurs de ses voxels. Tout couple (resp. toute paire) de voxels 6-adjacents est appelé(e) un *surfel orienté* (resp. un *surfel*) ; sa valeur est la valeur (ordonnée ou non) de ses voxels. Une 4-face ordonnée induit quatre surfels orientés ; son inverse induit les quatre surfels *inverses*.

Si \mathcal{C}_8 est 8-cube ordonné composé des voxels v_k , k entre 0 et 7, alors l’index k sera souvent codé binaires sous la forme zyx . Deux voxels de ce 8-cube sont 6-adjacents si leurs index diffèrent sur un seul bit ; ils sont 18-adjacents (resp. 26-adjacents) si leurs index diffèrent sur un ou deux bits (resp. un, deux ou trois bits).

Sur chaque 4-face d’un 8-cube, un ensemble d’arcs orientés est construit. Nous utilisons une table de Karnaugh pour prouver que l’ensemble de tous les arcs orientés d’un 8-cube est un ensemble de boucles orientées. En conséquence, *la méthode de construction des tables de configuration que nous proposons s’étend facilement aux dimensions supérieures* (d’autres adjacences induisent un plus grand nombre de chiffres binaires différents).

Extraction sur une 4-face

Soit $\mathcal{C}_8(v_0, \dots, v_7)$ un 8-cube ordonné de I (cf. Figure 3.3a). Soit \mathcal{C}_4 une 4-face ordonnée de \mathcal{C}_8 (la Figure 3.3b-c décrit l’orientation et le codage des six 4-faces d’un 8-cube). Sur les quatre surfels ordonnés (v_k, v_l) de \mathcal{C}_4 , on applique les règles suivantes de construction du graphe local de \mathcal{C}_8 :

- (i) si la valeur du surfel est $(0, 0)$ ou $(1, 1)$ alors il n’y a pas de sommet créé entre ces deux voxels ;

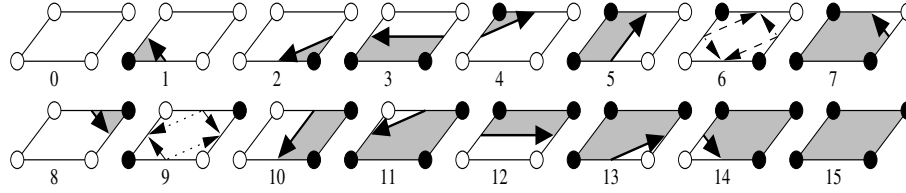


FIG. 3.4 – Les seize configurations différentes d'une 4-face : deux cas sont indéterminés (6 et 9). L'intérieur local est ombré

- (ii) si la valeur du surfel est $(0, 1)$ alors un sommet $\{v_k, v_l\}$ est créé entre ces deux voxels et il existe un arc orienté défini sur la 4-face qui est rentrant sur ce sommet ;
- (iii) si la valeur du surfel est $(1, 0)$ alors un sommet $\{v_k, v_l\}$ est créé entre ces deux voxels et il existe un arc orienté défini sur la 4-face qui est sortant de ce sommet.

Tout sommet créé par une de ces règles est clairement un élément de l'interface de I et g plonge ce sommet dans \mathbb{R}^3 . Ces sommets seront appelés *séparateurs de I* . Les conventions d'arcs rentrant et sortant correspondent à un intérieur localement à gauche de chaque arc vu de l'intérieur du 8-cube. On peut remarquer que ces règles sont *indépendantes du couple de connexité de I* . Le résultat de l'application des règles (i-iii) sur l'ensemble des 4-configurations possibles est montré sur la Figure 3.4. Quatorze des seize configurations sont déterminées par ces règles de façon unique. Seuls les cas 6 et 9 ont besoin d'un traitement particulier. C'est donc sur ces deux configurations (ce sont les configurations problématiques du *marching-cubes*, cf. Figure 3.1) que le couple de connexité détermine une solution cohérente unique. Une 4-face dont les valeurs forment la configuration 6 ou la configuration 9 est dénommée une *4-face croisée*.

D'après la Figure 3.5, une solution satisfaisante ne peut être obtenue pour tous les couples (κ, λ) . En fait, la surface construite doit respecter la propriété (ii) de la Définition 3.10. Pour le couple de connexité $(6, 6)$ ou un des couples $(18, 18)$, $(18, 26)$, $(26, 18)$, $(26, 26)$, un choix de connexion arbitraire induirait une surface localement différente sur l'image négatif. En conséquence,

Proposition 3.11 Dans le cas général un procédé $M_{\kappa\lambda}$, qui satisfait à la propriété $M_{\kappa\lambda}(I) = \widetilde{M_{\lambda\kappa}(I^-)}$ pour une image binaire I arbitraire, ne peut être obtenu si le couple de connexité (κ, λ) est un élément de $\{(6, 6), (18, 18), (18, 26), (26, 18), (26, 26)\}$.

Dans la suite de ce chapitre, les couples $(6, 18)$, $(6, 26)$, $(18, 6)$ and $(26, 6)$ seront dénommés *couples valides* et nous restreignons notre étude à ces couples. On remarque qu'aucune distinction n'est faite entre la 18-connexité et la 26-connexité dans la résolution des configurations croisées : en effet ces connexités ont la même connexité relative sur une 4-face.

Tout arc b construit sur une 4-face \mathcal{C}_4 par ces règles est un élément du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I . On dit que b est un *1-arc*. Par définition, l'iso-application g envoie b dans \mathbb{R}^3 sous la forme d'un segment ouvert inclus dans la \star -face de \mathcal{C}_4 . Par un simple examen des 16 configurations, on constate que, sur cette \star -face, $g(b)$ est disjoint du κ -1-squelette du devant de I et du λ -1-squelette du fond de I lorsque le couple de connexité est valide. Les règles de construction sur une 4-face induisent immédiatement :

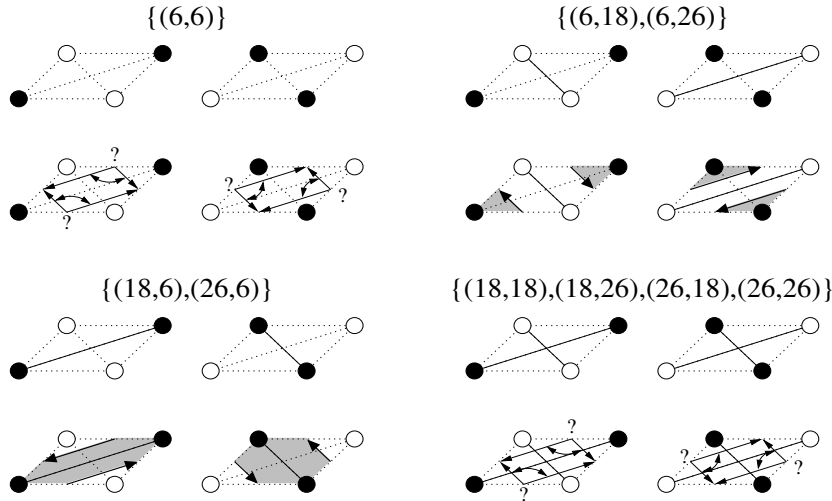


FIG. 3.5 – Solution des configurations problématiques selon le couple de connectivité : les connexions locales entre 1-voxeles et entre 0-voxeles sont soulignées.

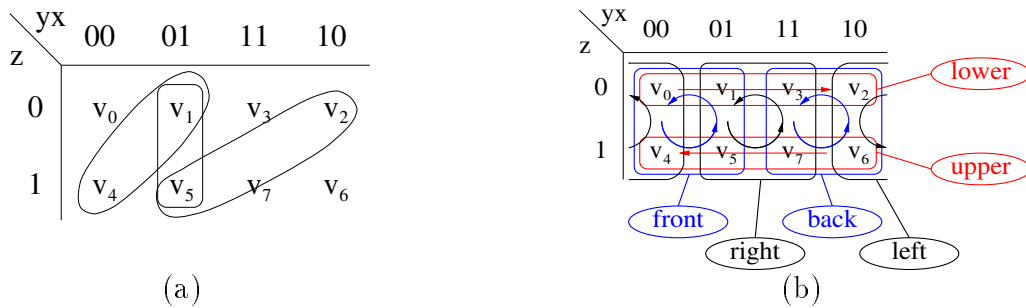


FIG. 3.6 – Table de Karnaugh d'un 8-cube : (a) v_1 et v_5 sont 6-adjacents, v_1 et v_4 sont 18-adjacents, v_5 et v_2 sont 26-adjacents ; (b) les six 4-faces orientées vues dans la table de Karnaugh.

Proposition 3.12 Soit (κ, λ) un couple valide. Soient \mathcal{C}_8^1 et \mathcal{C}_8^2 deux 8-cubes qui partagent une 4-face. Les arcs orientés générés sur cette 4-face au sein du 8-cube \mathcal{C}_8^1 sont exactement les opposés des arcs orientés générés sur cette 4-face au sein du 8-cube \mathcal{C}_8^2 .

Extraction sur un 8-cube

On utilise une table de Karnaugh (voir Figure 3.6a) pour représenter de manière simple une 8-configuration. Deux voxels 6-adjacents sont adjacents dans la table de Karnaugh. Le graphe local d'un 8-cube \mathcal{C}_8 est le graphe dont les sommets sont les sommets créés sur chaque 4-face (i.e., les séparateurs). Ses arcs sont les 1-arcs créés sur chaque 4-face, plus quelques arcs additionnels lorsque \mathcal{C}_8 forme une configuration 26-strict de 1-voxeles (resp. de 0-voxeles) et $\kappa = 26$ (resp. $\lambda = 26$) (cf. ci-dessous). Le lemme suivant montre que les 1-arcs orientés du graphe local forment un ensemble de boucles :

Lemme 3.13 Si (κ, λ) est un couple valide, le graphe local $G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ du 8-cube \mathcal{C}_8 avec

ses arcs orientés peut être arrangé de façon unique en un ensemble de boucles orientées disjointes tel que chaque 1-arc orienté est adjacent à exactement une des boucles. Chacune des boucles obtenues a une longueur supérieure à 3. De plus, le g -complexe des sommets et arcs du graphe local est propre, et son corps dans \mathbb{R}^3 est une courbe fermée sans points multiples.

Preuve : *Chaque surfel orienté d'un 8-cube est partagé par exactement deux faces et est systématiquement traversé en directions opposées comme le montre la table de Karnaugh (Figure 3.6b ou Figure 3.3c). Selon les règles de construction sur chaque 4-face, soit aucun sommet n'est créé sur ce surfel, soit un sommet est créé sur ce surfel orienté avec un 1-arc rentrant (pour la valeur (0, 1)) ou un 1-arc sortant (pour la valeur (1, 0)) lorsqu'il est visité dans l'autre sens sur l'autre 4-face. En conséquence, chaque sommet du graphe local a un arc rentrant et un arc sortant. Le graphe local est donc arrangé en un ensemble de boucles orientées de manière unique : ces boucles n'ont ni sommet commun, ni arc commun. Le fait que ces boucles ont au moins trois arcs vient de l'orthogonalité des 4-faces qui partagent un même voxel. Finalement, les éléments du g -complexe forment trivialement des courbes fermées dans \mathbb{R}^3 ; ces courbes appartiennent à l'ensemble des \star -faces et \star -segments du 8-cube. Or, sur toutes ces parties de \mathbb{R}^3 , les segments ne s'intersectent pas. \square*

La 26-connexité peut modifier le graphe local de \mathcal{C}_8 : si \mathcal{C}_8 forme une configuration 26-strictes de 1-voxels (resp. de 0-voxels) et $\kappa = 26$ (resp. $\lambda = 26$), alors six arcs non-orientés additionnels, appelés θ -arcs, sont définis entre les sommets de $G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ comme décrit sur la Figure 3.7. Dans cette configuration, le graphe local obtenu par les règles précédentes est arrangé en un ensemble de deux boucles $\{(c_x, c_y, c_z), (d_z, d_y, d_x)\}$ qui traversent les 1-arcs orientés (cf. lemme précédent). Avec les six 0-arcs (qui relient un sommet c_i à un sommet d_j si $i \neq j$) ajoutés au graphe local, on réarrange le graphe en un ensemble de six boucles $\{(c_x, c_y, d_z), (c_y, c_z, d_x), (c_z, c_x, d_y), (d_x, d_z, c_y), (d_z, d_y, c_x), (d_y, d_x, c_z)\}$. Par construction, on a :

Lemme 3.14 Si \mathcal{C}_8 forme une configuration 26-strictes de 1-voxels (resp. de 0-voxels) et $\kappa = 26$ (resp. $\lambda = 26$), (κ, λ) valide, alors le graphe local $G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ peut être arrangé en un ensemble de boucles orientées tel que chaque 1-arc (resp. chaque 0-arc non-orienté) est adjacent à exactement une boucle (resp. est adjacent à exactement deux boucles en directions opposées). Chaque boucle a trois arcs.

On peut noter que le Lemme 3.13 est encore valable pour une configuration 26-strictes.

On notera $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ le graphe local de \mathcal{C}_8 associé à l'ensemble des boucles orientées défini de manière unique par le Lemme 3.13 et le Lemme 3.14.

Par construction, on obtient immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.15 Si (κ, λ) est un couple de connexité valide et \mathcal{C}_8 un 8-cube quelconque de I , alors le graphe local $G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ est identique au graphe local $G_{\lambda\kappa}(\mathcal{C}_8^-)$, exceptée l'orientation des boucles.

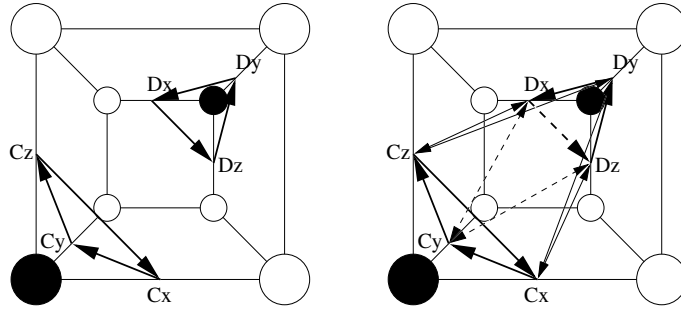


FIG. 3.7 – Configuration 26-strict de 1-voxels; des arcs additionnels sont ajoutés quand $\kappa = 26$.

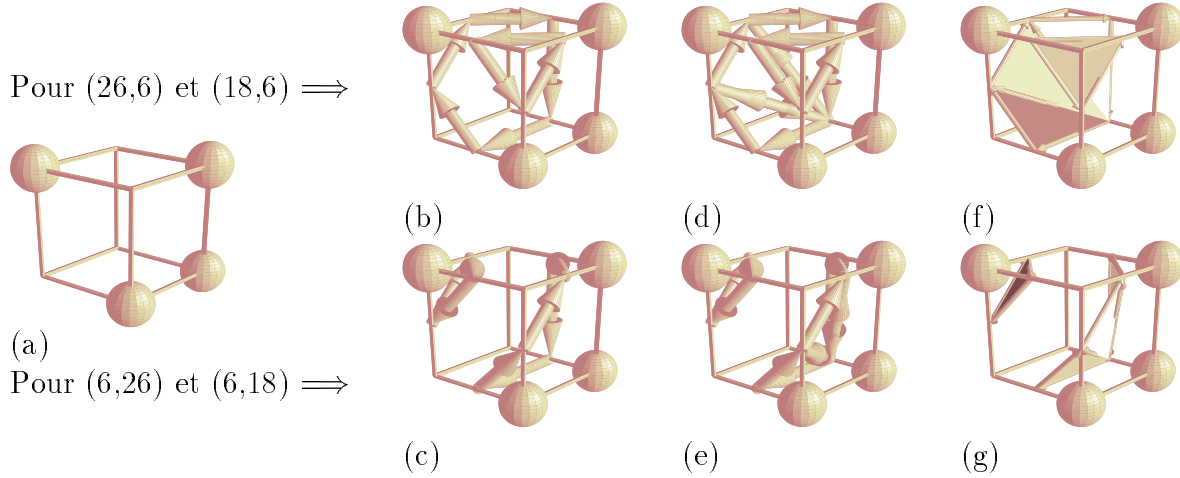


FIG. 3.8 – Exemple du calcul du graphe local sur une configuration : (a) montre la configuration ; (b) (resp. (c)) montre les boucles orientées obtenues pour les couples (18,6) ou (26,6) (resp. (6,18) ou (6,26)) ; (d) et (e) représentent les subdivisions g -convexes de ces boucles (voir Section 3.5.1) ; (f) et (g) montre la $\kappa\lambda$ -iso-surface locale induite par cette subdivision.

La Figure 3.8a-c montre une configuration et le graphe local construit ainsi que les ensembles de boucles. On peut remarquer que le résultat n'est pas influencé si l'on choisit la 26-connexité plutôt que la 18-connexité. La Figure 3.9 montre les graphes locaux et les boucles des quatorze configurations classiques du *marching-cubes* : il en ressort que *le couple de connexité choisi a une influence importante sur le résultat*. La 26-connexité influence le graphe local seulement dans le cas de la configuration 26-strict (cf. Figure 3.9d).

Subdivision et plongement

La construction que nous proposons construit un graphe et un ensemble de boucles sur ce graphe, i.e., une 2-variété combinatoire. Pour envoyer cette variété dans l'espace en fonction uniquement de la position des sommets, la variété doit être triangulée. Pour ce faire, nous définissons donc la *subdivision d'une boucle orientée* (voir Définition A.20) comme un ensemble de boucles orientées de longueur 3 qui triangule la boucle. On définit naturellement une subdivision d'une variété combinatoire (cf. Définition A.22).

Une subdivision d'une boucle du graphe local est dite *normale* si aucune des boucles de

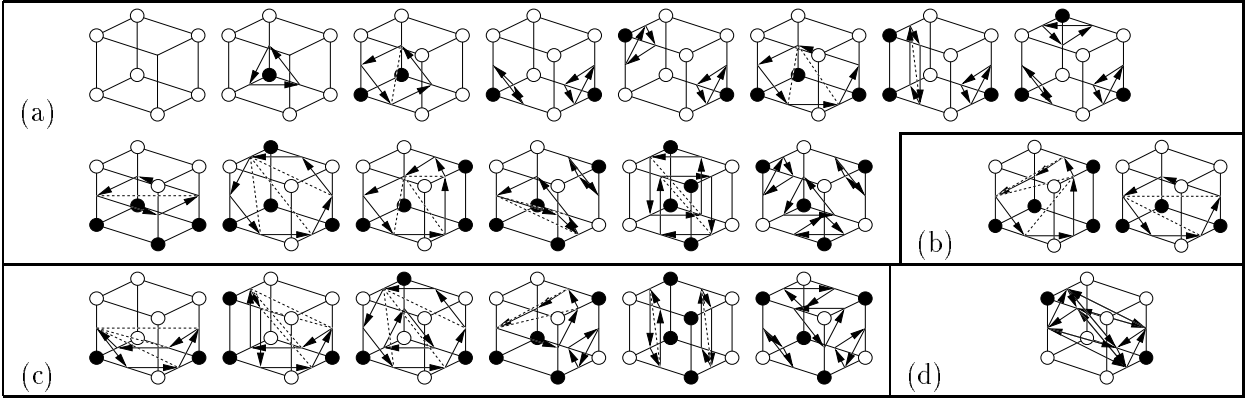


FIG. 3.9 – Graphes locaux et boucles associées de configurations classiques (les autres peuvent en fait être obtenues via des rotations, symétries ou la propriété (ii) de la Définition 3.10). Les subdivisions convexes (voir Section 3.5.1) des boucles sont représentées par des lignes hachées entre les sommets de ces boucles (lorsque la boucle a un plongement planaire, la subdivision est arbitraire). Le couple de connexité influence à la fois la construction des boucles et leur subdivision : (a) boucles créées pour $\kappa = 6$; (b) si $\kappa = 18$, ces configurations ont des boucles identiques que lorsque $\kappa = 6$, mais des subdivisions différentes ; (c) si $\kappa = 18$, ces configurations ont des boucles différentes que pour $\kappa = 6$; (d) configuration 26-strict de 1-voxels avec $\kappa = 26$.

la subdivision n'est formée de 3 sommets (i.e., surfels) de la même 4-face (informellement, la boucle n'est pas inscrite dans une 4-face). Une subdivision d'une boucle du graphe local est dite *g-propre*, si le *g*-complexe de la boucle subdivisée est propre. Par extension, toute subdivision du graphe local et de ses boucles est *normale*, si chacune des subdivisions de boucles induites est normale. De même, toute subdivision du graphe local et de ses boucles est *g-propre*, si chacune des subdivisions de boucles induites est *g-propre*. Le lemme qui suit nous sera utile pour démontrer que le *g*-complexe du $\kappa\lambda$ -iso-graphe avec ses boucles est propre :

Lemme 3.16 Le *g*-complexe de toute subdivision *g-propre* de $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ est propre.

Preuve : Si l'ensemble L des boucles associées au $\kappa\lambda$ -iso-graphe de \mathcal{C}_8 est vide, ou ne contient qu'une seule boucle, le lemme est trivial par hypothèse. Supposons que L a au moins deux boucles. S'il existe une boucle de longueur 3, mettons $L_1 = (c_1, c_2, c_3)$, alors, soit cette boucle a été définie par une configuration 26-strict et l'on peut conclure par construction, soit cette boucle est définie sur un coin du cube fermé $C = \overline{\mathcal{C}_8^*}$ et borde un voxel unique u . Soit $L_2 = (d_1, \dots, d_k)$ une autre boucle de L . Clairement, $\forall i, 1 \leq i \leq k, |\overline{d_i^g}|$ appartient à $C \setminus \text{Conv}(u^*, |\overline{c_1^g}|, |\overline{c_2^g}|, |\overline{c_3^g}|)$ qui est un ensemble convexe (car *g* est une iso-application). Immédiatement, on a $\text{Conv}(|\overline{d_1^g}|, \dots, |\overline{d_k^g}|) \subset \text{Conv}(C \setminus \text{Conv}(u^*, |\overline{c_1^g}|, |\overline{c_2^g}|, |\overline{c_3^g}|))$. Par définition, tous les éléments du *g*-complexe d'une subdivision arbitraire de L_2 sont inclus dans l'enveloppe convexe fermée des points $\{|\overline{d_1^g}|, \dots, |\overline{d_k^g}|\}$. Quelle que soit la subdivision de L_2 le *g*-complexe défini sur L_1 et L_2 est donc propre.

S'il existe une boucle de longueur 4, alors cette boucle est de l'une des formes de la Figure 3.10. Un argument similaire au précédent permet de conclure.

Enfin, le graphe local possède au plus douze arcs et douze sommets, car un 8-cube a six 4-faces. Si le graphe local a effectivement douze arcs, on peut voir simplement que L possède 4 boucles de longueur 3 et l'argument précédent conclut. Sinon, une des 4-faces n'est pas croisée, ce qui impose que deux autres 4-faces ne sont pas croisées non plus. Le graphe a donc au maximum neuf arcs. Au moins une des boucles a moins de ou exactement quatre arcs, ce qui conclut. \square

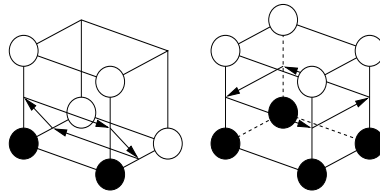


FIG. 3.10 – Les deux différents types de boucles constituées de quatre arcs.

3.4.3 Construction de l'iso-surface toute entière

Au cours des sections précédentes, nous avons mis en évidence comment construire dans chaque 8-cube des éléments de surface. Dans cette section, nous montrons que notre construction est cohérente et que l'objet produit est effectivement une surface combinatoire sans bord que l'on peut plonger dans \mathbb{R}^3 par toute iso-application.

On rappelle que le $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I est le graphe obtenu en rassemblant tous les graphes locaux de l'image et en fusionnant les sommets et arcs communs. On montre d'abord que l'on a construit une 2-variété combinatoire sans bord :

Théorème 3.17 Si (κ, λ) est un couple de connexité valide, alors le $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I associé avec les boucles définies sur chaque 8-cube de l'image est une 2-variété combinatoire orientée sans bord, appelée la $\kappa\lambda$ -iso-variété de I et notée $\diamond G_{\kappa\lambda}(I)$.

Preuve : Soit e un 1-arc quelconque de cet objet combinatoire. L'arc e appartient par définition à une 4-face, qui est partagée par exactement deux 8-cubes (un arc ne peut pas être sur le bord du support de I). Selon le Lemme 3.13, l'arc e est adjacent à exactement une boucle de chacun des deux 8-cubes. La Proposition 3.12 montre que les deux boucles visitent l'arc e en sens contraires. Si e est un 0-arc, il n'est défini que sur un 8-cube. Le Lemme 3.14 indique qu'il est adjacent à exactement deux boucles et est traversé en sens contraires. Tous les arcs de $G_{\kappa\lambda}(I)$ sont donc visités par exactement deux boucles en sens contraires.

Il reste à prouver qu'une ombrelle peut être construite autour de chaque sommet. Soit u un sommet quelconque du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I . Le sommet u , qui est une paire de voxels $\{v, v'\}$, appartient donc à exactement quatre 8-cubes $\mathcal{C}_8^0, \mathcal{C}_8^1, \mathcal{C}_8^2$ et \mathcal{C}_8^3 que l'on ordonne de telle manière que \mathcal{C}_8^i soit adjacent à $\mathcal{C}_8^{(i+1) \bmod 4}$ sur une 4-face. Par

construction, u est adjacent à quatre boucles différentes L_0, L_1, L_2 et L_3 , une sur chacun des 8-cubes correspondants. Chaque L_i est adjacent à $L_{(i+1) \bmod 4}$ sur une 4-face d'après la Proposition 3.12 et le Lemme 3.13. Clairement, aucune autre boucle ne peut visiter u : L'ombrelle L_0, L_1, L_2 et L_3 ainsi construite est donc unique à une permutation circulaire près.

On vient de construire une 2-variété combinatoire sans bord orientable (Définition 3.7). L'orientation des boucles induit une orientation sur la variété. \square

Comme la subdivision est Eulerienne [52, 71], toute subdivision d'une 2-variété combinatoire sans bord est encore une 2-variété combinatoire sans bord qui conserve les mêmes propriétés d'orientabilité.

On montre maintenant que si l'on choisit convenablement la subdivision de la $\kappa\lambda$ -iso-variété de I , on peut plonger cet objet en tant que surface fermée dans \mathbb{R}^3 :

Théorème 3.18 Soit $\diamond G_{\kappa\lambda}(I)$ la $\kappa\lambda$ -iso-variété de I avec (κ, λ) valide. Soit g une iso-application de I . Soit M une subdivision de la variété $\diamond G_{\kappa\lambda}(I)$ telle que sur chaque 8-cube de l'image I , la subdivision des boucles de ce 8-cube est normale et g -propre. Alors la 2-variété triangulée M est plongée par g dans \mathbb{R}^3 en une 2-variété fermée dans \mathbb{R}^3 .

Preuve : M est une 2-variété triangulée. L'application g construit donc un g -complexe $\overline{M^g}$ d'éléments de \mathbb{R}^3 . Par construction, chacun des éléments de $\overline{M^g}$ est inscrit dans le plongement du 8-cube \mathcal{C}_8 où il a été créé (c'est l'adhérence du \star -cube \mathcal{C}_8^*). On montre donc que le complexe $\overline{M^g}$ est propre en décomposant ses éléments sur tous les cubes de l'image.

Dans ce \star -cube, comme la subdivision est g -propre, la Proposition 3.16 tient et le sous-complexe de $\overline{M^g}$ est propre. Sur chaque \star -face du \star -cube, le sous-complexe de $\overline{M^g}$ induit ne contient que des sommets et des arcs car la subdivision est normale. Ses éléments sont disjoints par construction sur chaque 4-face (cf. Figure 3.4 et Figure 3.5) et par fusion des arcs construits à l'intersection de deux 8-cubes adjacents. Les \star -segments du \star -cube ne contiennent qu'un point car g est une iso-application. Les \star -points ne contiennent aucun élément. On peut conclure car l'ensemble des \star -cubes, \star -faces, \star -segments et \star -points forme une partition de l'image de I dans \mathbb{R}^3 .

Le complexe $\overline{M^g}$ est donc propre et la Proposition 3.6 conclut. \square

Nous pourrions donc obtenir une $\kappa\lambda$ -iso-surface de I comme le plongement par une iso-application d'une *subdivision particulière* de la $\kappa\lambda$ -iso-variété de I .

3.5 Subdivision de la $\kappa\lambda$ -iso-variété

Dans cette section, nous mettons en évidence une méthode simple pour construire une subdivision normale et g -propre. On pourra alors montrer que la surface obtenue respecte toutes les propriétés de la Définition 3.10.

Soit \mathcal{C}_8 un 8-cube de I et (κ, λ) un couple de connexité valide. On voit aisément que \mathcal{C}_8 contient soit une κ -composante de 1-voxels, soit une λ -composante de 0-voxels. Une idée naturelle est de construire la subdivision autour de cette unique composante.

Dans les sous-sections qui suivent, g est une iso-application de I , \mathcal{C}_8 est un 8-cube arbitraire de I qui n'est pas composé de voxels tous de même valeur (autrement, le graphe local est vide), C est le cube unité fermé de \mathbb{R}^3 qui contient le \star -cube \mathcal{C}_8^* et L_1, \dots, L_l sont les boucles orientées du graphe local $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$.

Enfin, on suppose que \mathcal{C}_8 n'est pas une configuration 26-strictes, car le graphe local n'est alors formé que de boucles de longueur 3, qui n'ont pas besoin d'être subdivisées.

3.5.1 Subdivision g -convexe

Pour construire la subdivision autour de l'unique composante de 0-voxels, ou l'unique composante de 1-voxels, nous définissons un volume englobant cette composante par :

Définition 3.19 (volume g -convexe) On appelle *volume g -convexe* de \mathcal{C}_8 , et on note $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$, l'enveloppe convexe fermée de \mathbb{R}^3 des points suivants :

- les plongements par g des points de l'interface construits sur \mathcal{C}_8 (i.e., les plongements des sommets du graphe local) ;
- si $\lambda = 6$, les \star -points de l'unique composante de 1-voxels de \mathcal{C}_8 , ou sinon, si $\kappa = 6$, les \star -points de l'unique composante de 0-voxels de \mathcal{C}_8 .

On va montrer que les boucles du graphe local dessinent des courbes de Jordan sur le bord du volume g -convexe, et que celui-ci détermine une subdivision de ces boucles (la subdivision telle que le plongement des boucles appartient à la surface du volume g -convexe) :

Proposition 3.20 Pour (κ, λ) valide, les boucles du graphe local de \mathcal{C}_8 forment des courbes de Jordan sur le bord du volume g -convexe de \mathcal{C}_8 lorsqu'elles sont plongées par g dans \mathbb{R}^3 . De plus, le volume g -convexe induit une subdivision sur chacune de ces boucles, de façon à ce que les boucles subdivisées soient plongées par g dans \mathbb{R}^3 sur son bord.

Preuve : Soit V le volume g -convexe de \mathcal{C}_8 . Soit $\overline{L_i^g}$ le sous-complexe du g -complexe du graphe local qui contient les sommets et arcs d'une boucle L_i de ce graphe. Comme ce sont des 1-arcs, chacun des segments de ce complexe appartient à une \star -face, donc $|\overline{L_i^g}| \subset \text{Fr}(C)$. Par définition $|\overline{L_i^g}| \subset V$, avec $V \subset C$. Immédiatement, $|\overline{L_i^g}|$ appartient à $\text{Fr}(V)$ et est une courbe fermée sans point multiple (Lemme 3.13) sur une surface fermée dans \mathbb{R}^3 homéomorphe à une sphère. D'après le théorème de Jordan 2D, chaque courbe dessinée par le plongement d'une boucle L_i divise $\text{Fr}(V)$ en deux surfaces ouvertes connexes S_1 et S_2 .

Supposons par exemple que $\lambda = 6$; donc le volume g -convexe est construit en partie sur les \star -points des 1-voxels O du 8-cube. Le κ -1-squelette $\bigcup \mathcal{G}_\kappa^1(O)$ est connexe par arcs (Proposition 3.4). L'ensemble $\bigcup \mathcal{G}_\kappa^1(O) \cap \text{Fr}(C)$ est aussi connexe par arcs car \mathcal{C}_8

ne forme pas une configuration 26-strict. Sur chaque \star -face, on a par construction que $|\overline{\{a_j^i, a_{j+1}^i\}}^g| \cap (\bigcup \mathcal{G}_\kappa^1(O) \cap \text{Fr}(C)) = \emptyset$, où $\{a_j^i, a_{j+1}^i\}$ est un arc de L_i . L'ensemble connexe $\bigcup \mathcal{G}_\kappa^1(O) \cap \text{Fr}(C)$ a une intersection vide avec le plongement des boucles. En conséquence, tout voxel de O a un plongement qui appartient à la même surface ouverte, disons S_1 .

Or tout sommet a d'une autre boucle appartient à un surfel de l'interface dont un des voxels est un élément de O (appelons-le o_m). Clairement, la courbe définie par la boucle L_i est disjointe du segment entre o_m^* et $|\overline{a^g}|$. Donc le sommet a appartient aussi à S_1 . Finalement, nous avons prouvé qu'une boucle du graphe local définit deux surfaces ouvertes sur l'ensemble $\text{Fr}(V)$, dont l'une, dénommée surface g -interne de L_i sur V ne contient aucun point extrémal de V . C'est pourquoi le bord de V détermine des ensembles planaires convexes sur la surface g -interne de chaque boucle et ces ensembles sont entièrement définis par les sommets de cette boucle : une subdivision est alors déterminée sur L_i en choisissant celle qui construit dans \mathbb{R}^3 exactement la surface g -interne.

Pour $\kappa = 6$, le raisonnement est entièrement symétrique ; il est basé sur l'unique composante de θ -voxels sur laquelle est construite le volume g -convexe.

□

La proposition précédente nous permet de définir un processus de subdivision pour la $\kappa\lambda$ -iso-variété :

Définition 3.21 (Subdivision g -convexe) On appelle *subdivision g -convexe* de l'objet combinatoire $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$, et on note $\Delta G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$, la subdivision induite par le volume g -convexe $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ (cf. Proposition 3.20 précédente).

La Figure 3.11 illustre la subdivision g -convexe. Celle-ci triangule une boucle de façon unique sauf lorsque la boucle est planaire dans \mathbb{R}^3 . Dans ce cas, une subdivision arbitraire est choisie ; en effet, les plongements de toute subdivision d'une boucle dont les sommets sont coplanaires seront tous identiques. La Figure 3.9 montre aussi les subdivisions g -convexes d'un ensemble de configurations. Une $\kappa\lambda$ -iso-variété d'une image I qui a été subdivisée par la subdivision g -convexe est appelée *$\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée* de I et est notée $\Delta G_{\kappa\lambda}(I)$. On peut noter que la subdivision g -convexe est *dépendante de g* (i.e., une autre iso-application induit une autre subdivision). En fait cette dépendance n'apparaît que sur des boucles où les sommets sont symétriques (par exemple sur les boucles de la Figure 3.10).

Pour un 8-cube \mathcal{C}_8 arbitraire de I et un couple valide (κ, λ) les graphes locaux associés à leurs boucles $\diamond G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ et $\diamond G_{\lambda\kappa}(\mathcal{C}_8^-)$ sont identiques exceptée l'orientation (Proposition 3.15). En conséquence, on obtient aisément la propriété suivante :

Proposition 3.22 Le volume g -convexe $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ est identique au volume g -convexe $V_{\lambda\kappa}^g(\mathcal{C}_8^-)$. Les subdivisions induites sur les boucles du graphe local sont identiques à l'orientation près.

On obtient le théorème suivant, qui montre que la subdivision g -convexe d'une $\kappa\lambda$ -iso-variété est plongée dans \mathbb{R}^3 en une surface fermée orientée :

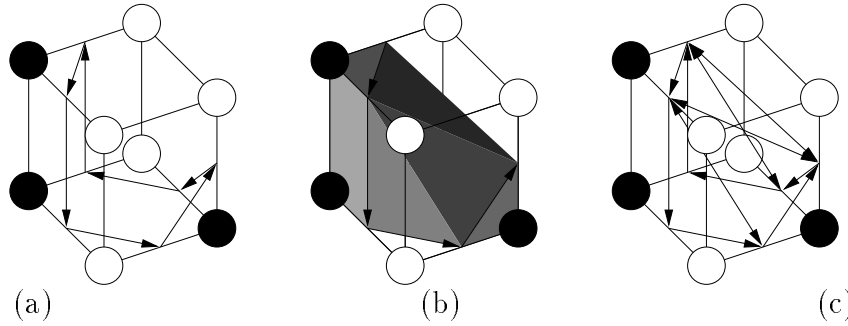


FIG. 3.11 – Construction du volume g -convexe et subdivision g -convexe d'une boucle (avec $\kappa = 18$ ou $\kappa = 26$) : (a) graphe local et boucle générée ; (b) volume g -convexe obtenu ; (c) subdivision de la boucle sur les faces définies par le volume g -convexe.

Théorème 3.23 Soit (κ, λ) un couple de connexité valide. Soit g une iso-application de I . Le g -complexe de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée de I est propre et son corps est une 2-variété dans \mathbb{R}^3 sans bord, qui a une orientation cohérente (cf. Définition 3.9 et Définition A.9). Cette 2-variété définit donc un ensemble de points intérieurs et un ensemble de points extérieurs.

Preuve : La subdivision g -convexe est une subdivision normale, autrement il existerait des 1-voxels dans les surfaces g -internes des boucles, et est une subdivision g -propre, car elle est construite sur le bord d'un volume convexe. En conséquence, le Théorème 3.18 est applicable. Soit N la 2-variété dans \mathbb{R}^3 sans bord résultante.

Il reste à montrer que l'orientation induite par chaque composante est cohérente. La méthode de construction et de subdivision de chaque boucle et le fait que g soit une iso-application impliquent qu'intérieur et extérieur sont bien définis localement sur chaque 8-cube : tout chemin dans un cube unité fermé C qui ne traverse pas $N \cup C$ « voit » les boucles du $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée dans un même sens s (d'après la Définition 3.8). Si ce chemin sort par une face que C partage avec un autre cube unité fermé C' , alors ce chemin « voit » aussi les boucles de C' dans le sens s (autrement, ce ne serait pas une 2-variété combinatoire sans bord). Tout chemin qui ne traverse pas N est donc soit dans l'intérieur de toutes les composantes de N qu'il borde, soit dans l'extérieur de toutes les composantes. La Proposition A.14 indique que l'orientation induite sur N est cohérente. \square

3.5.2 Séparation du fond et du devant

Il nous reste à montrer que la surface construite sépare effectivement les voxels du fond des voxels du devant. Le fait que la subdivision soit construite sur un ensemble convexe est crucial pour la validité de cette assertion.

Dans cette section, nous fixons $\lambda = 6$ (et donc $\kappa \in \{18, 26\}$). Soit \mathcal{C}_8 un 8-cube de I et C le cube unité fermé contenant \mathcal{C}_8^* . On note O l'ensemble des 1-voxels de \mathcal{C}_8 et $\{a_1^i, \dots, a_{\kappa_i}^i\}$ les sommets de la boucle L_i . On note A l'ensemble des sommets de toutes les boucles (L_i) . Nous supposons que \mathcal{C}_8 n'est pas une configuration 26-strict : le volume g -convexe $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ de

\mathcal{C}_8 est alors construit sur les 1-voxels. On montre d'abord que tous les points qui définissent $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ sont des points extrémaux de cet ensemble :

Lemme 3.24 Sous les conditions pré-citées, l'ensemble des points extrémaux de $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ est exactement l'ensemble $|\overline{A^g}| \cup O^*$.

Preuve : Par définition, il suffit de montrer que $|\overline{A^g}| \cup O^* \subset \text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8))$. Or, tout élément de O^* est un point extrémal de C et $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8) \subset C$: les éléments de O^* sont donc aussi des points extrémaux de $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$. Soit a un sommet de A . Il existe deux \star -faces F_1 et F_2 telles que $|a^g| \in \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Sur la face $\overline{F_1}$, le point $|a^g|$ est un point extrémal de l'ensemble $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8) \cap \overline{F_1}$, qui est la trace du volume g -convexe sur cette face de C . L'ensemble $\overline{F_1}$ est une face de l'ensemble convexe C . Le théorème de Krein-Milman implique $\text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8) \cap \overline{F_1}) = \text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)) \cap \overline{F_1}$ ce qui conclut. \square

Le lemme suivant montre que le plongement des voxels du fond est disjoint du volume g -convexe au sein d'un 8-cube :

Lemme 3.25 Si \mathcal{C}_8 n'est pas une configuration 26-strictte, le λ -volume des 0-voxels de \mathcal{C}_8 (avec $\lambda = 6$) est disjoint du volume g -convexe $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ de ce 8-cube.

Preuve : Soit Q l'ensemble des 0-voxels de \mathcal{C}_8 et O l'ensemble de ses 1-voxels. Il suffit de montrer que tout élément de la λ -décomposition de Q est disjoint de $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$. Soit Φ une d -cellule de $\mathcal{G}_\kappa(Q)$ avec $0 \leq d \leq 3$. Si $d = 3$ alors \mathcal{C}_8 est seulement composé de 0-voxels et $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$ est vide. Supposons $d < 3$. L'ensemble $\text{Extr}(\overline{\Phi})$ est un sous-ensemble de Q^* , d'où $O^* \cap \overline{\Phi} = \emptyset$. Aucun élément de $|\overline{A^g}|$ n'appartient à $\overline{\Phi}$, donc $|\overline{A^g}| \cap \overline{\Phi} = \emptyset$. Le Lemme 3.24 induit $\text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)) \cap \overline{\Phi} = \emptyset$. Comme $\overline{\Phi} \subset C$, on a $\text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)) \subset C \setminus \overline{\Phi}$. Comme $\overline{\Phi}$ est soit un sommet, une arête ou une face de C , l'ensemble $C \setminus \overline{\Phi}$ est convexe. Le théorème de Krein-Milman implique $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8) \subset C \setminus \overline{\Phi}$ ce qui conclut. \square

On en déduit que le plongement du fond de l'image se situe à l'extérieur de l'iso-surface construite :

Théorème 3.26 Pour $\kappa \in \{18, 26\}$ et $\lambda = 6$, le λ -volume du fond de l'image I est disjoint du corps du g -complexe de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée de I . De plus, c'est un sous-ensemble de l'extérieur de cette 2-variété (avec la convention d'orientation choisie).

Preuve : Le plongement par g de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée de I est une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 orientée de façon cohérente (Théorème 3.23). Notons-la S . Tout d'abord, prouvons que S est disjointe du λ -volume du fond de I . On décompose \mathbb{R}^3 en cubes unités fermés : soit C un de ces cubes et \mathcal{C}_8 le 8-cube qui lui correspond (si C est en dehors de l'image du support de l'image, l'assertion est évidente). Si \mathcal{C}_8 est une configuration 26-strictte de 1-voxels, la construction particulière du graphe local nous permet de conclure. Dans le cas contraire, soit Q l'ensemble des 0-voxels de \mathcal{C}_8 . Par

la Définition 3.21, l'ensemble $S \cap C$ est un sous-ensemble de $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$. Le Lemme 3.25 précédent est applicable sur \mathcal{C}_8 et on obtient $(S \cap C) \cap \bigcup \mathcal{G}_\lambda(Q) = \emptyset$. Or, $\bigcup \mathcal{G}_\lambda(Q) = \bigcup \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{N}(I)) \cap C$. L'ensemble de tous les cubes unités de \mathbb{R}^3 forme un recouvrement de \mathbb{R}^3 et l'on vient donc de montrer que $S \cap \bigcup \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{N}(I)) = \emptyset$.

On décompose l'ensemble $\bigcup \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{N}(I))$ en ses composantes connexes par arcs dans \mathbb{R}^3 : la Proposition 3.4 indique que ces composantes correspondent à des λ -composantes du fond de I . Pour toute λ -composante Q du fond de I , on peut trouver un θ -voxel $q \in Q$ qui est 6 -adjacent à un 1 -voxel (sinon, l'image serait entièrement vide et l'assertion triviale). En conséquence, le θ -voxel q et ce 1 -voxel définissent un élément a de l'interface tel que $|\overline{a^g}| \in S$. Autour de $|\overline{a^g}|$, le point q^* appartient à l'extérieur de S (avec la convention d'orientation), et q^* est un élément de la λ -décomposition de l'ensemble λ -connexe Q . La Proposition 3.5 est applicable pour chaque λ -composante du fond, ce qui démontre le résultat. \square

On démontre un théorème similaire pour le devant de l'image à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3.27 Le κ -volume des 1 -voxels de \mathcal{C}_8 (avec $\kappa \in \{18, 26\}$) est disjoint du corps du g -complexe de $\Delta G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$.

Preuve : On note $S(\mathcal{C}_8)$ le corps du g -complexe de $\Delta G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$. Si \mathcal{C}_8 est une configuration 26 -stricte de 1 -voxels et $\kappa = 26$ alors on conclut l'argument par construction de $S(\mathcal{C}_8)$ dans ce cas précis (cf. Figure 3.7). Dans les autres cas, on note O l'ensemble des 1 -voxels de \mathcal{C}_8 et Φ une d -cellule de $\mathcal{G}_\kappa(O)$, pour $0 \leq d \leq 3$. Par définition, $\text{Extr}(\overline{\Phi}) \subset O^* \subset \text{Extr}(V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8))$. Le théorème de Krein-Milman implique $\overline{\Phi} \subset V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$.

Si $d = 0$, alors on a clairement $\Phi \cap S(\mathcal{C}_8) = \emptyset$. Supposons $d > 0$ et $\Phi \cap S(\mathcal{C}_8) \neq \emptyset$. On note b un élément de leur intersection. Comme les points extrémaux d'une d -cellule sont des θ -cellules, le point b peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $d + 1$ θ -cellules de $\mathcal{G}_\kappa(O)$. Selon la Proposition 3.20, b s'exprime aussi comme une combinaison linéaire de trois éléments de $\overline{A^g}$, si A est l'ensemble des sommets du graphe local, et ces trois éléments forment une face du convexe $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$. Comme ces trois éléments et les $d + 1$ θ -cellules de $\mathcal{G}_\kappa(O)$ sont des points extrémaux de $V_{\kappa\lambda}^g(\mathcal{C}_8)$, nécessairement ces $d + 4$ points sont coplanaires. Or, la subdivision est normale, donc les trois éléments de $\overline{A^g}$ ne construisent pas un plan qui contient des éléments de O^* . D'où la contradiction et on a $\Phi \cap S(\mathcal{C}_8) = \emptyset$. \square

On montre le théorème suivant identiquement au Théorème 3.26 en utilisant le Lemme 3.27 plutôt que le Lemme 3.25 :

Théorème 3.28 Pour $\kappa \in \{18, 26\}$ et $\lambda = 6$, le κ -volume du devant de l'image I est disjoint du corps du g -complexe de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée de I . De plus, c'est un sous-ensemble de l'intérieur de cette 2 -variété (avec la convention d'orientation choisie).

3.5.3 Obtention de la $\kappa\lambda$ -iso-surface

On vérifie maintenant que le procédé de construction d'iso-surfaces que nous avons présenté construit effectivement une $\kappa\lambda$ -iso-surface de l'image (au sens de la Définition 3.10) :

Théorème 3.29 Soit I une image binaire, g une iso-application de I , (κ, λ) un couple de connexité valide. Le corps du g -complexe de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée de I est une $\kappa\lambda$ -iso-surface de I . En particulier, c'est une surface fermée et orientée dans \mathbb{R}^3 qui sépare les plongements des voxels du fond des plongements des voxels du devant.

Preuve : Nous allons montrer que les propriétés (i-iv) des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces sont vérifiées. Le Théorème 3.23 prouve la propriété (i). La Proposition 3.15 et la Proposition 3.22 montrent que, pour tout 8-cube \mathcal{C}_8 de I , $\Delta G_{\kappa\lambda}(\mathcal{C}_8)$ et $\Delta G_{\lambda\kappa}(\mathcal{C}_8^-)$ sont identiques à l'orientation près. Cela induit la propriété (ii) des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces.

Si $\lambda = 6$ alors le Théorème 3.28 prouve la propriété (iii) et le Théorème 3.26 la propriété (iv). Si $\lambda \neq 6$, alors $\kappa = 6$. On remarque que la $\lambda\kappa$ -iso-variété-triangulée de I^- satisfait au Théorème 3.26 et $\bigcup \mathcal{G}_\kappa(\mathcal{N}(I^-)) \subset \text{Ext}(|\overline{\Delta G_{\lambda\kappa}(I^-)^g}|)$. On a évidemment $\mathcal{N}(I^-) = \mathcal{U}(I)$ et la propriété (ii) induit que $\text{Ext}(|\overline{\Delta G_{\lambda\kappa}(I^-)^g}|) = \text{Ext}(|\overline{\Delta G_{\kappa\lambda}(I^{- -})^g}|) = \text{Int}(|\overline{\Delta G_{\kappa\lambda}(I)^g}|)$. En remplaçant ces termes dans la formulation précédente, on obtient $\bigcup \mathcal{G}_\kappa(\mathcal{U}(I)) \subset \text{Int}(|\overline{\Delta G_{\kappa\lambda}(I)^g}|)$. Un raisonnement similaire utilisant le Théorème 3.28 permet de déduire la propriété (iv) lorsque $\kappa = 6$. \square

Ce théorème démontre que le processus suivant qui, pour (κ, λ) valide et g une iso-application,

1. calcule sur chaque 8-cube le graphe local et les boucles induites suivant la connexité (κ, λ) pour construire une 2-variété combinatoire sans bord $\diamond M$,
2. puis subdivise chaque boucle à l'aide de la subdivision g -convexe pour obtenir une 2-variété combinatoire triangulée ΔM ,
3. et plonge cette variété combinatoire triangulée dans \mathbb{R}^3 par g ,

construit une $\kappa\lambda$ -iso-surface de I . La $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée est la représentation combinatoire d'une $\kappa\lambda$ -iso-surface.

3.6 Résultats expérimentaux

3.6.1 Calcul des tables de configurations

La $\kappa\lambda$ -iso-surface construite ne dépend que de la configuration locale de voxels sur chaque 8-cube. C'est pourquoi on peut calculer une fois pour toutes les 256 configurations possibles pour un couple de connexité donné. Nous construisons donc quatre tables, une pour chaque

couple valide. Ainsi, un algorithme de *marching-cubes* classique peut utiliser directement une de ces tables pour construire une iso-surface (qui n'a pas de « trous ») sans aucune modification dans l'algorithme d'extraction (au contraire de certaines méthodes [112] qui nécessitent de modifier l'algorithme). En conséquence, des optimisations classiques du *marching-cubes* [23, 144, 150], qui ne se préoccupent pas de modifications dans la table des configurations, peuvent aussi être employées avec nos tables.

La Figure 3.12 résume l'algorithme de calcul d'une configuration pour les couples de connexité (18, 6) et (26, 6). Cette procédure doit être appelée avec les 256 configurations différentes pour construire les tables correspondantes à ces deux couples. Les deux autres tables sont calculées en utilisant les deux tables précédentes et la propriété (ii) des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces. Pour calculer la subdivision g -convexe, nous utilisons l'iso-application g qui envoie chaque surfel de l'interface au milieu du \star -segment correspondant de \mathbb{R}^3 . *A priori*, cette subdivision ne convient pas pour toutes les iso-applications possibles. En pratique, les subdivisions obtenues pour g sont exploitables par toute autre iso-application : on constate en effet que toutes les propriétés des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces sont encore valables.

On peut éviter le calcul de l'enveloppe convexe fermée en examinant si un arc définit une partie localement convexe ou une partie localement concave. Soit (a_0, \dots, a_{k-1}) une boucle orientée. On obtient (si tous les indices sont pris modulo k) :

$$\text{Soit } \vec{u} = \overrightarrow{a_i a_j} \wedge \overrightarrow{a_{i-1} a_i}, \vec{v} = \overrightarrow{a_i a_j} \wedge \overrightarrow{a_i a_{i+1}}, \vec{u}' = \overrightarrow{a_{j-1} a_j} \wedge \overrightarrow{a_i a_j}, \text{ et } \vec{v}' = \overrightarrow{a_j a_{j+1}} \wedge \overrightarrow{a_i a_j}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \overrightarrow{a_i a_j} \geq 0 \\ \text{et } (\vec{u}' \wedge \vec{v}') \cdot \overrightarrow{a_i a_j} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_i a_j \text{ est localement « convexe »} \\ \text{(élément de la subdivision si } \kappa \neq 6) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \overrightarrow{a_i a_j} \leq 0 \\ \text{et } (\vec{u}' \wedge \vec{v}') \cdot \overrightarrow{a_i a_j} \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_i a_j \text{ est localement « concave »} \\ \text{(élément de la subdivision si } \lambda \neq 6) \end{array}$$

La Figure 3.9 fournit les calculs des configurations classiques du *marching-cubes* pour différentes connexités.

3.6.2 Résultats sur des images synthétiques

Nous mettons en évidence les spécificités des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces sur des images synthétiques, notamment l'influence du couple de connexité choisi. D'abord, nous vérifions sur la Figure 3.13 qu'un trou est créé sur une configuration 26-strict de 0-voxels lorsque $\lambda = 26$. Un cube digital, dont les huit sommets sont reliés par des voxels suivant toutes les diagonales, montre l'importance de la connexité choisie pour construire la $\kappa\lambda$ -iso-surface (voir la Figure 3.14). La surface générée sépare les voxels en plein accord avec leur connexité dans l'espace digital. La Figure 3.15 est une autre illustration de l'influence de la connexité. *Toute $\kappa\lambda$ -iso-surface peut donc être vue comme une Boundary-Representation d'un objet digital. Les caractéristiques géométriques et topologiques des objets digitaux peuvent dès lors être identifiées aux caractéristiques correspondantes de leur Boundary-Representation.*

Dans les exemples précédents, les points de l'interface sont envoyés au milieu de leur \star -segment. Similairement à l'algorithme classique du *marching-cubes* [77], on peut construire une iso-application qui dépend du niveau de gris des voxels avant seuillage : la création d'un sommet du $\kappa\lambda$ -iso-graphe ne dépend toujours que de l'image seuillée binaire mais son

```

Procédure ConstruitConfigurationLocale (
    const Configuration  $C$ ,
    const Connexite  $\kappa$ ,
    & ObjetCombinatoire  $\mathcal{M}$  )
    ObjetCombinatoire  $E \leftarrow \emptyset$ ,
    ObjetCombinatoire  $\mathcal{M} \leftarrow \emptyset$ ,
    pour toute 4-face  $F$  de  $C$  faire
    |    $E \leftarrow E \cup F.$ CalculeArcs( $\kappa, 6$ )
    fin pour tout
     $\mathcal{M} \leftarrow E \cup E.$ CalculeBoucles()
    Volume  $H \leftarrow \text{EnvConvexeFermee}(\mathcal{M}.$ Sommets  $\cup C.1$ -voxels)
    tant que  $\mathcal{M}$  contient une boucle de longueur  $> 3$ , faire
    |   Boucle  $L \leftarrow \mathcal{M}.$ EnleveBoucleDeLongueur $> 3$ ()
    |   /*  $L$  est une liste ordonnée de Sommets  $(a_1, \dots, a_k)$  */
    |   Booleen  $exit \leftarrow \text{faux}$ , int  $i \leftarrow 1$ , int  $j \leftarrow i + 2$ 
    |   repète
    |   |   if Segment  $(a_i, a_j) \subset \text{Fr}(H)$  alors  $exit \leftarrow \text{vrai}$ 
    |   |   sinon
    |   |   |    $j \leftarrow j + 1$ 
    |   |   |   si  $j = k$  alors  $i \leftarrow i + 1$ ,  $j \leftarrow i + 2$ 
    |   |   fin si
    |   jusqu'à  $exit$ 
    |    $\mathcal{M}.$ InsererBoucle(( $a_1, \dots, a_i, a_j, \dots, a_k$ ))
    |    $\mathcal{M}.$ InsererBoucle( $a_i, \dots, a_j$ )
    fin tant que
    si  $C.$ isConfiguration26-strict() et  $\kappa = 26$  alors
    |    $\mathcal{M}.$ Construit0-arcsEtBoucles()
    fin si
    /*  $\mathcal{M}$  contient les sommets, arcs et boucles de la configuration  $C$  */
fin

```

FIG. 3.12 – Pseudo-code pour calculer les morceaux de surface correspondant à une configuration pour les couples $(18, 6)$ et $(26, 6)$. On utilise l'iso-application g qui envoie les surfels de l'interface au milieu de leur \star -segment.

plongement dans l'espace \mathbb{R}^3 est une fonction linéaire des niveaux de gris des voxels qui le bordent. Ce plongement est effectivement une iso-application et toutes les propriétés précédentes sont donc valables : en particulier, le plongement de la $\kappa\lambda$ -iso-variété-triangulée est une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 . Cette aptitude pour le sommet à se placer à un endroit quelconque de son \star -segment permet d'obtenir une surface d'autant plus lisse, ce qui est essentiel en visualisation. La Figure 3.16 montre l'amélioration visuelle obtenue ; les $\kappa\lambda$ -iso-

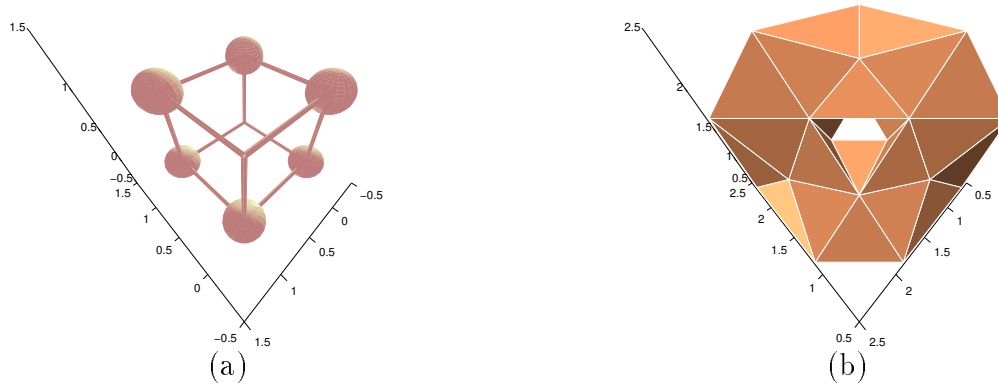


FIG. 3.13 – Une configuration 26-strict de 0-voxels avec $\lambda = 26$: (a) représentation treillis de la configuration ; (b) la $\kappa\lambda$ -iso-surface pour le couple $(6, 26)$.

surfaces construites sont néanmoins homéomorphes.

3.6.3 Application à la reconstruction de données médicales

La Figure 3.17a montre une $\kappa\lambda$ -iso-surface d'une tomographie par rayons X (le couple de connexité a peu d'influence). La taille de l'image est $256 \times 256 \times 113$. Les sommets sont envoyés au milieu de leur \star -segment afin que les triangles obtenus soient relativement réguliers. Puisque la $\kappa\lambda$ -iso-surface est une 2-variété orientée sans bord dans \mathbb{R}^3 , on peut l'utiliser comme initialisation d'un modèle déformable. Ici, nous utilisons le modèle générique que nous présentons dans le Chapitre 5 pour déformer et lisser la surface en fonction de contraintes physiques. Le résultat obtenu (cf. Figure 3.17b) est meilleur qu'une visualisation directe issue d'un processus de *marching-cubes* seul. En fait, la $\kappa\lambda$ -iso-surface calculée possède 354 composantes connexes et 958 trous topologiques (pour environ 295000 sommets), tandis que la surface déformée ne possède que 45 composantes connexes et 181 trous (pour environ 191000 sommets). Nous insistons sur le fait que ce n'est pas de la simplification ou de la décimation de maillage : le lissage est physique, et n'est ni géométrique, ni topologique. En effet les algorithmes classiques de simplification [58, 146] sont très efficaces pour fusionner des parties quasi-planaires et peuvent donc être utilisés en post-traitement sur notre modèle. En revanche, ils ne sont pas conçus pour enlever des petits artefacts.

3.7 Propriétés des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces

Jusqu'à présent, nous avons construit un procédé pour extraire une $\kappa\lambda$ -iso-surface d'une image binaire arbitraire. Dans cette section, nous montrons que ce procédé est étroitement lié aux surfaces digitales définies sur cette image : nous présentons quelques propriétés significatives des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces que l'on peut déduire des surfaces digitales. Les surfaces digitales tridimensionnelles ont été introduites par Liu [76]. Herman a défini les surfaces digitales pour des dimensions arbitraires [53] et a étendu cette définition à des espaces digitaux quelconques [54].

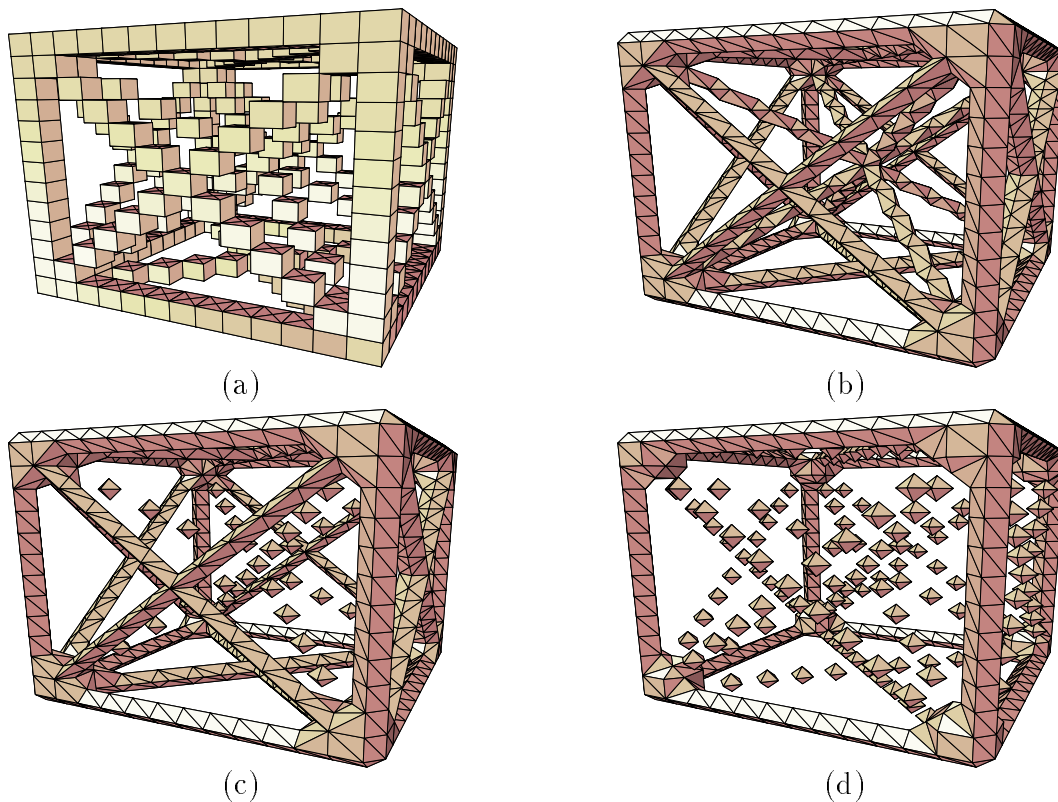


FIG. 3.14 – Les $\kappa\lambda$ -iso-surfaces d'un cube de « connexions » : (a) représentation bloc de l'image ; (b) $\kappa\lambda$ -iso-surface pour $(\kappa, \lambda) = (26, 6)$, (c) pour $(\kappa, \lambda) = (18, 6)$, (d) pour $(\kappa, \lambda) \in \{(6, 18), (6, 26)\}$.

3.7.1 Définitions

Pour tout couple de voxels 6-adjacents v et v' , la paire $\{v, v'\}$ est appelée un *surfel* (surfel pour « surface element ») [53, 135]. La paire orientée (v, v') est appelée un *surfel orienté*. Une *surface digitale* est un ensemble non-vide de surfels ; une *surface digitale orientée* est un ensemble non-vide de surfels orientés. Les surfels (v, v') tels que $v \in \mathcal{U}(I)$ et $v' \in \mathcal{N}(I)$ sont appelés les *bels* de I (bels pour « boundary elements ») : ce sont les séparateurs de I orientés du devant vers le fond. La surface digitale constituée de tous les bels de I est notée $\mathcal{B}(I)$. La *frontière* $\partial(A, B)$ de deux ensembles disjoints de voxels A et B est l'ensemble des surfels orientés $\{(v, v') \in (A, B) \mid 6(v, v')\}$. La frontière entre composantes du fond et composantes du devant est définie par :

Définition 3.30 ($\kappa\lambda$ -frontière) Soit O une κ -composante de $\mathcal{U}(I)$ et Q une λ -composante de $\mathcal{N}(I)$. La surface digitale orientée $\partial(O, Q)$ est appelée une $\kappa\lambda$ -frontière de I si elle est non vide.

Soit Λ une surface digitale orientée. L'*intérieur immédiat* de Λ est l'ensemble des voxels v tel qu'il existe un voxel v' vérifiant $(v, v') \in \Lambda$. On définit symétriquement l'*extérieur immédiat* de Λ . L'*intérieur* d'une surface digitale Λ est l'ensemble des voxels de I tel qu'il existe un 6-chemin de ce voxel à l'intérieur immédiat qui ne traverse pas Λ . On définit

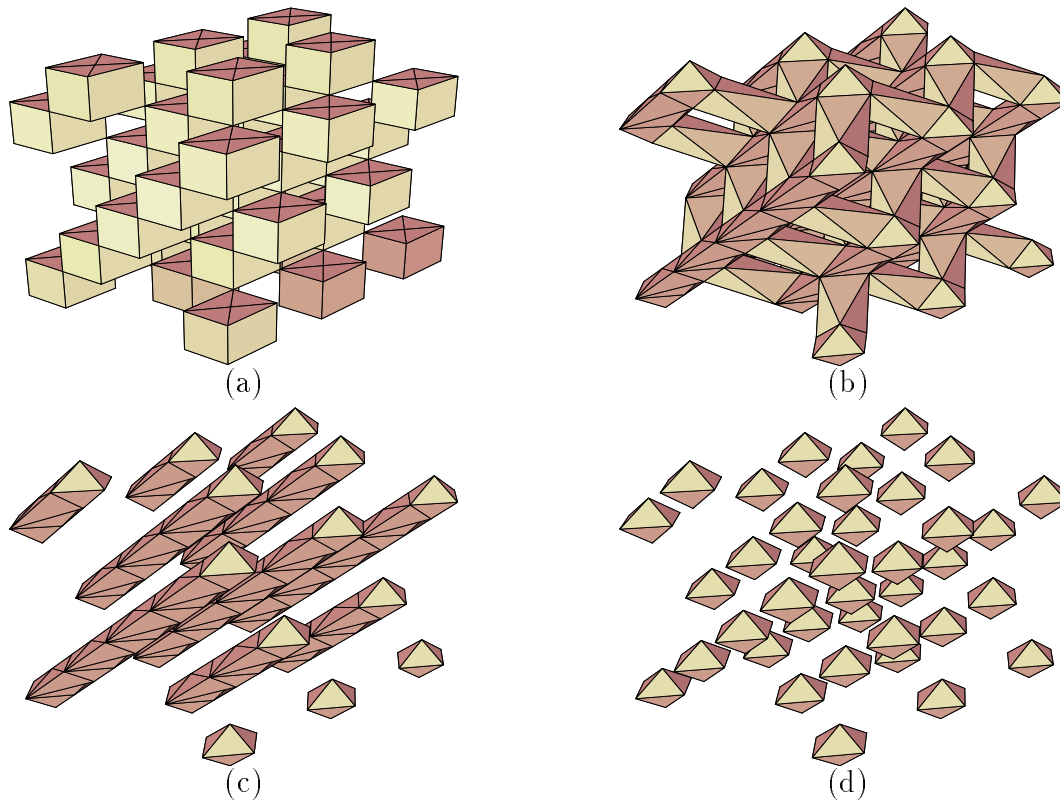


FIG. 3.15 – Les $\kappa\lambda$ -iso-surfaces d'un treillis : (a) représentation bloc de l'image ; (b) $\kappa\lambda$ -iso-surface pour $(\kappa, \lambda) = (26, 6)$, (c) pour $(\kappa, \lambda) = (18, 6)$, (d) pour $(\kappa, \lambda) \in \{(6, 18), (6, 26)\}$.

symétriquement l'extérieur de Λ .

Un couple de connexité (κ, λ) est un *couple de Jordan* (de \mathbb{Z}^n) si d'une part toute $\kappa\lambda$ -frontière d'une image arbitraire a un intérieur κ -connexe et un extérieur λ -connexe, et d'autre part tout chemin de l'intérieur vers l'extérieur contient un bel (se référer aux travaux de Herman [53, 54] et de Udupa [135] pour un exposé des propriétés de ces paires de Jordan). On a la propriété que si (κ, λ) est un couple de Jordan alors (λ, κ) est un couple de Jordan aussi. C'est pourquoi on dit souvent *paire de Jordan*. Les paires de Jordan d'un espace digital induisent des propriétés sur les frontières analogues aux propriétés des surfaces de Jordan dans \mathbb{R}^n . Elles fournissent des caractéristiques topologiques pour les surfaces digitales.

Les paires $(18, 6)$ et $(6, 18)$ sont des paires de Jordan de \mathbb{Z}^3 [55]. Une démonstration du fait que les paires $(26, 6)$ et $(6, 26)$ sont aussi des paires de Jordan est dans [92]. On peut établir un parallèle entre les paires de Jordan de \mathbb{Z}^3 et la validité des couples de connexité pour les $\kappa\lambda$ -iso-surfaces. Pour tout couple de connexité valide (κ, λ) , (κ, λ) est une paire de Jordan de \mathbb{Z}^3 et les $\kappa\lambda$ -frontières d'une image séparent les κ -composantes du devant des λ -composantes du fond dans l'espace digital.

On peut se demander si les $\kappa\lambda$ -frontières possèdent quelques-unes des propriétés des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces lorsqu'elles sont envoyées dans \mathbb{R}^3 . On note h l'application qui envoie toute surface digitale de \mathbb{Z}^3 dans \mathbb{R}^3 en associant à tout surfel le carré unité fermé de \mathbb{R}^3 qui lui correspond naturellement. L'application h est la représentation canonique des surfaces digitales dans l'espace Euclidien. On a :

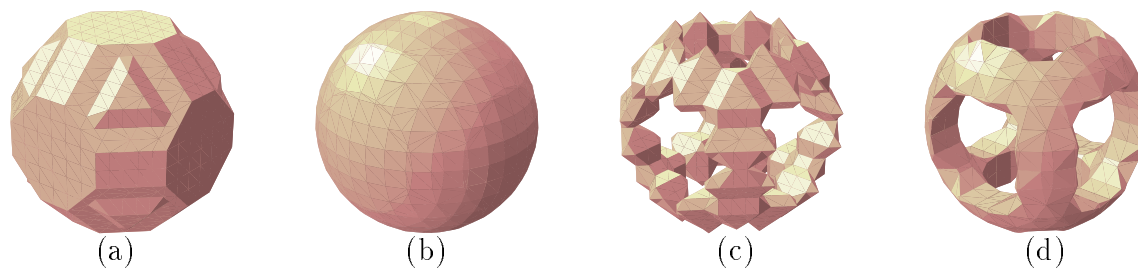


FIG. 3.16 – Comparaison visuelle entre des sommets envoyés au milieu de leur \star -segment et des sommets de position libre (l'image a une taille de 15^3): (a) iso-surface d'une sphère; (b) même iso-surface mais les sommets sont placés par interpolation des niveaux de gris; (c) iso-surface d'une sphère moins trois cylindres; (d) même iso-surface mais les sommets sont placés par interpolation des niveaux de gris.

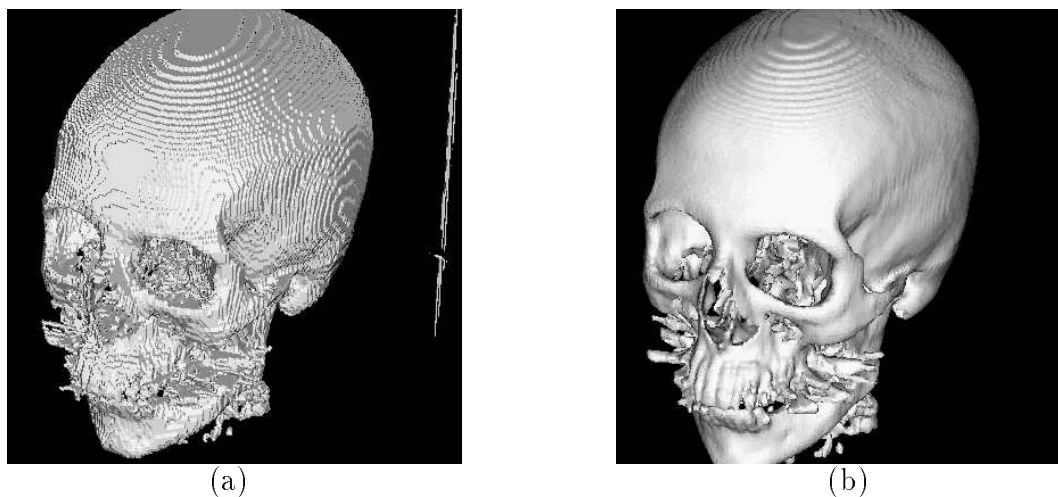


FIG. 3.17 – Résultat sur des données médicales: (a) iso-surface d'une tomographie X; (b) après déformation par le modèle déformable présenté dans le Chapitre 5 sous des contraintes de lissage.

Proposition 3.31 Soit (κ, λ) un couple valide. On a seulement $\bigcup \mathcal{G}_6(\mathcal{U}(I)) \cap h(\mathcal{B}(I)) = \emptyset$ et $\bigcup \mathcal{G}_6(\mathcal{N}(I)) \cap h(\mathcal{B}(I)) = \emptyset$.

Preuve : En fait, la configuration croisée de la Figure 3.1 fait que l'ensemble $h(\mathcal{B}(I))$ n'est pas en général une 2-variété. On pourrait néanmoins définir un intérieur et un extérieur mais en perdant la notion de connexité par arcs de ces ensembles (en fait, il existerait des chemins dans $\overline{\text{Int}(h(\mathcal{B}(I)))}$ qui relie deux composantes différentes de $\text{Int}(h(\mathcal{B}(I)))$).

Le fait que les 6-volumes du fond ou du devant ne rencontrent pas $h(\mathcal{B}(I))$ provient du fait que $\mathcal{B}(I)$ est construit sur les surfels de l'interface de I . \square

On ne peut donc utiliser les surfaces digitales directement pour extraire des 2-variétés d'une image.

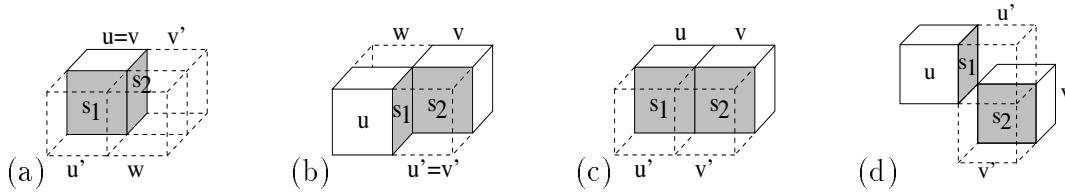


FIG. 3.18 – Illustration de la $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacence entre surfels de l'interface : (a) point (i) de la Définition 3.32; (b) point (ii); (c) point (iii); (d) point (iv).

3.7.2 Adjacence entre surfels de l'interface

Le développement d'algorithmes d'extraction de surfaces digitales par suivi entre surfels [5, 49] a introduit la notion d'adjacence entre bels : en se plaçant sur un bel à l'initialisation, puis en suivant les connexions entre surfels, l'algorithme extrait des surfaces digitales connexes. La relation d'adjacence entre bels est étroitement liée à l'adjacence sous-jacente entre les voxels qui définissent ces surfels. On peut se référer à Udupa [135] pour une théorie des frontières et de l'adjacence entre éléments de frontière dans \mathbb{Z}^3 . Ici, nous étendons légèrement cette adjacence en dimension 3 pour rendre compte de l'adjacence entre surfels qui ne partagent qu'un sommet dans \mathbb{R}^3 . A moins que ce ne soit spécifié explicitement, (κ, λ) est une paire de Jordan, la connexité κ (resp. la connexité λ) est la connexité des 1-voxels (resp. 0-voxels). Nous définissons alors une adjacence entre bels comme suit :

Définition 3.32 ($\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacence entre bels) Soit $s_1 = (u, u')$ et $s_2 = (v, v')$ deux bels de I . Ces surfels sont $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacents si l'une des assertions suivantes est satisfaite (voir aussi la Figure 3.18 pour une illustration) :

- (i) $u = v$ et, soit $\lambda(u', v')$ ou le voxel w tel que $6(u', w)$ et $6(w, v')$ est un 0-voxel;
- (ii) $u' = v'$ et, soit $\kappa(u, v)$ ou le voxel w tel que $6(u, w)$ et $6(w, v)$ est un 1-voxel;
- (iii) $6(u, v)$ et $6(u', v')$;
- (iv) u est strictement κ -adjacent à v , u' est strictement λ -adjacent à v' , et le 8-cube les contenant forme une configuration 26-stricte.

Cette relation d'adjacence induit une relation de connexité ($\sigma_{\kappa,\lambda}$ -connexité) et des $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composantes sur $\mathcal{B}(I)$.

Les points (i-iii) sont les définitions classiques de l'adjacence entre les bels qui partagent une arête pour les couples (18, 6) et (6, 18) [135] (ou l'adjacence entre bels définie dans [5, 49] lorsqu'elle est orientée). Apparemment, seulement Perroton [110] a introduit un lien d'adjacence entre bels dans le cas d'une configuration 26-stricte (voir Figure 3.18d) et a prouvé la validité de l'algorithme de suivi des surfaces digitales ainsi définies. Si cette définition de $\sigma_{26,6}$ -adjacence est suffisante pour *suivre* les surfels connexes (un seul lien permet d'établir une connexion), la relation induite n'est pas symétrique et n'a pas de justification intuitive.

Nous proposons au travers du point (iv) de la Définition 3.32 d'établir *six liens* dans une configuration 26-stricte de 1-voxels (resp. de 0-voxels) lorsque $\kappa = 26$ (resp. $\lambda = 26$).

L'algorithme de suivi de surfaces de Perrotton [110] reste valable. Nous allons montrer que cette définition de la $\sigma_{26,6}$ -adjacence est cohérente avec la définition des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces.

Nous pouvons interpréter une frontière munie d'une relation d'adjacence comme un graphe :

Définition 3.33 ($\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe) Soit Λ une $\kappa\lambda$ -frontière de I . Le graphe fini dont les sommets sont les éléments de Λ et dont les arcs sont les $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacences entre ces éléments, est appelé $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe de Λ . Le $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe de $\mathcal{B}(I)$ est l'union (disjointe) de tous les $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphes des $\kappa\lambda$ -frontières de I .

Avec cette définition de l'adjacence sur des bels qui partagent un sommet, on peut montrer que les $\kappa\lambda$ -frontières constituent des $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composantes :

Théorème 3.34 Soit (κ, λ) un couple de connexité valide (c'est une paire de Jordan de \mathbb{Z}^3). Toute $\kappa\lambda$ -frontière dans une image arbitraire I est une $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composante de $\mathcal{B}(I)$; dans la terminologie de Udupa [135], c'est un *triplet de Jordan de \mathbb{Z}^3* . Le $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe d'une $\kappa\lambda$ -frontière est donc connexe.

Preuve : Pour les couples $(6, 18)$ (et $(18, 6)$ en prenant I^-), la relation d'adjacence $\sigma_{18,6}$ est une bel-adjacence selon la définition proposée par Udupa [135], et Kong et Udupa [65] ont démontré que ces couples ont les propriétés caractéristiques des triplets de Jordan.

Pour les couples $(26, 6)$ et $(6, 26)$, soit Λ une $\kappa\lambda$ -frontière de I construite sur une κ -composante O du devant et une λ -composante Q du fond. On peut supposer $\kappa = 26$. On décompose O en ses 18-composantes. Sur chacune de ces composantes le $\sigma_{26,6}$ -bel-graphe F de Λ coïncide avec le $\sigma_{18,6}$ -bel-graphe des bels de cette composante. Toute configuration 26-strict de 1-voxels induit des $\sigma_{26,6}$ -adjacences (strictes) entre les bels de différentes $\sigma_{18,6}$ -composantes de F , ce qui le connecte. \square

Cela implique qu'une κ -composante de 1-voxels et une λ -composante de 0-voxels déterminent une (si elle existe) $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composante dans l'ensemble des bels de l'image, mais aussi qu'une $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composante de bels détermine une κ -composante de 1-voxels et une λ -composante de 0-voxels qui la bordent. Une image binaire peut donc être complètement reconstruite à partir de ses surfaces digitales.

3.7.3 Lien surfaces digitales et iso-surfaces

En fait, le procédé de construction de $\kappa\lambda$ -iso-surfaces que nous avons présenté dans la Section 3.4 est extrêmement lié à l'adjacence entre bels de l'image ainsi que le montrent le théorème et le corollaire ci-dessous :

Théorème 3.35 Soit Λ une $\kappa\lambda$ -frontière d'un ensemble κ -connexe de 1-voxels O et d'un ensemble λ -connexe de 0-voxels Q , (κ, λ) valide, sur une image I . Soit $G_{\kappa,\lambda}(O \cup Q)$ la restriction du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I aux sommets de l'interface définis sur $O \cup Q$. Alors les sommets

de $G_{\kappa\lambda}(O \cup Q)$ sont exactement les éléments de Λ ; le graphe $G_{\kappa\lambda}(O \cup Q)$ et le $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel graphe de Λ définissent les mêmes arcs sur ces éléments.

Preuve : Soit a un sommet du $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe de Λ ; a est donc un élément de Λ et est un surfel entre un 1-voxel $u \in O$ et un 0-voxel $u' \in Q$ (Définition 3.33). C'est un élément de l'interface de I qui sépare deux voxels de l'ensemble $O \cup Q$; $\{u, u'\}$ est donc aussi un sommet de $G_{\kappa\lambda}(O \cup Q)$. Inversement toute paire de voxels $\{u, u'\}$ définit uniquement un couple $(u, u') \in O \times Q$. Les deux graphes sont donc définis sur les mêmes paires de voxels de I .

Soit $e = \{a, b\}$ un arc du $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe de Λ . Cet arc a été construit selon l'une des quatre règles (i),(ii),(iii), ou (iv) de la Définition 3.32. Il est facile de voir que les règles (i-iii) induisent des arcs construits sur quatre voxels qui sont 18-adjacents deux à deux, i.e., ces quatre voxels forment une 4-face. Supposons que e soit construit selon l'une de ces trois règles et notons F la 4-face correspondante. Sur F , la règle (i) correspond aux configurations 1, 2, 4, 6 (lorsque $\kappa = 6$), 8, et 9 (lorsque $\kappa = 6$) ; la règle (iii) correspond aux configurations 6 (lorsque $\lambda = 6$), 7, 9 (lorsque $\lambda = 6$), 11, 13, 14 ; la règle (ii) correspond aux configurations 3, 5, 10, 12 ; les configurations 0 et 15 ne peuvent pas apparaître puisqu'il y a au moins un 1-voxel et un 0-voxel dans la 4-face pour définir le bel a . En conséquence, tout arc du $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe dont les sommets sont des couples de la face F possède un 1-arc correspondant dans tout sous-ensemble du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I qui contient F , donc dans $G_{\kappa\lambda}(O \cup Q)$. Supposons maintenant que e soit un arc défini par la règle (iv), alors soit $\kappa = 26$, soit $\lambda = 26$. Cette règle est basée sur quatre voxels, dont deux sont strictement 26-adjacents : il est facile de voir que ces quatre voxels appartiennent à un 8-cube unique \mathcal{C}_8 . Le 8-cube \mathcal{C}_8 forme une configuration 26-strictes de 1-voxels (resp. de 0-voxels) lorsque $\kappa = 26$ (resp. $\lambda = 26$). On peut vérifier que les 0-arcs de cette configuration sont exactement les arcs de la règle (iv). De même tous les voxels de \mathcal{C}_8 appartiennent à $O \cup Q$. \square

Corollaire 3.36 Les sommets du $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -bel-graphe de $\mathcal{B}(I)$ sont exactement les sommets du $\kappa\lambda$ -iso-graphe de I . Ces graphes définissent les mêmes arcs sur ces sommets.

Preuve : En décomposant l'ensemble des bels de I en $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -composantes (B_i), le Théorème 3.34 implique que chaque B_i est bordée par une κ -composante de 1-voxels O_j et une λ -composante de 0-voxels Q_k . Sur chaque $\{O_j, Q_k\}$, le Théorème 3.35 s'applique. Or, il ne peut y avoir d'autres sommets ou arcs construits en dehors de ces $\kappa\lambda$ -frontières. \square

Le Théorème 3.35 induit qu'une composante d'une $\kappa\lambda$ -iso-surface peut être construite à partir des $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacences de la $\kappa\lambda$ -frontière qui lui correspond (voir la Figure 3.19 pour une illustration). Or, un algorithme d'extraction de surfaces digitales par suivi (tel celui d'Artzy *et al.* [5] ou Perrotton [110] pour la paire $\{26, 6\}$), qui mémorise les adjacences entre bels au cours de l'extraction, construit un bel-graphe d'une $\kappa\lambda$ -frontière avec une complexité en temps de l'ordre de $O(n^2)$ pour une image de taille n^3 . Le parcours du bel-graphe possède

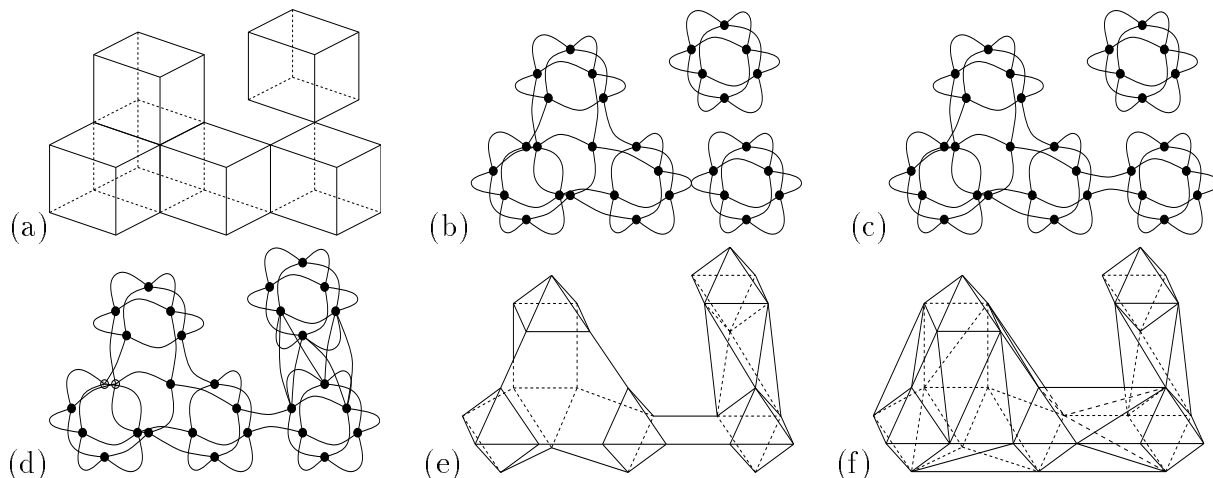


FIG. 3.19 – (a) Représentation par blocs d’une image binaire; (b) le $\sigma_{6,\lambda}$ -bel-graphe des bords de cette image; (c) son $\sigma_{18,6}$ -bel-graphe; (d) son $\sigma_{26,6}$ -bel-graphe; (e) le $\sigma_{26,6}$ -bel-graph représenté comme une 2-variété combinatoire; (f) subdivision g -convexe dans \mathbb{R}^3 de (e).

la même complexité temporelle et toute subdivision g -convexe a une complexité temporelle en $O(1)$ (par exemple en stockant les différentes subdivisions une fois pour toutes). Ainsi, le calcul d’une 2-variété dans \mathbb{R}^3 sans bord connexe (i.e., une composante de la $\kappa\lambda$ -iso-surface de l’image) qui sépare une κ -composante du devant d’une λ -composante du fond peut se faire en $O(n^2)$. C’est une amélioration importante de l’algorithme du *marching-cubes*, dont la complexité est en $O(n^3)$, lorsque l’on n’a pas besoin d’extraire l’iso-surface entière d’une image mais plutôt une de ses composantes.

De plus, cela montre qu’une surface digitale peut facilement être convertie en une iso-surface et que le contraire peut aussi être fait. Enfin, toute image binaire I peut être entièrement reconstituée à partir d’une $\kappa\lambda$ -iso-surface de cette image.

3.8 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle approche à l’extraction d’iso-surfaces d’images volumétriques, dont nous avons prouvé la validité: les surfaces extraites sont effectivement des 2-variétés sans bord dans \mathbb{R}^3 qui séparent les données intérieures des données extérieures. Cette approche est basée sur l’introduction d’un couple de connexité sur l’espace image seuillé. L’iso-surface extraite respecte les connexités ainsi définies et englobe les plongements des composantes de l’image. Quatre tables de configurations pour le *marching-cubes* (une par couple de connexité valide) ont été construites et chacune permet de construire une iso-surface cohérente avec les connexités choisies.

Cette extraction basée sur des considérations de topologie digitale nous a permis de montrer le lien étroit existant entre ces iso-surfaces et les surfaces digitales d’une image. Ainsi, le résultat d’un algorithme classique d’extraction de surfaces digitales par suivi des surfels peut être facilement transformé en une iso-surface de cette image.

Nous pouvons donc exploiter des méthodes discrètes pour fabriquer rapidement un modèle géométrique à partir des données volumétriques, comme le montre l’exemple de la Fi-

gure 3.17. Dans le Chapitre 6, différents exemples d'iso-surfaces extraites à partir d'images biomédicales sont présentés : les résultats obtenus montrent à la fois la puissance et les limites de cette approche purement discrète. Comme la représentation géométrique obtenue est une surface triangulée sans bord, elle peut être déformée par le modèle générique proposé dans le Chapitre 5. Les potentialités nouvelles offertes par l'enchaînement de ces deux approches (reconstruction discrète et modèle déformable) seront explorées dans le Chapitre 6.

Enfin, on peut se demander dans quelle mesure la méthode de construction des $\kappa\lambda$ -surfaces est extensible aux dimensions supérieures (construction d'iso-volumes en dimension 4, etc). *A priori*, cela dépend des propriétés induites par les couples de connexité en dimension supérieure. Autrement, la méthode de construction par 4-face, 8-cube, puis 16-hypercube doit être similaire. Une construction particulière doit sans doute être intégrée pour l'équivalent de la 26-connexité en dimension 4 (connexité pour des éléments qui ne partagent qu'un sommet de l'hypercube). Un problème pourrait provenir du fait que le volume g -convexe est construit autour d'une *unique* κ -composante ou λ -composante. Dans les dimensions supérieures, il y a des couples de Jordan qui induisent plusieurs composantes connexes de 1-voxels et plusieurs composantes connexes de 0-voxels (en fait, dès la dimension 4, pour l'équivalent des paires $\{18, 6\}$). Le volume g -convexe devrait donc être construit différemment, sans doute autour de chaque composante.

Une réponse à l'extension multi-dimensionnelle de cette méthode de reconstruction pourrait venir des surfaces digitales. Udupa [135] a montré sous quelles conditions une adjacence entre bels permet d'obtenir des propriétés intéressantes. Une construction d'« iso-hyper-surfaces » à l'aide du graphe d'adjacence entre bels construirait probablement des hyper-variétés combinatoires sans bord. Il resterait cependant le problème de la triangulation de cette variété.

Chapitre 4

Modèles déformables en imagerie

4.1 Introduction

Les données volumétriques sont souvent bruitées, incomplètes, déformées ou non-reproductibles. Extraire des formes significatives d'images volumétriques est donc une tâche complexe, souvent impossible sans introduire des informations supplémentaires dans le processus d'extraction. On peut alors préférer utiliser un modèle déformable afin d'améliorer le processus de segmentation/reconstruction :

- le processus s'appuie sur les caractéristiques du modèle pour approcher les formes de l'image : propriétés géométriques, topologiques ou physiques du modèle, utilisation d'un modèle de référence, initialisation, interaction de l'utilisateur.
- la segmentation/reconstruction étant le résultat de la convergence d'un processus vers une solution stable, l'extraction est réalisée par estimations et affinements successifs, ce qui la rend d'autant plus robuste.

Un modèle déformable permet d'approcher un objet au travers de ses lois d'évolution. Il peut donc réagir à l'application de forces (e.g., pression interne, gravité), de contraintes (e.g., régularité, courbure), de frottements. Il permet d'introduire des contraintes supplémentaires dans le processus d'extraction des formes et, par conséquent, de rendre plus régulier (i.e. *régulariser*) ce problème en limitant l'espace des solutions. Il peut exploiter l'information de contours des images, en la complétant par ses contraintes.

Les modèles déformables répondent précisément à de nombreux objectifs, parmi lesquels on peut citer :

- obtenir une modélisation géométrique, topologique ou physique des formes extraites.
- pister des formes d'image en image dans le cas de superposition de coupes ou sur des images spatio-temporelles.
- faire correspondre les propriétés physiques du modèle aux propriétés des formes à extraire.

Les modèles déformables sont également utilisés intensivement dans d'autres domaines comme la stéréovision, le suivi de formes, la simulation ou la synthèse d'images.

Dans cette thèse, nous ne nous intéressons qu'aux modèles déformables utilisés en segmentation/reconstruction. Il existe bien entendu beaucoup d'autres modèles de déformation, que ce soit en synthèse d'images animées ou en modélisation physique.

Il est très délicat de classer l'ensemble des modèles déformables suivant un critère précis. En effet, suivant l'application envisagée, cette sélection arbitraire aura plus ou moins d'intérêt et pourra faire apparaître des différences là où les principes sous-jacents sont similaires. Nous avons donc préféré regrouper les modèles suivant la manière dont ils abordent le problème de la segmentation/reconstruction, plutôt que de choisir un critère géométrique, analytique, topologique, structurel, physique ou numérique.

La façon d'appréhender la segmentation/reconstruction dépend essentiellement de l'espace de représentation du modèle et de la transformation de l'adéquation aux données vers les déformations induites. L'approche Lagrangienne ou l'approche Eulerienne exprime le premier point. Le deuxième point correspond à la formulation des déformations en fonction des données.

L'approche Lagrangienne rend compte des mouvements et des évolutions (e.g., de particules, d'objets rigides ou non) d'un système en se mettant à la place de ses composantes : on parlera donc du mouvement, de l'accélération, d'un objet en particulier. L'étude des évolutions de tous les objets du système fournira son évolution globale. Cette vision convient particulièrement aux modèles rigides, formés de particules élémentaires, dans lesquels on peut et on souhaite connaître sa déformation de manière *explicite*.

L'approche Eulerienne décrit les mouvements d'un système de manière globale : ce ne sont plus les particules du système qui sont suivies mais l'évolution de l'espace tout entier. Pour chaque unité de volume, cette approche s'intéresse à ce qui rentre et ce qui sort. En examinant l'évolution de chacun des volumes élémentaires, on peut décrire l'évolution globale du système. Intuitivement, cette vision de la dynamique convient parfaitement à l'étude des fluides plus ou moins visqueux (e.g., liquides, gaz) évoluant dans un espace déterminé. Elle fournit une représentation *implicite* des déformations du système (e.g., s'il y a moins de matière ici et plus là-bas, c'est que des particules se sont déplacées).

Les approches Lagrangiennes sont traditionnellement les plus courantes en segmentation/reconstruction. C'est pourquoi nous avons choisi de les regrouper en différentes sous-catégories : déformation par minimisation d'une énergie, formalisation probabiliste des déformations, évolution sous l'action d'un ensemble de forces, modélisation à base physique, évolution discrète, déformation d'un modèle de référence. Parmi celles-ci, nous présenterons de manière plus détaillée les contours actifs, ou *snakes*, introduits par Kass *et al.* [62], car beaucoup de modèles dits déformables leur sont directement ou indirectement dérivés. Enfin nous consacrerons la dernière partie aux approches Euleriennes, qui se sont développées récemment en segmentation/reconstruction, notamment grâce aux travaux de Osher et Sethian [106].

4.2 Déformation par minimisation d'énergie

Les modèles déformables basés sur la minimisation d'une énergie, communément appelés contours actifs, *snakes*, ou ballons, ont été introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos [62] dans le domaine de la vision et de l'analyse d'images médicales bidimensionnelles. Leur principe est d'associer une énergie au modèle. Celle-ci représente d'une part l'interaction du modèle avec l'image, et d'autre part les contraintes de régularité du modèle. La minimisation de cette énergie va déformer le modèle jusqu'à un point d'équilibre. Ce point d'équilibre, qui correspond en général à un minimum local, est censé représenter une forme ou une caractéristique de l'image. Le modèle déformable est donc plongé dans l'espace image et l'interaction modèle/image est localisée autour du plongement du modèle.

Un tel modèle est donc d'abord défini par le choix d'une représentation (courbe, surface paramétrique, etc) et par une énergie potentielle. Cette énergie traduit les interactions internes, les contraintes (entre autres de l'utilisateur), et les forces externes. En particulier, ces dernières représentent l'adéquation du modèle aux données. Le modèle va donc être optimisé en fonction des données réelles tout en restant contraint par sa représentation. Suivant les primitives que l'on souhaite extraire (contours, formes, régions homogènes) et les données dont on dispose (scanner X, IRM, angiographie RM, échographie, microscopie confocale), on détermine les termes de l'énergie potentielle. Enfin, les déformations du modèle seront influencées par la méthode de résolution employée (formulation statique ou dynamique, différences finies ou éléments finis, méthodes probabilistes).

Par leur formalisme de minimisation de fonction d'énergie, les contours actifs se rapprochent de la théorie de l'optimisation. Par ailleurs, ils se basent aussi sur la théorie de la régularisation. En effet, le problème de la détection des contours est un problème mal-posé "au sens de Hadamard" [127, 40], c'est-à-dire que la solution n'est pas forcément unique ou qu'elle ne dépend pas continûment des données. Pour améliorer le conditionnement du problème, on rajoute des contraintes de régularisation dans la formulation de l'énergie potentielle.

Dans la suite, on parlera de « contours actifs » pour les modèles bidimensionnels de déformation par minimisation d'énergie, de « surfaces actives » pour les modèles tridimensionnels, et de « modèles actifs » pour désigner indifféremment l'un ou l'autre.

On peut diviser les modèles actifs en deux sous-catégories : les modèles actifs élastiques et les modèles actifs paramétriques. Les modèles actifs « élastiques » utilisent une représentation physique explicite de la courbe ou de la surface (en général, une liste de points voisins deux à deux) et lui associent des propriétés comme l'élasticité ou la tension. Les équations d'évolution sont déterministes et proviennent des lois de la dynamique Lagrangienne. Les modèles actifs « paramétriques » emploient une représentation paramétrique de leur géométrie et respectent aussi des équations d'évolution déterministes issues des lois de la dynamique Lagrangienne. En revanche, la représentation du modèle est analytique et l'optimisation du problème se fait sur les paramètres de la représentation. Cela permet d'obtenir une influence globale sur les déformations du modèle, d'introduire des connaissances *a priori* sur la forme de l'objet, mais rend souvent son utilisation plus spécifique [11].

4.2.1 Modèles actifs élastiques

Formulation stationnaire

Dans leur article originel [62], Kass, Witkin et Terzopoulos ont proposé de poser le problème de la détection de contours (ou autres caractéristiques de l'image) en tant que minimisation d'une énergie. Le contour est représenté par une courbe $C = v(s, t)$, ouverte ou fermée, paramétrée par l'abscisse curviligne s et le temps t . Cette courbe sera déformée par une série de minimisations locales. Les auteurs ont appelé *snake* leur courbe déformable. L'énergie potentielle à minimiser est alors :

$$E(t) = E_{ext}(t) + E_{reg}(t). \quad (4.1)$$

Le critère d'optimisation E_{ext} (i.e. l'énergie d'interaction entre le modèle et l'image) dépend du type de primitives que l'on cherche dans l'image. Supposons que l'on souhaite superposer la courbe $C = v(s, t)$ à un contour. Un contour correspond à une zone de fort gradient ; on cherche donc à maximiser la somme des normes du gradient le long de la courbe C . Cette somme est égale à l'énergie potentielle à optimiser. Ainsi, on peut écrire

$$E_{ext}(t) = -\pi \int_C \Phi(\|\nabla I(v(s, t))\|) ds, \quad (4.2)$$

où Φ est une fonction continue croissante [40] et π un réel positif. Dans la formulation originelle, Kass *et al.* [62] ont choisi $\Phi : x \mapsto x^2$.

Le second terme E_{reg} est un terme régularisant, introduit pour rendre le problème de minimisation mieux conditionné. Kass *et al.* [62] utilise un opérateur régularisant de type Thikonov [134] en ne conservant que les termes de premier et de deuxième ordre :

$$E_{reg}(t) = \int_C \frac{1}{2} (\alpha(s) \|v_s(s)\|^2 + \beta(s) \|v_{ss}(s)\|^2) ds \quad (4.3)$$

avec $v_s = \frac{\partial v}{\partial s}$ et $v_{ss} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$.

On peut interpréter la minimisation d'énergie des snakes comme un comportement physique. Pour des termes α et β constants sur la courbe, la minimisation du premier terme est analogue à l'équation d'évolution régissant les faibles déplacements d'une membrane et la minimisation du second terme est similaire à l'équation d'évolution des vibrations d'une plaque mince pour de petits déplacements [62, 40]. Ainsi le terme de premier ordre agit sur la longueur de la courbe et son minimum influence la rigidité et la tension de la courbe tandis que le terme de deuxième ordre agit sur sa courbure.

L'énergie potentielle E_{ext} dérive de l'image ; on ne peut donc en obtenir une expression analytique. Ainsi, il n'y a pas de méthode analytique pour en déterminer le minimum. L'équation d'Euler du système peut être déterminée facilement par un résultat classique du calcul des variations [29]. On obtient alors la formulation *stationnaire* de la minimisation :

$$-\frac{\partial}{\partial s}(\alpha v_s) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta v_{ss}) = \pi \frac{\partial \Phi(\|\nabla I(v)\|)}{\partial v}, \quad (4.4)$$

avec certaines conditions aux limites.

Pour la résoudre, Kass *et al.* [62] utilisent les différences finies pour discrétiser l'équation et la mettre sous forme linéaire :

$$AV = F \quad (4.5)$$

où V est le vecteur des coordonnées des points de la courbe, A , matrice de lissage, est pentadiagonale (symétrique si la courbe est fermée) et le vecteur F , dérivée de ∇I , dépend implicitement de V . A noter que cette discrétisation implique que les nœuds de la courbe restent à distance uniforme les uns des autres, ce qui, dans le cas général, est loin d'être respecté : les nœuds ont en effet tendance à s'accumuler dans les zones de fort gradient.

On peut noter que Berger [12] a montré que la matrice A est toujours singulière pour les snakes fermés et souvent dans les autres cas. Pour résoudre l'équation (4.5) de manière itérative, Kass *et al.* l'ont transformée sous la forme suivante :

$$(A + \gamma I)V^{t+1} = F + \gamma V^t \quad (4.6)$$

où F est une fonction de V^t et $A + \gamma I$ est inversible en $O(n)$ par une décomposition LU . Cohen [26] a noté que le conditionnement de ce système est très dépendant de ce paramètre γ et qu'il est souvent indispensable de choisir un γ assez grand (i.e. un pas de temps très petit) pour améliorer la résolution numérique. On peut aussi chercher à diminuer la plus grande valeur propre de la matrice $A + \gamma I$ [40].

Formulation dynamique

Au lieu d'avoir une approche stationnaire à la résolution du problème de minimisation, on peut considérer la courbe comme un objet dynamique se déformant dans un milieu visqueux (de viscosité γ). Le mouvement peut être déterminé à l'aide du principe de moindre action généralisé de Hamilton. Les équations d'Euler-Lagrange du système sont alors (se référer au livre de Courant et Hilbert [29] ou au travail de Bascle [11] pour une description plus détaillée) :

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}(\alpha v_s) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta v_{ss}) = \pi \frac{\partial \Phi(\|\nabla I(v)\|)}{\partial v} \quad (4.7)$$

La formulation évolutive de Cohen [26] et la résolution numérique par différences finies de Kass *et al.* [62] reviennent à négliger le terme d'inertie ($\mu = 0$) dans (4.7) tout en conservant le terme de frottement. Le terme $1/\gamma$ peut dès lors être vu comme le pas de temps.

Un autre intérêt de la formulation dynamique (4.7) réside dans le fait que le modèle déformable représente naturellement un objet dynamique. Le suivi de formes au sein d'images spatio-temporelles peut être réalisé directement.

La plupart des modèles déformables sont dérivés de l'équation (4.7), simplifiée ou non. Souvent seules la méthode de résolution et la définition des contraintes externes changent d'un modèle à l'autre.

Discussion

La formulation des *snakes* est séduisante pour diverses raisons. Elle est en effet extensible à de nombreuses applications (segmentation, détection de contours ou d'arêtes, stéréovision,

suivi spatio-temporel de formes, coopération avec des approches région) et permet l'interaction de l'utilisateur. Elle combine les deux opérations de détection et de chaînage en une seule. Elle comble l'information là où elle est manquante grâce au principe de régularisation. Certains auteurs, comme Fua et Brechbühler [46], ont montré comment intégrer des contraintes « dures » dans l'évolution des *snakes*.

Ce modèle n'est pas exempt de défauts. Cohen [26] a souligné l'influence de l'initialisation du snake dans l'image et les problèmes d'instabilité numérique. L'interaction de l'utilisateur est donc indispensable pour donner une bonne initialisation au modèle. Le choix des paramètres élastiques est dépendant de l'image de travail. Le *snake* se réduit peu à peu à un point en l'absence de gradients (Elomary [40] a proposé une démonstration élégante de ce phénomène). Enfin ce modèle conserve sa topologie initiale au cours de ses déformations et ne peut donc appréhender des objets complexes. De même il n'y a pas de relation directe entre la topologie du *snake* et sa géométrie. En conséquence, ce modèle est incapable de réagir à des auto-intersections.

4.2.2 Autres contours actifs élastiques (2D)

Afin d'éviter que le modèle ne soit trop sensible à l'initialisation, Cohen [26] a introduit une force d'inflation dans (4.7) qui évite au *snake* de s'effondrer sur lui-même en l'absence de contours. De plus, il s'attaque au problème du pas de temps en proposant une normalisation de l'influence du gradient. Le terme de droite dans (4.7) est alors de la forme $k_1 \mathbf{n} - k_2 \frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}$, où \mathbf{n} est la normale à la courbe et $P = -\|\nabla I(v)\|^2$. Si la force d'inflation peut être interprétée comme le gradient d'un potentiel mesurant l'aire à l'intérieur de la courbe, l'influence de l'image ne dérive plus d'un potentiel. Une autre conséquence de l'introduction d'une force d'inflation est que le *snake* va subir de grandes modifications de sa taille. Une reparamétrisation régulière devient donc indispensable. Elle entraîne une nouvelle inversion du système linéaire (4.6). Par ailleurs, la normalisation rend égale l'influence de tous les contours de l'image, qu'ils soient marqués ou pas. L'auteur utilise donc une image de contour déjà segmentée, par exemple avec un opérateur de type Canny-Deriche [18, 33].

Leymarie et Levine [74] ont étudié le problème de l'estimation des paramètres intrinsèques (μ , γ , $\alpha()$, $\beta()$) et extrinsèques (π , $\Phi()$), ainsi que l'influence de la discrétisation spatiale et temporelle. Ils proposent de modifier $\alpha()$ de manière à ce que le modèle tende vers sa longueur « naturelle » et $\beta()$ de façon à ce que la courbe tende vers sa courbure « naturelle ». L'inconvénient est que le système d'équation n'est plus forcément inversible (i.e., le modèle peut alors osciller) : une inversion du système est donc nécessaire à chaque itération. Pour corriger les autres paramètres, Leymarie et Levine saturent leur influence en les bornant. Enfin ils proposent un nouveau critère d'arrêt basé sur la mesure du potentiel externe moyen le long de la courbe et sur sa variation entre les itérations. Le problème est que le *snake* peut alors s'arrêter sur le simple fait que cette moyenne est relativement constante entre deux itérations.

Cohen et Cohen [27] ont proposé de résoudre l'équation évolutive des snakes avec une méthode des éléments finis basée sur des polynômes Hermitiens bicubiques. Ils affirment que la complexité du problème est réduite par cette approche, notamment dans le cas tridimensionnel. Les éléments finis permettent d'avoir une représentation analytique de la surface. A noter que les auteurs utilisent les éléments finis pour la discrétisation spatiale et

les différences finies (au premier ordre) pour la discrétisation temporelle.

McInerney et Terzopoulos [85] se sont intéressés au problème des changements de topologie au cours des déformations. La dynamique d'évolution de leur modèle, dénommé *T-snake*, est identique à celle de Cohen [26]. Les auteurs se servent d'une grille simpliciale plaquée sur l'image pour détecter et résoudre les variations éventuelles de topologie. Cette division de l'espace permet en effet de résoudre de manière non-ambiguë le problème de la connexité de la courbe. En revanche cela nécessite de mémoriser les cellules où le modèle est déjà passé (algorithme « terre brûlée ») et empêche la courbe de revenir sur ses pas. De plus, la courbe doit être reparamétrisée à chaque itération pour correspondre aux intersections avec la grille simpliciale.

4.2.3 Extension 3D : les surfaces actives

Cohen et Cohen [27] ont étendu la formulation des *snakes* aux surfaces dans \mathbb{R}^3 . Soit $S = v(s, r, t)$ une paramétrisation de la surface. L'énergie de régularisation devient alors :

$$E_{reg}(t) = \iint_S \frac{1}{2} (\omega_{10} \|v_s\|^2 + \omega_{01} \|v_r\|^2 + \omega_{20} \|v_{ss}\|^2 + \omega_{02} \|v_{rr}\|^2 + \omega_{11} \|v_{sr}\|^2) ds dr \quad (4.8)$$

où l'élasticité est déterminée par les fonctions ω_{10} et ω_{01} , la rigidité par les fonctions ω_{20} et ω_{02} et la résistance à la torsion par ω_{11} . Les équations d'Euler-Lagrange associées sont alors :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}(\omega_{10} v_s) - \frac{\partial}{\partial r}(\omega_{01} v_r) \\ + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\omega_{20} v_{ss}) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\omega_{02} v_{rr}) + \frac{\partial^2}{\partial s \partial r}(\omega_{11} v_{sr}) = \pi \frac{\partial \Phi(\|\nabla I(v)\|)}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec une estimation initiale donnée et éventuellement certaines conditions aux limites.

Cohen et Cohen [27] utilisent le terme d'inflation des ballons [26] ainsi que la force normalisée d'attraction vers les données. Les images sont donc pré-segmentées. Une méthode des éléments finis basée sur des fonctions hermitiennes bicubiques est employée pour résoudre l'équation d'évolution (4.9). Ils proposent également trois algorithmes de déformation de leur surface active : le premier n'est en fait que la propagation d'une convergence sur une coupe vers la suivante et n'est pas à proprement parler un algorithme 3D, le deuxième représente la surface par un empilement de courbes fermées, le troisième est basé sur la déformation d'une surface de \mathbb{R}^3 . Les auteurs présentent différentes approches basées sur leur surface active au problème de la reconstruction de données non-structurées. Ce modèle déformable nécessite de connaître *a priori* la topologie exacte de l'objet à reconstruire, ce qui peut limiter son champ d'application.

D'autres auteurs ont proposé des modèles de surfaces actives. Ainsi, McInerney and Terzopoulos [84] ont également présenté un ballon actif dont la dynamique est résolue par une méthode des éléments finis à cellules triangulaires. L'originalité de leur approche réside dans la possibilité de raffiner leur ensemble de cellules. Cette approche multi-résolution leur permet d'estimer rapidement la forme finale de l'objet à recouvrir. Les auteurs démontrent les possibilités de ce modèle sur le suivi du ventricule gauche d'un cœur canin. Ce modèle ne peut représenter que des surfaces homéomorphes à une sphère.

McInerney and Terzopoulos [87] ont présenté une surface active pouvant modifier dynamiquement sa topologie en fonction des variations de sa géométrie. Pour ce faire, ils ont étendu leur *T-snakes* bidimensionnels [85] au cas tridimensionnel. Le problème est de reparamétriser la surface au cours de son évolution. Leur algorithme applique une grille simpliciale — celle de Coxeter-Freudenthal — sur l'espace dans lequel évolue le modèle, afin de recalculer la topologie de la surface en fonction de la nouvelle position de ses sommets. A chaque itération, l'ensemble des sommets de la surface est recalculé à partir de la position des anciens sommets. Cette façon de reparamétriser la surface est très similaire à des algorithmes « Marching-Tetrahedron » [45]. Un algorithme de marquage de type « terre brûlée » permet de définir exactement l'intérieur (ou l'extérieur) de la surface. Si cela permet de définir sans ambiguïté la topologie à chaque pas, cela interdit à la surface de revenir sur ses pas.

4.2.4 Modèles actifs paramétriques

Au lieu de paramétrer la courbe (ou la surface) explicitement par son ensemble de points, les modèles actifs paramétriques modélisent la courbe (ou la surface) sous la forme d'une fonction de ses paramètres (e.g. une B-spline ou une ellipse). On ne cherche donc plus à déformer la courbe (ou la surface) pour atteindre le minimum d'énergie, mais plutôt à faire varier ses paramètres. On ne montre ici que le cas des contours actifs paramétriques bidimensionnels.

Similairement aux modèles actifs élastiques, on cherche à minimiser une énergie. La courbe $C_{\mathbf{a}} = v(s, \mathbf{a}(t))$ est cette fois-ci paramétrée par le vecteur \mathbf{a} , qui va évoluer au cours du temps t ; s représente le parcours sur la courbe, dans l'intervalle Ω . En utilisant le principe de Hamilton généralisé et en supposant que la courbe est linéaire en ses paramètres, l'équation d'évolution peut se mettre sous la forme linéaire suivante :

$$M \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} + D \frac{d\mathbf{a}}{dt} + K \mathbf{a} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi(\|\nabla I\|)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \Phi(\|\nabla I\|)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{a}} \right) ds, \quad (4.10)$$

où M est la matrice d'inertie, D la matrice d'amortissement et K la matrice de lissage. Cette dernière caractérise la régularisation du système. L'intégration se fait suivant le paramètre de parcours s et ne correspond pas forcément à l'abscisse curviligne. Cela peut entraîner un phénomène d'accumulation sur les zones de forte courbure, ce qui peut biaiser le résultat.

Souvent la courbe n'est pas linéaire en ses paramètres mais l'équation (4.10) est malgré tout utilisée. Cette hypothèse simplifie les équations et l'estimation progressive des paramètres s'apparente à une pseudo-descente en gradient [11]. Le terme d'inertie M est très souvent négligé dans les calculs. Le terme de lissage K est aussi parfois négligé, notamment lorsque la famille de fonction est déjà relativement lisse. Pour d'autres familles de fonction, comme une décomposition en séries de Fourier, ce terme ne peut être négligé [120].

Cette approche présente certains avantages par rapport à l'approche directe, parmi lesquels on peut citer :

- La courbe (ou la surface) a désormais une représentation analytique. Un ensemble de caractéristiques géométriques peut donc être calculé exactement.
- Le fait de rechercher un minimum sur une famille paramétrique tend à régulariser le problème car la représentation paramétrique choisie a souvent des propriétés de conti-

nuité et de dérivabilité. Cela permet d'éliminer les termes de lissage dans l'équation d'évolution ce qui limite les problèmes de conditionnement.

- Si l'utilisateur peut modéliser ce qu'il recherche, l'utilisation d'une famille de fonction adéquate permet d'obtenir au mieux les formes voulues (e.g., recherche de cercles, de quadriques).

En contrepartie, le modèle actif perd souvent en souplesse, et se prête mieux à la résolution de problèmes spécifiques (donc appréciables *a priori*) qu'à des problèmes génériques comme la segmentation d'objets anatomiques. De même, la géométrie, la topologie et la dynamique du modèle sont contraints par l'espace des paramètres.

Yuille *et al.* [149] ont proposé des modèles actifs paramétriques, appelés *deformable templates*, pour détecter des objets précis. Ces contours actifs sont des assemblages des cercles et de paraboles. Les auteurs démontrent les possibilités de leur approche sur la détection et le suivi des yeux et de la bouche. Menet *et al.* ont aussi présenté des contours actifs basés sur des B-splines [88].

Basclé [11] a présenté différents contours actifs paramétriques (ellipses, superquadriques, B-splines) appliqués à l'extraction de caractéristiques (bords, jonctions), à la stéréovision et au suivi de formes. L'utilisation de contours actifs paramétriques permet d'accroître la robustesse de la détection dans ces applications. De plus elle permet la quantification des différentes déformations.

Székely *et al.* [120] ont présenté un modèle actif paramétrique basé sur une décomposition de Fourier. Le contour (ou la surface) est modélisé par un vecteur de paramètres qui sont les coefficients d'une décomposition de Fourier (unidimensionnelle pour la courbe et bidimensionnelle pour la surface). Cette décomposition du contour (de la surface) sur un ensemble orthonormé de fonctions permet de bien distinguer les différents paramètres, d'une part en rendant leur évaluation plus aisée, d'autre part en évitant les redondances [118]. L'évolution du modèle est dirigée par une minimisation d'énergie de la forme (4.10) (au contraire du modèle similaire proposé par Staib et Duncan [118]). L'intérêt de cette approche apparaît lorsque l'on dispose d'un modèle de référence initial. Le caractère global de la représentation paramétrique permet alors de simuler aisément des déformations de l'ensemble du modèle (torsions, rotations, changements d'échelle). La difficulté de cette approche réside dans l'obtention d'une paramétrisation de la surface de référence pour que la minimisation d'énergie ne soit pas biaisée. Les auteurs formalisent ce problème sous la forme d'un système de contraintes à optimiser.

Staib et Duncan [118, 119] ont aussi proposé un modèle actif basé sur une paramétrisation de Fourier, mais dans un cadre probabiliste.

4.3 Modèles déformables probabilistes

4.3.1 Formulation

Une autre approche aux modèles déformables est de considérer le problème de l'adéquation du modèle aux données d'un point de vue probabiliste. En pratique, on va rechercher à maximiser la probabilité d'existence du modèle par rapport à la configuration des données, tout en tenant compte de la probabilité *a priori* qu'un tel modèle se réalise [121].

Soit \mathbf{a} le vecteur de paramètres représentant le modèle géométrique. Le vecteur \mathbf{a} peut simplement être un ensemble de points sur une courbe (e.g., le *snake* de Kass *et al.* [62]) ou le vecteur de paramètres d'une courbe paramétrée (e.g., le *Fourier snake* de Staib et Duncan [118]). On dénote alors $t_{\mathbf{a}}$ la réalisation sous forme image du vecteur \mathbf{a} . L'objectif est de trouver l'objet le plus probable en fonction de l'information *a priori* et de l'information image. Cela revient à trouver la réalisation $t_{\mathbf{a}}$ qui correspond à l'image en entrée I . On va donc évaluer la probabilité $\Pr(t_{\mathbf{a}}|I)$ et rechercher son maximum sur l'ensemble des \mathbf{a} . Cela peut s'exprimer au travers de la loi de Bayes :

$$\Pr(t_{\text{map}}) = \max_{\mathbf{a}} \Pr(t_{\mathbf{a}}|I) = \max_{\mathbf{a}} \frac{\Pr(I|t_{\mathbf{a}})\Pr(t_{\mathbf{a}})}{\Pr(I)}, \quad (4.11)$$

où le terme t_{map} est la solution maximum *a posteriori*, le terme $\Pr(t_{\mathbf{a}})$ est la probabilité *a priori* d'obtenir une réalisation paramétrée par \mathbf{a} , et le terme $\Pr(I|t_{\mathbf{a}})$ représente la probabilité d'avoir l'image I pour cette réalisation $t_{\mathbf{a}}$. En général on élimine le terme $\Pr(I)$ car il est supposé constant (toutes les images ont autant de chance de se réaliser) et on transforme le produit restant en une somme en prenant le logarithme de l'expression (4.11).

Cette expression est très intéressante car elle modélise sous forme probabiliste à la fois l'adéquation aux données ($\Pr(I|t_{\mathbf{a}})$) et les caractéristiques du modèle ($\Pr(t_{\mathbf{a}})$). On peut ainsi intégrer facilement l'existence d'un bruit dans les données [118]. Du point de vue du modèle, on peut intégrer une contrainte de lissage [121], et on peut exprimer simplement l'existence d'un modèle de référence associé à un ensemble de déformations plus ou moins probables.

Le calcul numérique peut alors être réalisé à l'aide de méthodes optimales (i.e. qui trouvent le maximum global) telles que l'algorithme de Métropolis ou le recuit simulé, ou bien à l'aide de méthodes sub-optimales comme les modes conditionnels itérés (ICM), la relaxation, la descente en gradient, ou le recuit par champ moyen.

Ainsi, Cootes *et al.* [28] utilisent l'analyse en composantes principales pour obtenir une matrice de déformations basée sur un ensemble d'entraînement. Le modèle géométrique est l'ensemble des points décrivant la courbe. L'analyse en composantes principales permet d'extraire les différents modes de déformations et d'estimer leur importance relative les uns vis-à-vis des autres. Cela se reformule donc facilement en termes de probabilités indépendantes d'obtenir une certaine déformation d'un modèle de référence.

Staib et Duncan [118] ont présenté un modèle de courbe déformable basé sur une paramétrisation de Fourier. Le problème de la détection des bords dans une image à l'aide d'un modèle est formalisé comme l'optimisation d'une fonction objective de type maximum *a posteriori*. Cela permet de modéliser les bruits de l'image ainsi que les variations les plus probables du modèle. Le choix d'une décomposition de Fourier permet de régulariser en partie la solution. Staib et Duncan [119] ont aussi proposé un modèle de surface déformable basé sur une paramétrisation de Fourier. En contraignant certains paramètres ils montrent comment représenter quatre sortes de topologie distinctes (surface ouverte, tube, tore, sphère).

D'autres auteurs ont proposé de faire coopérer un modèle déformable avec une approche probabiliste région. Ainsi Chakraborty *et al.* [20] mettent en œuvre un modèle *Fourier snake* probabiliste qu'ils associent à une segmentation région obtenue par un champ de Markov Gaussien. L'algorithme revient à itérer l'estimation suivante basée sur la somme de trois termes : un terme définissant la forme *a priori*, une intégrale le long de la courbe qui mesure

sa cohérence avec l'information de gradient et une intégrale de région qui estime la cohérence de l'intérieur de la courbe. Le théorème de Green permet de transformer le calcul sur tout l'intérieur de la courbe en variation le long de la courbe.

On peut mettre en avant trois défauts principaux à l'approche probabiliste qui limitent son champ d'application :

- La nécessité de disposer d'un modèle de référence peut être un handicap à la généralité de l'approche. Une autre méthode de segmentation est donc indispensable pour extraire la forme de référence.
- Le calcul numérique est souvent basé sur un suivi de gradients. Il faut donc pouvoir expliciter le gradient en fonction des paramètres du modèle et de l'image.
- La topologie du modèle est fixée.

4.3.2 Lien avec la minimisation d'une énergie

On peut facilement transformer la formulation énergétique de l'énergie interne (4.3) [86] par discrétisation en introduisant une distribution de Gibbs de la forme

$$\Pr(t_{\mathbf{a}}) = \frac{1}{Z_t} \exp(-S(\mathbf{a})), \quad (4.12)$$

où $S(\mathbf{a})$ est une version discrétisée de E_{reg} et Z_t est la constante de normalisation. La probabilité résultante (modèle *a priori*) est d'autant plus importante que l'énergie interne est faible.

On peut aussi transformer l'expression de l'énergie externe (cf. (4.2)) comme probabilité de réalisation de l'image connaissant le modèle :

$$\Pr(I|t_{\mathbf{a}}) = \frac{1}{Z_I} \exp(-P(\mathbf{a})) \quad (4.13)$$

où $P(\mathbf{a})$ est une version discrétisée de E_{ext} , et Z_I la constante de normalisation de la distribution.

La recherche du modèle le plus adéquat est effectuée en trouvant le vecteur de paramètres \mathbf{a} qui maximise la probabilité $\Pr(t_{\mathbf{a}}|I)$ (cf. (4.11)). Avec la construction précédente des lois de probabilité, cela revient à minimiser l'énergie (4.1).

On peut étendre le modèle *a priori* en supposant qu'il est variable dans le temps : avec le modèle de senseur, on obtient un filtre de Kalman, qui décrit l'évolution attendue des paramètres du modèle au cours du temps. Si les équations Lagrangiennes d'évolution représentent le modèle *a priori* variant dans le temps, l'algorithme d'estimations séquentielles par filtre de Kalman résultant est appelé *Kalman snake* [130].

Les modèles « probabilistes » transposent ainsi le problème de minimisation dans un processus stochastique (e.g., les champs de Markov). Leur optimisation est formulée comme un problème d'estimation statistique à partir de données bruitées (e.g., maximum de vraisemblance, maximum *a posteriori*), résolu à l'aide de méthodes optimales ou sub-optimales.

Ces modèles sont très utiles pour prendre en compte le bruit que peut contenir une image. Ils sont moins performants pour représenter la répartition spatiale de l'information (par exemple les similitudes entre informations voisines).

4.4 Evolution par application de forces locales

Si le principe de la minimisation d'une énergie (équation (4.1)) est fondateur, sa résolution effective est souvent réalisée à l'aide des équations d'Euler-Lagrange [11, 26, 27, 62, 74, 84, 85]. D'un point de vue physique, la minimisation de l'énergie d'un système a été ramenée à la dynamique d'un système sous l'action de forces et de contraintes. Certains auteurs préfèrent alors définir directement leur modèle sous la forme d'un ensemble d'éléments (généralement des particules) liés entre eux par des forces et interagissant avec leur environnement.

En général, les forces mises en jeu sont locales aux particules (i.e., les sommets du modèle). Les interactions entre particules voisines permettent de simuler un comportement de tension ou d'élasticité du modèle. Les forces issues de l'image (ou tout autre type de données) sont aussi locales aux sommets, et sont le plus souvent calculées dans leur voisinage. Ces modèles permettent donc de définir les forces de manière explicite, notamment les forces externes qui peuvent être problématiques à définir comme des minima de potentiels. Le calcul explicite pose néanmoins le problème de l'instabilité numérique. Différentes méthodes peuvent être employées pour y pallier : pas de temps adaptatif, seuillage des forces appliquées.

Ces modèles relient souvent les sommets entre eux afin de définir explicitement pour chaque sommet ses sommets voisins. On va donc classer ces modèles selon l'existence et la variabilité de la structure induite.

4.4.1 Modèles non-structurés

Ce sont des modèles de particules libres dont les interactions sont basées sur des critères de distance. Beaucoup de modèles de particules ont été développés, surtout dans le domaine de l'animation et de la synthèse d'images (se référer par exemple à la thèse de Desbrun [34] pour un tour d'horizon). En modélisation géométrique et reconstruction à partir de données non-structurées, on peut citer le modèle des « particules orientées » de Szeliski et Tonnesen [122, 123]. Ces particules, dotées d'un référentiel local, construisent une approximation de la surface d'un objet, à l'aide de contraintes de co-planarité, de co-normalité et de co-circularité. Les auteurs montrent que ce modèle peut approcher des formes de topologie complexe et l'appliquent à de l'approximation de données non-structurées. Un inconvénient mineur réside dans le calcul des interactions entre particules, qui peut théoriquement être assez coûteux. Un défaut plus problématique est que ce modèle ne fournit pas une description de la structure des objets, mais plutôt un échantillonnage de la forme. Une telle description n'est utilisable que pour des applications de visualisation.

4.4.2 Modèles à structure fixe

Ces modèles sont basés sur une maille de type masse-ressort, où chaque particule est reliée à ses voisins par des ressorts. Le réseau ainsi constitué est fixe au cours du temps. Ces modèles ne peuvent donc approcher que des formes ayant la même topologie que le modèle à l'initialisation. Vasilescu et Terzopoulos [138] ont présenté un modèle de cette nature pour reconstruire des données non-structurées : des ressorts sont placés entre certains sommets

et les points des données. Algorri et Schmitt [3] ont amélioré le procédé en initialisant le modèle avec la topologie *supposée* de la forme recherchée et en optimisant la dynamique des particules.

Dans le contexte de la segmentation/reconstruction à partir de données volumétriques, il est difficile de prédire la forme finale de l'objet et de placer un ensemble de « ressorts attracteurs » pour déformer la maille. Ces modèles à structure fixe ne sont donc pas adaptés à ce contexte d'application.

En revanche, si l'objet à segmenter et à reconstruire est bien connu, une approche avec de tels modèles peut être réalisée. Ainsi, Flasque *et al.* [43] ont proposé un modèle classique masse-ressort à structure fixe pour extraire les tissus cervicaux (matière grise et matière blanche). L'originalité de leur approche réside dans la définition de plusieurs surfaces représentant l'imbrication des différents tissus cervicaux. Des ressorts entre ces surfaces contraignent leurs positions mutuelles de façon à respecter leur structure naturelle.

4.4.3 Modèles à structure variable

Ces modèles proposent des structures variables pour augmenter leur souplesse de représentation. Si ces modèles sont répandus en modélisation et en animation [79, 141], ils sont plus rares dans le contexte qui nous intéresse, car le modèle peut subir des déformations arbitraires : les modèles à structure variable doivent prédire les transformations topologiques à opérer sur leur structure afin de l'adapter au mieux aux variations de sa géométrie. Or, sous l'action des forces internes et externes, les mailles peuvent s'auto-intersecter ou dégénérer. Comme le souligne l'Annexe B, une infinité (théoriquement) de problèmes topologiques (ou *singularités*) différents peuvent survenir et trouver les ensembles d'opérations topologiques qui corrigent ces singularités est difficile sans faire certaines hypothèses (e.g., fermeture de la surface, échantillonnage de la surface).

Leitner [72] et Delingette [30, 31] ont chacun proposé un modèle visant à appréhender des formes complexes en modifiant la topologie de la maille de façon plus ou moins automatique. Comme le modèle générique que nous présentons dans le Chapitre 5 est assez proche dans l'esprit de ces deux modèles, nous discuterons plus précisément de leurs spécificités et avantages respectifs dans la Section 5.3.6.

4.5 Modèles déformables à base physique

Ce sont des modèles qui incluent une partie de la dynamique des solides dans leur formulation. Ils sont particulièrement adaptés à l'animation, à la simulation, et au recalage. Certains auteurs ont proposé d'utiliser ces modèles dans le cadre de la segmentation, de la reconstruction, ou du suivi de formes.

La plupart des modèles à base physique sont dérivés du modèle de Terzopoulos et Witkin [131]. Leur idée a été de reprendre le modèle élastique paramétrique de Terzopoulos *et al.* [129] et de lui associer une composante rigide. La forme du modèle est ainsi la somme d'une forme rigide globale et d'un terme représentant les petites déformations élastiques. Au contraire des modèles élastiques, l'objet possède un référentiel non-inertiel centré sur son centre de gravité. La dynamique du modèle est donc définie d'une part par la dynamique

des solides (position, vitesse, vecteur rotation instantané), d'autre part par les déformations élastiques locales. Un tel modèle peut se linéariser sous la forme :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = g_q + f_q \quad (4.14)$$

où M est la matrice d'inertie, C la matrice d'amortissement, K la matrice de lissage, g_q les forces centrifuges et de Coriolis, f_q les forces externes associées, et q est le vecteur de paramètres du modèle représentant à la fois la position, l'orientation, la forme globale et les déformations locales de l'objet.

Terzopoulos et Metaxas [128] ont appliqué ce modèle à la segmentation d'images et à la reconstruction de données non-structurées. Leur modèle de référence est une superquadrique dont les paramètres globaux sont variables. La difficulté réside dans le calcul de la matrice d'inertie, fonction du temps contrairement au modèle précédent [131].

Metaxas and Kakadiaris [89] ont amélioré ce modèle en autorisant l'évolution des paramètres gouvernant l'élasticité de l'objet. Leur méthode est d'intégrer les paramètres élastiques dans le vecteur d'état du système. Chaque élément fini du modèle possède donc un paramètre élastique qui évolue suivant l'adéquation aux données des nœuds de l'élément. Ils appliquent leur modèle sur des images 2D et sur la reconstruction de nuages de points 3D. L'intérêt de la variabilité de l'élasticité est, d'une part que l'utilisateur n'a pas besoin de régler les paramètres élastiques très finement, et d'autre part que le modèle devient plus flexible sur les zones intermédiaires, ce qui accroît sa vitesse de convergence.

Bardinet *et al.* [9] utilisent aussi une superquadrique pour reconstruire des données non-structurées, mais ne recherchent que sa forme globale. Les déformations locales ne sont en effet effectuées qu'*a posteriori*. Les auteurs utilisent alors une technique de déformations de formes libres (FFD de Sederberg et Parry [115]) pour affiner le résultat. Bardinet *et al.* [10] ont appliqué ce modèle au suivi des mouvements cardiaques. Kumar et Goldgof [66] reconstruisent aussi des données non-structurées mais à l'aide d'un modèle englobant les superquadriques et appelé hyperquadrique.

On peut aussi citer les travaux de Pentland et Horowitz [109] qui transposent la dynamique du modèle dans la base de ses modes de déformations (analyse modale). Le modèle n'est plus représenté par un ensemble de points mais par un ensemble de paramètres (orthogonaux sur cette base) qui définissent les différentes déformations qu'il peut subir. Ainsi les premiers modes traduisent la dynamique d'un objet rigide (composantes de translation et de rotation), les suivants sont des termes de déformations globales (torsion, étirement, etc), puis les termes représentent des déformations de plus en plus locales. Grâce à cette décomposition, les auteurs peuvent sur-contraindre facilement le problème de la reconstruction de formes en tronquant le vecteur de paramètres. Nastar et Ayache [100] utilisent aussi l'analyse modale pour suivre les mouvements d'un cœur canin au travers d'une série d'images 3D issue d'un scanner à rayons X.

Enfin, Park *et al.* [107] préfèrent construire un modèle partiel de cœur basé sur des paramètres « intuitifs » dans le but de suivre et d'analyser les mouvements du ventricule gauche. Le modèle est volumétrique et son évolution est gouvernée par des paramètres de déformation radiale, longitudinale, axiale, des paramètres de torsion et de twist. L'espace des déformations est ainsi considérablement réduit et les mouvements du ventricule peuvent être directement interprétés et comparés aux mouvements réels. L'inconvénient de cette

approche provient de la dépendance du modèle à sa modélisation physique *a priori*. Si celui-ci ne traduit pas la dynamique réelle du cœur, l'analyse de ses déformations peut conduire à des erreurs d'interprétation, même si les mouvements correspondent *visuellement*.

4.6 Approche discrète des déformations

Les modèles présentés jusqu'à présent respectent une dynamique Lagrangienne globale ou locale. Leur dynamique est basée sur un ensemble de forces (directes ou dérivées d'une formulation variationnelle) qui agissent sur le système et le contraignent à se déplacer ou à se déformer en respectant des lois d'évolution.

Considérant le caractère intrinsèquement discret des images (2D ou 3D), certains auteurs ont une approche purement discrète des déformations. Contrairement aux approches élastiques par exemple, ces modèles n'oscillent pas autour de leur position de repos. Par ailleurs, ils peuvent profiter de la *combinatoire finie* de leur espace de déplacement pour rechercher la solution de manière optimale.

Ainsi, Miller *et al.* [93] ont proposé un modèle de surface triangulée déformable afin d'extraire des formes d'images volumétriques. A chaque sommet est associée une fonction coût, somme de trois termes indépendants : un terme de lissage, un terme d'inflation et un terme d'adéquation aux données. A chaque itération et en chacun des sommets, le sommet tente de se déplacer dans la direction du gradient de la fonction coût. Trois pas différents sont possibles. Le modèle peut aussi se subdiviser localement pour affiner ses résultats. En revanche, ce modèle se limite à l'approximation d'iso-surfaces dans une image.

D'autres auteurs, comme Amini *et al.* [4] et Tagare [124], ont proposé une variante discrète des snakes 2D. Les sommets n'ayant qu'un nombre limité de déplacements possibles, des techniques de programmation dynamique peuvent être utilisées pour minimiser l'énergie du modèle. Tagare [124] optimise la recherche des nouvelles positions le long des courbes orthogonales du modèle. La programmation dynamique est malheureusement très coûteuse, et sa complexité rend prohibitif son usage dans la segmentation de données tridimensionnelles.

Elomary [40] a présenté un modèle de « bulle » discrète déformable pour segmenter des images 2D, qui utilise un principe de minimisation d'énergie similaire à Kass *et al.* [62]. L'originalité de son approche réside dans l'évolution de la bulle. A chaque itération, on calcule la nouvelle énergie du modèle pour chaque sommet déplacé d'un pas fixe donné dans la direction de sa normale. Ensuite, le sommet qui minimise l'énergie sera effectivement déplacé de ce pas. *Un tel modèle ne converge donc pas vers une solution.* En revanche, on peut examiner *a posteriori* l'évolution de l'énergie du modèle au cours du temps. Le minimum donnera alors l'instant où la bulle répondait au mieux aux critères de régularité et d'adéquation aux contours de l'image. Une telle méthode est difficilement extensible en 3D, car le grand nombre de sommets à déplacer ralentirait considérablement l'évolution de la bulle.

Enfin, Ashton *et al.* [6] ont construit un modèle discret de bulle de voxels inflationniste. Le modèle possède une pression interne (modèle des gaz parfaits) qui le fait s'étendre de manière isotrope. Des contraintes sur la pression interne permettent de régulariser la forme. Ce modèle ne peut être utilisé que pour approcher une forme dans une image pré-segmentée, car son interaction avec l'image est minimaliste.

En conclusion, les modèles déformables « discrets » exploitent au maximum le fait que les données volumétriques en entrées sont discrètes et manipulent une représentation purement discrète pour les approcher. Des techniques d'optimisation spécifiques comme la programmation dynamique peuvent alors être employées avec succès. Ces modèles sont en revanche très peu employés pour la segmentation de données 3D, principalement à cause de leur complexité prohibitive.

4.7 Déformations basées sur un modèle de référence

L'objectif est de guider le processus d'extraction de composantes d'une image grâce à l'introduction d'une grande quantité d'informations sur l'objet à extraire. Si la plupart des modèles déformables présument implicitement de la topologie finale de l'objet en la contraignant à être identique à celle donnée en initialisation du processus de déformation, certains proposent d'utiliser un modèle de référence, supposé proche de l'objet recherché, pour rendre l'extraction plus robuste.

Il existe plusieurs manières d'introduire des connaissances *a priori* au travers d'un modèle de référence :

1. Le modèle de référence n'est exploité qu'en tant qu'initialisation d'un processus de déformation. Cette approche, pour être efficace, doit placer le modèle de référence dans les conditions mêmes où il a été extrait. Un recalage (rigide ou élastique) doit généralement être fait. C'est pourquoi cette approche est plus souvent utilisée lorsque le processus effectue une série de segmentations 2D sur un ensemble de coupes, le résultat sur la coupe précédente servant d'initialisation à la coupe suivante [27]. Des problèmes d'embranchements sur un objet vu sur différentes coupes peuvent alors apparaître.
2. Les déformations importantes du modèle par rapport au modèle de référence sont pénalisées. La façon dont est effectuée cette pénalisation dépend avant tout du processus de dévolution choisi :
 - Dans un contexte de structure déformable, le modèle de *simplex mesh* de Delingette [30, 31] intègre une mémoire de forme : la structure élastique tend à revenir à sa position de repos. Montagnat et Delingette [96] étendent ce modèle en utilisant un ensemble de déformations globales à la surface pour approcher la forme finale, puis en autorisant de faibles déformations à l'aide de forces locales sur les sommets de leur maille pour affiner le résultat.
 - Dans un contexte de minimisation d'énergie, Tagare [124] traduit l'éloignement des sommets de leur position de repos par un accroissement d'énergie. Les sommets sont contraints de se déplacer sur des lignes orthogonales à la courbe de référence. La minimisation s'effectue sur cette énergie de déformation additionnée des termes et d'adéquation aux données. MacDonald *et al.* [80] introduisent une fonction coût définie par un terme de conservation élastique et un terme de conservation de courbure pour segmenter le cerveau.

3. Le modèle de référence fournit non seulement une forme approchée de l'objet final mais encore une description de ses déformations les plus probables. Les modèles probabilistes sont typiquement conçus pour répondre à ce besoin. En effet, ils peuvent exploiter l'information statistique issue d'un *ensemble d'entraînement* pour extraire des lois statistiques sur les paramètres du modèles. Les travaux de Cootes *et al.* [28] sur les « templates » déformables ainsi que les travaux de Staib et Duncan [118, 119] sur les « Fourier snakes » sont représentatifs de cette méthode. Nastar et Ayache [100] extraient le spectre des déformations de leur modèle obtenu par analyse modale pour déterminer l'ensemble des déformations admissibles.

D'autres auteurs transforment la contrainte d'un modèle de référence en une contrainte sur la formulation du modèle lui-même. Ainsi Terzopoulos and Metaxas [128] modélisent une superquadrique, capable de déformations globales et locales, pour approcher des données. Bardinet *et al.* [9, 10] utilisent une superquadrique raffinée à l'aide d'une boîte de contrôle déformable (« free-form deformation » [115]) pour pister les mouvements du ventricule gauche. Pentland et Horowitz [109] décrivent le modèle à l'aide de l'analyse modale ; le suivi des mouvements et déformations s'effectue sur les modes de déformations propres (modes de vibrations libres) du modèle initial.

4.8 Approche Eulerienne

L'objectif est d'extraire les composantes d'images volumétriques en se basant sur un modèle. Les sections précédentes ont montré comment aborder le problème de la segmentation/reconstruction par le biais de modèles déformables formulés explicitement : l'interaction image/modèle déforme itérativement le modèle vers une forme finale.

La vision Eulerienne donne un autre point de vue pour modéliser les déformations d'un système. Au lieu de suivre les déformations d'un objet (ici, le modèle) dans un espace, on suit les déformations de l'espace tout entier. La forme finale est donc définie implicitement au sein de l'espace de travail.

Dans les domaines de la détection de contours, de la segmentation et de la reconstruction, l'approche Eulerienne qui a reçu le plus d'attention ces dernières années est la propagation de fronts (approche « level-set » [106]). Le principe est de déformer un espace (i.e., le modèle Eulerien) avec une équation de diffusion (généralement non-linéaire) paramétrée par l'image, puis de suivre l'évolution d'une iso-potentielle dans cet espace. Sa position de repos finale (liée à la position d'équilibre de l'espace tout entier) déterminera implicitement la forme de l'objet.

Le modèle est donc un espace spatio-temporel, $u(x, y, t)$ dans le cas bidimensionnel (resp. $u(x, y, z, t)$ dans le cas tridimensionnel) à valeur dans \mathbb{R} , associé à une valeur initiale $u_0(x, y)$ (resp. $u_0(x, y, z)$) pour $t = 0$. On va particulièrement suivre l'évolution du niveau 0 (i.e., $u(x, y, z, t) = 0$) au cours du temps. Le nom d'approche « level-set » résulte de cette formulation.

Cette approche de la segmentation/reconstruction résulte de la convergence de plusieurs idées : les espaces multi-échelles, le filtrage non-linéaire, la propagation d'une onde en fonction de sa courbure. Le formalisme Lagrangien de la propagation d'une onde dans un milieu pose plusieurs problèmes, numériquement très difficiles à contourner : des chocs peuvent se

produire, des « zones de raréfaction » peuvent apparaître [116]. L'idée majeure de Osher et Sethian [106] est de transposer la problématique Lagrangienne de l'évolution d'une courbe C au cours du temps en l'évolution d'un niveau dans un espace spatio-temporel.

Dans un premier temps, nous allons rappeler brièvement l'origine et la formulation de cette approche. Puis nous évoquerons et discuterons quelques extensions. Enfin, nous montrerons que cette approche peut se mettre sous forme variationnelle et possède ainsi de profondes similitudes avec le modèle explicite de minimisation d'énergie.

4.8.1 Formulation

On s'intéresse à la propagation du niveau 0 dans u . Soit $\mathbf{X}(t)$ l'évolution d'un point qui reste sur l'onde de niveau 0 au cours du temps. En différentiant $u(\mathbf{X}(t), t) = 0$, il est facile d'obtenir l'équation d'évolution de u :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \dot{\mathbf{X}}(t) \|\nabla u(\mathbf{X}(t), t)\| = 0. \quad (4.15)$$

où $F = \|\frac{d\mathbf{X}}{dt}\|$ est la vitesse de propagation de l'onde.

Suivant l'application recherchée, on définira le terme de vitesse de propagation de l'onde \mathbf{X} différemment :

- On peut choisir $F = -\kappa = -\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ [106, 116, 148], où κ est l'expression implicite de la courbure sur le niveau 0. Dans ce cas-là, l'onde se propage plus rapidement sur les courbures élevées. On peut montrer que cette équation revient à une version géométrique de l'équation de la chaleur, où la diffusion est bloquée par les arêtes [98] (i.e., on parle de diffusion anisotropique). Une partie de la théorie des espaces multi-échelles se base sur cette formulation. Elle correspond aussi à une minimisation de la longueur Euclidienne (l'aire en 3D) du front d'onde [51, 148]. Elle permet notamment de lisser les images en conservant au mieux les zones de fort gradients, c'est-à-dire les arêtes.
- Pour des applications d'extraction de formes dans une image, on peut modifier la formulation purement géométrique précédente en intégrant l'influence d'une image I dans l'expression de F . Ainsi Caselles *et al.* [19] et Malladi *et al.* [82, 83] ont proposé :

$$F = -\Phi(x, y, z) \left(\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} + \nu \right) \quad (4.16)$$

où Φ est une fonction de l'image I , appelée « terme d'arrêt », et ν est un terme d'inflation pour pousser l'onde vers la forme en absence d'informations (similaire au terme d'inflation des ballons de Cohen [26]). Un choix judicieux de Φ permet à l'onde de s'arrêter sur les arêtes fortes et de glisser sur les arêtes faibles. On peut choisir :

$$\Phi = \frac{1}{1 + \|\nabla G_\sigma * I\|^n} \quad (4.17)$$

avec G_σ filtre gaussien, $n \in \{1, 2\}$ suivant les auteurs.

- Tek et Kimia [126] ont adapté ce modèle en paramétrant les contributions du facteur de courbure κ et du terme d'inflation ν . Ils obtiennent ainsi un espace de *réaction/diffusion* dans lequel ils extraient les formes en initialisant un grand nombre de petites bulles. Le paramétrage choisi pour la réaction/diffusion influe sur le type de données extraites.

4.8.2 Extensions et discussion

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à cette approche, nous ne présentons ici que les applications en segmentation et en extraction de formes (pour une présentation très complète, se référer au livre de Sethian [116]).

Les modèles implicites basés sur la propagation d'un front présentent certains avantages comparativement à beaucoup de modèles explicites :

- Ces modèles adaptent naturellement (et implicitement) leur topologie à leurs évolutions géométriques. L'onde est en effet une iso-potentielle dans un espace de dimension supérieure. Cette espace ne change pas sa topologie au cours du temps, et donc les changements de topologie de l'onde ne sont que le reflet d'une géométrie différente de l'espace de dimension supérieure. Ainsi ces modèles conviennent particulièrement à l'extraction de formes dont on ne connaît pas la topologie *a priori*.
- Ils sont indépendants de la paramétrisation. C'est pourquoi on les appelle souvent des *modèles géométriques intrinsèques*. Ainsi ils évitent tout problème lié à l'accumulation de points dans des zones de forts gradients, et ne nécessitent pas de ré-échantillonnage.

Ils ont néanmoins quelques lacunes qui peuvent limiter leur utilisation :

- Le lissage du modèle est intrinsèque. On ne peut donc pas le localiser autour de certaines zones.
- L'ajustement du terme d'inflation est délicat. Un critère d'arrêt du processus doit en général être mis en place.
- Il est difficile de traduire l'interaction d'un utilisateur éventuel.
- Par opposition aux *snakes* ou à d'autres méthodes contraintes par un terme de rigidité, un tel modèle ne s'arrête pas sur une ligne brisée. Au contraire, il a tendance à passer au travers des trous pour les contourner, puis fusionne. Dans le domaine de la restauration d'images, Weickert [140] a introduit un nouveau processus de diffusion anisotropique basé non plus sur une « diffusivité » mais sur un tenseur de diffusion, prenant ainsi mieux en compte la structure spatiale locale de l'image.

Par ailleurs, la résolution numérique de ces équations est relativement délicate. Osher et Sethian [106] utilisent un mécanisme de différences finies dans le sens du déplacement pour obtenir une bonne stabilité. D'autres méthodes existent [116]. En 3D, la complexité devient importante, et des optimisations sont souvent nécessaires. Malladi *et al.* [82, 83] proposent de restreindre le calcul de u autour de la bande $u = 0$. Cette bande doit donc soit évoluer dynamiquement, soit être ré-initialisée en cas de dépassement. Enfin, Desbrun et Gascuel [35, 34] construisent une triangulation de l'isopotentielle 0 à chaque itération (algorithme de *marching-cubes* classique) pour éviter l'emploi de méthodes numériques coûteuses.

4.8.3 Lien avec la minimisation d'une énergie

Whitaker [143] a proposé une extension intéressante de la propagation de fronts. Il a lié l'évolution du niveau 0 à une minimisation d'énergie identique à (4.1). La formulation de l'énergie interne est similaire à (4.3) dans le cas 2D, et omet le terme de rigidité dans le cas 3D. Cette minimisation d'énergie fournit une dynamique (Lagrangienne) du front se propageant. Cette dynamique (expression de $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$) est réintroduite dans l'équation Eulerienne (4.15). La reconstruction de la forme se fait par une approche multi-résolution.

L'intégration du terme d'arrêt Φ dans l'équation d'évolution (4.16) peut paraître quelque peu *ad hoc*. Afin de traduire l'influence de l'image sous forme d'une minimisation d'énergie, Yezzi *et al.* [148] remplacent la métrique Euclidienne par une métrique conforme induite par Φ . Le processus de propagation d'onde devient un processus de minimisation de la longueur (l'aire) *conforme* de l'onde de niveau 0.

Enfin Morel et Solimini [98] ont montré que ces approches peuvent être reformulées dans un contexte de minimisation d'énergie. Cela provient du fait que l'équation de diffusion de la chaleur peut se mettre simplement sous forme variationnelle.

4.9 Conclusion

4.9.1 Discussion sur les modèles présentés

Dans ce chapitre, nous avons présenté un grand nombre de modèles variés, que ce soient dans leur formulation, leur structure, leur principe de déformation, ou leurs applications.

La plupart de ces modèles sont particulièrement performants dans leurs domaines respectifs, mais leur formulation les empêche d'être utilisés dans d'autres conditions.

Quant aux modèles déformables plus génériques, le fait qu'ils intègrent moins d'informations *a priori* les rend plus sensibles aux bruits et moins fiables dans la qualité de l'extraction.

Ainsi, le formalisme de minimisation d'énergie est une manière très intuitive d'approcher les contours d'objets. Malheureusement les modèles qui en découlent ont besoin d'être initialisés assez proches de la forme finale. De plus, ils se limitent souvent à des topologies simples.

Les modèles déformables probabilistes permettent d'intégrer de manière naturelle des connaissances statistiques sur les objets à extraire. Ils sont donc très robustes aux bruits et analysent finement la variabilité du modèle. En revanche, leur conception les limite à des objets connus, sur lesquels des informations statistiques sont disponibles. De même, leur topologie est figée.

Les modèles de mailles déformables sont souvent plus souples vis-à-vis de leur forme finale et peuvent parfois adapter la topologie de leur maille aux déformations qu'ils subissent. Leur processus de segmentation est en revanche souvent moins fiable, car ce processus s'appuie sur une définition uniquement locale des forces issues de l'image.

Les modèles à base physique permettent d'obtenir un modèle dynamique et concis de la forme. Cette concision permet d'effectuer facilement des traitements comme la mise en correspondance ou le recalage. L'aspect dynamique est un outil puissant pour le suivi de formes. Là-encore, ces modèles sont très restrictifs au niveau des formes qu'ils peuvent approcher (formes ovoïdes le plus souvent).

Les modèles discrets peuvent améliorer l'efficacité des processus de minimisation d'énergie et éviter les minima locaux pour trouver effectivement le minimum global, mais leurs extensions tridimensionnelles sont extrêmement coûteuses en temps de calcul.

La segmentation des formes guidée par des modèles de références accroît la robustesse de l'extraction mais demande des connaissances *a priori* très précises. L'apport de ces informations peut biaiser le résultat, notamment si le recalage est difficile. Par ailleurs, la détection de pathologies est rendu problématique.

Enfin, les modèles Euleriens ou modèles géométriques intrinsèques approchent de façon naturelle des objets de formes arbitrairement complexes. Néanmoins, leur procédé de segmentation des données peut les rendre inefficaces sur certains types de données. L'ajustement du critère d'arrêt est délicat et ces modèles ont tendance à s'engouffrer dans les trous plutôt que de combler l'information manquante.

4.9.2 Elaboration d'un modèle générique

D'après ce qui précède, un modèle générique adapté au problème de la segmentation et la reconstruction de structures géométriques à partir d'images tridimensionnelles doit posséder les qualités suivantes :

- gestion de formes arbitrairement complexes ;
- adéquation modèle/données intuitive et paramétrable ;
- interaction possible de l'utilisateur ;
- invariance vis-à-vis de l'initialisation.

Dans le Chapitre 5, nous proposons un modèle générique qui tente de répondre à ces critères, souvent difficiles à faire cohabiter.

Chapitre 5

Modèle générique pour la segmentation/reconstruction d'images 3D

5.1 Motivation

Le chapitre précédent a permis de regrouper les différents modèles déformables suivant leur formulation du problème de l'extraction de formes. Il est apparu clairement qu'aucune approche ne peut prétendre à être universelle, chacune ayant ses avantages et inconvénients propres. Plutôt que de construire un modèle spécifique à une tâche, nous nous sommes intéressés aux méthodes de segmentation/reconstruction plus génériques, qui, si elles n'offrent pas en général la robustesse des modèles dédiés, s'adaptent beaucoup plus facilement à des modalités diverses. En conséquence, leurs principales qualités doivent être :

1. la flexibilité du modèle vis-à-vis de la géométrie et de la topologie des composantes à extraire ;
2. l'indépendance relative du modèle par rapport à l'initialisation ;
3. la capacité à intégrer de nouvelles contraintes pour interagir avec l'image ;
4. la simplicité de réglage des paramètres pour rendre plus intuitif son utilisation ;
5. la possibilité d'extraire un ensemble de caractéristiques et de propriétés afin d'analyser de manière qualitative et quantitative les résultats ;
6. de manière indirecte, ce modèle doit pouvoir segmenter et reconstruire des formes d'une image avec des temps de calcul non prohibitifs en regard de la précision demandée.

Ce chapitre présente un modèle de surface déformable original, basé sur une triangulation de surface, qui réunit plusieurs aspects des modèles présentés au chapitre précédent, afin de répondre au mieux aux qualités requises pour un modèle générique.

Ses principales spécificités sont :

- La structure du modèle est une surface triangulée adaptative. Son évolution est similaire à un système de particules gouverné par une dynamique Lagrangienne et soumis à des forces explicites internes ou externes.
- La recherche de formes au sein de l'image peut s'interpréter comme la minimisation d'une énergie.
- Le modèle adapte de façon *entièrement automatique* la topologie de sa structure à la géométrie de ses sommets. Quelles que soient ses évolutions, le modèle représente une *surface* fermée plongée dans \mathbb{R}^3 (2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3). En particulier, elle est orientable [1]). Lorsqu'elle est orientée de manière cohérente (Définition A.7), son intérieur représente constamment un volume de \mathbb{R}^3 (une 3-variété dans \mathbb{R}^3 avec bords).
- Le modèle autorise une approche multi-résolution de l'esquisse aux détails de l'extraction des formes d'une image. Pour ce faire, un procédé de construction de pyramides d'images tridimensionnelles a été mis au point.

Ainsi, ce modèle combine la souplesse de la topologie d'un modèle Eulerien, la puissance du formalisme de minimisation d'une énergie des modèles actifs élastiques, et la simplicité et la rapidité des modèles à structure adaptative.

Il n'est donc pas restreint à l'extraction de formes particulières (e.g., ovoïdes, à topologie sphérique). Il conserve une approche locale des déformations. La résolution numérique de son évolution peut se mettre sous forme explicite. Contrairement aux modèles Euleriens de propagation de fronts [19, 82, 83, 106, 116, 143, 148], sa précision n'est pas conditionnée par la discrétisation d'une grille mais par la distance entre ses sommets. Sa complexité numérique est donc moindre.

5.2 Descriptif du modèle

Notre objectif est d'extraire des formes tridimensionnelles plongées dans \mathbb{R}^3 . D'un point de vue topologique, ces formes sont des 3-variétés dans \mathbb{R}^3 (on dit souvent « volumes »). Il est très coûteux de déformer un modèle entièrement volumétrique pour qu'il s'adapte aux formes de l'image. Afin de réduire la complexité, la méthode couramment utilisée consiste à déformer un modèle de surface jusqu'à ce qu'il approche le bord de l'objet. D'après le Théorème A.30, son bord est donc homéomorphe à une 2-variété sans bord plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 .

C'est pourquoi nous proposons un modèle déformable capable de représenter les surfaces (topologiques) sans bord (Définition A.5) que l'on peut plonger dans notre espace. Le contexte de segmentation/reconstruction justifie ce choix qui pourrait paraître limitatif. Une autre conséquence de ce choix est l'élimination des conditions aux limites dans la dynamique du modèle, souvent difficiles à modéliser. Enfin, ce choix va nous permettre d'effectuer *sans ambiguïté* des transformations topologiques sur la « surface ».

Notre modèle est pourvu d'un ensemble d'opérations de transformation topologique pour pouvoir approcher toutes les topologies de surfaces sans bord dans \mathbb{R}^3 — ceci est particulièrement intéressant dans notre contexte, car nous n'aurons pas à attribuer de topologie *a priori* à notre modèle. On dit alors que l'ensemble des opérateurs est *complet*. La classification des surfaces (voir Section A.3) permet de vérifier simplement si un ensemble d'opérateur est complet. *En conséquence, dans le cas des modèles déformables, la difficulté n'est pas tant de définir un ensemble complet d'opérateurs, mais plutôt d'associer aux opérateurs topologiques un événement (donc une géométrie) qui détermine le moment et l'endroit logique de leur utilisation.*

La Section 5.3 présente de manière détaillée la représentation choisie pour le modèle, la formulation des opérateurs topologiques, et les contraintes géométriques associées.

Les déformations du modèle sont matérialisées par les déplacements géométriques des sommets de la surface triangulée. Les sommets sont déformés sous l'action de forces locales. Leur dynamique est similaire à un système de particules de type masse-ressort. La Section 5.4 présente la dynamique du modèle, les contraintes internes de régularisation, l'algorithme d'évolution, et le problème de la résolution numérique.

Le modèle doit approcher les bords des formes tridimensionnelles incluses dans les images volumétriques. La Section 5.5 présente différentes forces locales déduites de l'image capables d'attirer les sommets du modèle vers les formes voulues.

La Section 5.6 montre la mise en œuvre d'une approche multi-résolution du problème de la segmentation/reconstruction des données. Une pyramide d'images tridimensionnelles décrivant les données à différentes échelles est construite. Le modèle recherche les formes de l'esquisse au détail en travaillant successivement sur les images à des échelles de plus en plus petites.

Enfin, la Section 5.7 présente les algorithmes de segmentation/reconstruction issus de ce modèle ainsi que quelques exemples d'évolutions sur des images de synthèse.

5.3 Géométrie et topologie

5.3.1 Une surface combinatoire triangulée

D'après le Théorème A.38, toute surface fermée possède une triangulation dont le corps lui est homéomorphe. Ainsi, il suffit de représenter une triangulation pour obtenir toutes les topologies de surfaces fermées distinctes.

Nous représentons notre modèle de surface de manière combinatoire :

Définition 5.1 (Surface combinatoire triangulée fermée) Une *surface combinatoire triangulée fermée* Σ est un couple (S, \oplus) , où S est un ensemble fini et \oplus est une relation binaire sur S qui vérifie les propriétés suivantes :

1. la relation \oplus est irréflexive, symétrique ;
2. pour tout $U \in S$, l'ensemble $\{V \in S / U \oplus V\}$, noté $\oplus(U)$, peut se mettre sous la forme d'une permutation circulaire de $(U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$ de sommets distincts deux à deux telle que, pour tout $0 \leq j \leq k - 1$, on ait $U_j \oplus U_{(j+1) \bmod k}$. L'ensemble $\{U, U_j, U_{(j+1) \bmod k}\}$ est une *face* de Σ .

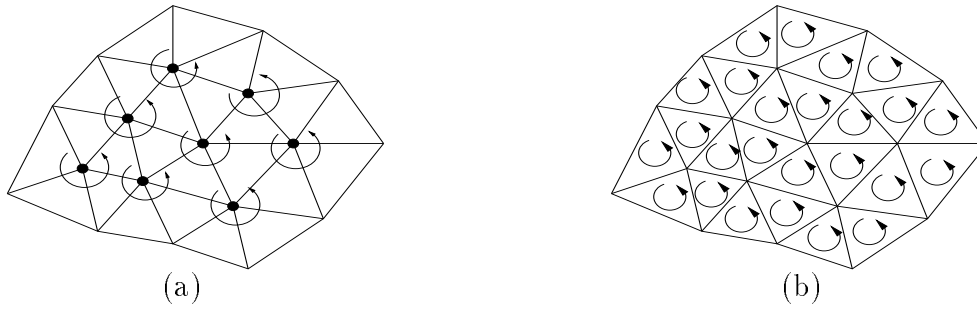


FIG. 5.1 – *Illustration de l'équivalence entre surface combinatoire triangulée fermée et 2-variété combinatoire sans bord triangulée : (a) vision « sommet » de l'adjacence entre voisins dans le cas de surface combinatoire triangulée fermée et orientation cohérente sur les listes de sommets voisins ; (b) vision « triangle » de l'adjacence pour les 2-variétés combinatoires et orientation cohérente des boucles.*

3. pour tout $U \in S$, l'ensemble $\oplus(U)$ contient au moins trois éléments.

Les éléments de S sont les *sommets* de Σ . Les paires $\{U, V\}$ telles que $U \oplus V$ sont les *arêtes* de Σ . On notera Σ_0 l'ensemble des sommets de Σ ($\Sigma_0 = S$), Σ_1 l'ensemble des arêtes (distinctes) de Σ , et Σ_2 l'ensemble des faces (distinctes) de Σ .

La relation binaire \oplus traduit la notion de « est voisin de ». L'ensemble $\oplus(U)$ est appelé le *voisinage de U*. Ses éléments sont les *voisins de U*. Une surface combinatoire triangulée fermée est un objet combinatoire (Définition A.21).

Une face de Σ est un triplet de sommets $\{U, V, W\}$ qui vérifie $U \oplus V$, $U \oplus W$ et $V \oplus W$. Attention, la réciproque est fautive (on peut trouver des triplets de sommets qui ont cette propriété mais qui ne sont pas des faces de Σ).

Une surface combinatoire triangulée fermée est une représentation équivalente à une 2-variété combinatoire, si elle est sans bord et triangulée, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.2 Toute surface combinatoire triangulée fermée définit de façon unique une 2-variété combinatoire sans bord triangulée (Définition A.25). La réciproque est vraie (la Figure 5.1 fournit une illustration intuitive de ce fait).

Preuve : L'ensemble S et la relation \oplus définissent un graphe fini G . L'ensemble des faces de Σ détermine exactement un ensemble de boucles de longueur 3 sur G . La relation \oplus définit de plus une ombrelle autour de chacun des sommets. Le fait que chaque arc soit adjacent à exactement deux faces provient de l'hypothèse que les sommets de la permutation circulaire sont distincts deux à deux. \square

D'un point de vue informatique, on peut donc modéliser une surface combinatoire à l'aide de l'ensemble de ses sommets et, pour chacun des sommets, la liste circulaire de ses sommets voisins.

On ne s'intéresse qu'aux surfaces que l'on peut plonger dans \mathbb{R}^3 : d'après le Théorème A.33 et le Théorème A.34, elles sont orientables. Notre modèle ne représentera donc

que des surfaces orientables. Pour ce faire, on associe une orientation à notre modèle combinatoire en orientant de manière cohérente la liste circulaire des voisins pour chaque sommet (voir Figure 5.1a). De même, on impose une orientation cohérente entre les différentes composantes connexes de Σ (voir Définition A.7). Cette orientation définira implicitement un intérieur et un extérieur à la surface Σ lorsqu'elle sera plongée dans \mathbb{R}^3 .

Puisqu'une surface combinatoire triangulée fermée Σ est un objet combinatoire, toute application f de Σ_0 dans \mathbb{R}^3 est une géométrie dans \mathbb{R}^3 de Σ (voir Section A.1.4). Cette géométrie définit donc un f -complexe de Σ dans \mathbb{R}^3 , noté $\overline{\Sigma^f}$.

Du fait de la géométrie *a priori* arbitraire imposée par f à la surface combinatoire, le complexe $\overline{\Sigma^f}$ n'est pas une triangulation (donc un complexe simplicial) dans le cas général. D'après la Proposition A.24, ce complexe est une triangulation lorsque ses éléments sont deux à deux disjoints.

La proposition suivante est fondamentale pour déterminer la « topologie intrinsèque » modélisée par une surface combinatoire.

Proposition 5.3 La surface combinatoire Σ est sans auto-intersection dans \mathbb{R}^3 par f si et seulement si le corps du f -complexe de Σ est homéomorphe au corps des complexes canoniques associés à Σ (voir Définition A.26). En particulier, il est homéomorphe à une surface fermée. C'est une 2-variété sans bord dans \mathbb{R}^3 .

Preuve : La réciproque est évidente. Montrons l'implication. Soit $S = (S_1, \dots, S_n)$ l'ensemble des n sommets de Σ . Soit K un complexe canonique associé à Σ par une application g de S dans \mathbb{R}^n qui associe à S_i le i -ème vecteur de base de \mathbb{R}^n . On se place sur un sommet S_i de voisins $(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k})$ ordonnés tels que $S_{i_j} \circledast S_{i_{j+1 \bmod k}}$. Soit h_{i_j} l'application du triangle ouvert $T_{i_j}^g = g(S_i)g(S_{i_j})g(S_{i_{j+1 \bmod k}})$ sur le triangle ouvert $T_{i_j}^f = f(S_i)f(S_{i_j})f(S_{i_{j+1 \bmod k}})$ qui, à un point x de $T_{i_j}^g$ associe le point y de $T_{i_j}^f$ qui a les mêmes coordonnées barycentriques dans le triangle $T_{i_j}^f$ que x dans le triangle $T_{i_j}^g$. L'application h_{i_j} est clairement un homéomorphisme.

Par définition, les triangles $T_{i_j}^g$ de \mathbb{R}^n sont deux à deux disjoints, et par hypothèse, les triangles $T_{i_j}^f$ de \mathbb{R}^3 sont aussi deux à deux disjoints. On note P_i^g l'adhérence de l'union des triangles $T_{i_j}^g$ (pour $j = 1 \dots k$), des segments ouverts entre les sommets $g(S_i)$ et $g(S_{i_j})$, et le point $g(S_i)$, réduite par une homothétie de centre $g(S_i)$ et de coefficient $2/3$ (ce coefficient est choisi pour que l'on obtienne un recouvrement de toute la surface). On définit similairement l'ensemble P_i^f .

On définit l'application h_i de P_i^g dans P_i^f par cas :

- si x appartient à un triangle $T_{i_j}^g$, alors $h_i = h_{i_j}(x)$;
- si x appartient à un segment ouvert entre $g(S_i)$ et $g(S_{i_j})$, on associe le point entre $f(S_i)$ et $f(S_{i_j})$ qui a les mêmes coordonnées barycentriques;
- si $x = g(S_i)$, alors $h_i(x) = f(S_i)$.

On peut vérifier que h_i est continue et bijective. La réciproque h_i^{-1} est aussi continue.

Comme K est une triangulation, si $i \neq i'$, $P_i^g \cap P_{i'}^g \neq \emptyset \Rightarrow S_i \otimes S_{i'}$. Dans ce cas, l'ensemble $P_i^g \cap P_{i'}^g$ est une sous-partie fermée de l'union du segment ouvert entre $f(S_i)$ et $f(S_{i'})$ et des deux triangles qui le bordent. Comme $\overline{\Sigma^f}$ est aussi une triangulation, on peut vérifier que $P_i^g \cap P_{i'}^g \neq \emptyset \Leftrightarrow P_i^f \cap P_{i'}^f \neq \emptyset$. Sur cette intersection, on peut vérifier que h_i et $h_{i'}$ coïncident, et aussi que h_i^{-1} et $h_{i'}^{-1}$ coïncident. On a aussi que h_i et $h_{i'}$ sont bijectives de $P_i^g \cap P_{i'}^g$ sur $P_i^f \cap P_{i'}^f$.

En conséquence, le lemme de recollement nous permet de définir une application h continue à partir du recouvrement fermé fini $(P_i^g)_{1 \leq i \leq n}$. Il nous permet aussi de définir une application h^{-1} continue à partir du recouvrement fermé fini $(P_i^f)_{1 \leq i \leq n}$. La bijectivité provient du fait que cette application est bijective sur chacune de ses parties.

On a montré que le f -complexe $\overline{\Sigma^f}$ est homéomorphe à un complexe canonique arbitraire de Σ . Par la Proposition A.28, $\overline{\Sigma^f}$ est homéomorphe à une surface fermée et est une 2-variété dans \mathbb{R}^3 sans bord. \square

Cette proposition nous permet d'affirmer que la relation \otimes d'une surface combinatoire triangulée fermée représente combinatorialement une surface fermée dans \mathbb{R}^n (i.e., chaque composante connexe représente une sphère à plusieurs anses). Lorsque l'on impose une géométrie à la surface combinatoire, si la surface est plongée dans l'espace euclidien de dimension 3, alors elle a la même « topologie » que celle définie de manière purement combinatoire. Cela implique que la géométrie influe sur la topologie réellement représentée dans l'espace. Comme nous recherchons une forme avec une certaine géométrie, cette proposition nous fournit un moyen pour détecter le moment et l'endroit précis où la géométrie des sommets ne peut plus convenir à la topologie courante du modèle.

Les déplacements géométriques des sommets dans l'espace \mathbb{R}^3 modifient la géométrie f au cours du temps. Cependant, si l'on n'y prend pas garde, ces déformations risquent de faire se croiser des morceaux de surfaces. L'application f ne serait alors plus bijective et Σ ne serait plus plongée dans \mathbb{R}^3 par f . Deux alternatives sont alors possibles :

1. empêcher que des parties de surfaces ne se rencontrent de manière géométrique ;
2. transformer la topologie de la surface autour des zones de « future collision géométrique ». Cela revient donc à modifier la combinatoire de Σ .

La première solution résout bien le problème demandé. En revanche, les déformations du modèle sont contraintes par sa topologie initiale. Cela est en contradiction avec le point (1) recherché pour le modèle générique.

La deuxième solution répond aussi au problème mais introduit de nouvelles contraintes : la relation \otimes devient une fonction du temps. De même, le modèle subissant de grandes déformations, il est préférable de rendre l'ensemble des sommets S aussi fonction du temps.

Un double problème se pose alors. D'une part, comment détecter les zones où il est nécessaire de modifier la topologie de Σ . D'autre part, comment transformer Σ_0 et \otimes pour que la surface résultante puisse être plongée dans \mathbb{R}^3 .

La Section 5.3.2 décrit comment détecter les zones de « collision » à l'aide de contraintes géométriques. La Section 5.3.3 traduit une partie de ces contraintes sous forme de transformations topologiques dites *Euleriennes*. La Section 5.3.4 montre les transformations topologiques dites *non-Euleriennes* à mettre en œuvre dans les autres cas.

5.3.2 Contraintes géométriques

Afin de détecter simplement les zones de « collision » ou d'auto-intersection, Bainville [7] a introduit dans son modèle des δ -snakes un invariant géométrique qui fournit la distance minimale et maximale entre deux sommets voisins, et la distance minimale entre deux sommets non voisins. Cet invariant autorise la détection de collisions par simple test de distance. Bainville a résolu ainsi les problèmes de collisions pour des contours bidimensionnels. Il a pressenti que ces contraintes géométriques pouvaient servir à détecter et résoudre les problèmes topologiques dans les zones de « collisions » dans le cas tridimensionnel.

Poursuivant son idée, nous introduisons un invariant géométrique δ , global à la surface triangulée. On note $\mathbf{u} = f(U)$, $\mathbf{v} = f(V)$. Nous dirons qu'une géométrie f de Σ est une δ -géométrie de Σ si les trois contraintes géométriques suivantes sont respectées par f , pour $\zeta > 2$, $\lambda > 0$ et $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne :

$$\forall (U, V) \in \Sigma_0^2 / U \oplus V, \delta < \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (5.1)$$

$$\forall (U, V) \in \Sigma_0^2 / U \oplus V, \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \zeta \delta \quad (5.2)$$

$$\forall (U, V) \in \Sigma_0^2 / U \not\oplus V, \lambda \zeta \delta < \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (5.3)$$

Intuitivement, on peut facilement interpréter le comportement de ces contraintes vis-à-vis de la géométrie des sommets. Les contraintes (5.1) et (5.2) expriment respectivement les longueurs minimale et maximale d'une arête de la maille. En particulier, la maille est assez régulière. Le terme δ représente la longueur minimale et traduit directement son degré d'échantillonnage. Le terme ζ définit la proportion entre la longueur maximale et la longueur minimale. On impose un coefficient ζ supérieur à 2 pour que l'opérateur de fusion T_0^f (fusion entre deux sommets trop éloignés, voir Section 5.3.3) puisse être utilisé. La contrainte (5.3) exprime la distance minimale entre deux morceaux localement non connexes par arcs de la surface. Le terme λ définit le critère de distance proportionnellement à la longueur maximale d'arête. Grâce à la régularité de la maille, un simple test de distance entre sommets non connexes permet de déterminer une éventuelle collision entre deux morceaux de surfaces non connexes.

On a la propriété suivante, qui justifie le choix de ces contraintes géométriques :

Proposition 5.4 Si f est une δ -géométrie d'une surface combinatoire triangulée fermée Σ , avec $\zeta > 2$ et $\lambda > \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\zeta})^2 + \frac{3}{4}}$, alors Σ est plongée dans \mathbb{R}^3 par f . La géométrie f est alors appelée un δ -plongement de Σ .

Preuve : D'après la Proposition A.24, il suffit de montrer que deux éléments arbitraires du f -complexe $\overline{\Sigma^f}$ sont disjoints. La contrainte (5.1) implique que les sommets sont deux à deux disjoints. Soit UVW un triangle (ouvert) du f -complexe. Soit W' un point du f -complexe. Montrons que W' n'appartient pas au triangle UVW .

On reprend les notations de la Figure 5.2. Dans un premier temps, on suppose que W' est voisin de U et de V (par exemple). D'après la figure, le point W' ne peut entrer dans

les cercles (sphères) $C1$ (W non-voisin), $C2$ (U voisin) et $C3$ (V voisin). Le point I doit rester en dehors du triangle. Pour trouver la contrainte minimale sur le point I , on peut prendre un triangle d'arêtes maximales (donc $\|U - V\| = \|V - W\| = \|U - W\| = \zeta\delta$). Dans ce cas, cette contrainte s'exprime sous la forme $\|I - V\| + \|I - H\| > \frac{\|U - V\|}{2}$. On obtient facilement $\lambda > \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\zeta})^2 + \frac{3}{4}}$. On déduit similairement que les segments UV , VW' et $W'U$, et la face UVW' ont une intersection vide avec le triangle ouvert UVW , et avec les segments VW et UW .

Dans un deuxième temps, on peut supposer que W' n'est voisin que d'un seul sommet (mettons U). La démonstration précédente reste valable.

Dans un dernier temps, W' n'est voisin d'aucun des sommets U , V et W . Il est facile de montrer que la contrainte sur λ implique que les trois boules de centre U , V et W , et de rayon $\lambda\zeta\delta$, englobent complètement le triangle fermé \overline{UVW} . W' ne peut donc appartenir à UVW ni à aucune de ses arêtes. Il faut enfin vérifier que deux sommets voisins W' et W'' , non-voisins de U , V ou W , ont une arête qui n'intersecte pas le triangle UVW . Le cas limite est réalisé lorsque W' et W'' sont de part et d'autre du triangle UVW d'arêtes maximales, l'un au-dessus du centre de gravité de UVW et l'autre en-dessous. Dans cette configuration, on obtient aisément que la distance minimale entre W et W' est supérieure à $\sqrt{\frac{5}{3}}\zeta\delta$. D'après (5.2), W et W' ne peuvent être voisins. On pourrait montrer similairement que UVW ne peut pas intersecter un autre triangle $U'V'W'$ de sommets non voisins des précédents. \square

A priori, les contraintes (5.1) et (5.2) ne font que maintenir la régularité d'échantillonnage du maillage. Ces contraintes imposent des transformations topologiques à la surface Σ , afin que ces contraintes soient respectées au cours des déplacements des sommets. Lorsque la contrainte (5.1) n'est plus respectée entre deux sommets, on peut fusionner les deux sommets en un seul. Lorsque la contrainte (5.2) n'est plus respectée entre deux sommets, on peut créer un sommet entre eux. Ces transformations topologiques sont dites *Euleriennes* car elles ne modifient pas la topologie globale de la surface. Le plongement de la surface résultante Σ' est en effet homéomorphe au plongement de Σ . On dira que Σ' est *semblable* à Σ (cf. Définition A.29). La Section 5.3.3 décrit ces transformations Euleriennes. Les autres transformations, dites *non-Euleriennes*, modifient la topologie de Σ de manière à ce que la surface résultante Σ' ne lui soit plus semblable. Elles sont décrites dans la Section 5.3.4. Ainsi, si une δ -géométrie est un moyen puissant pour plonger une surface combinatoire dans l'espace à 3 dimensions, son évolution au cours du temps impose des transformations topologiques.

Dans la suite, on choisit $\zeta = 2,5$ et une valeur λ adéquate (0,9 par exemple) pour que toute δ -géométrie f soit un δ -plongement. Si on suppose que la géométrie f varie continûment dans le temps et que l'opération d'inversion (voir Section 5.3.3) est utilisée pour régulariser les triangles (cf. Table 5.1), il est suffisant de choisir $\lambda > \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$ pour que f reste un plongement de Σ .

Enfin, les opérations topologiques que l'on va définir ont pour but de modifier la topologie du modèle pour qu'elle corresponde au mieux à la δ -géométrie f associée. Formellement, il faudrait associer une nouvelle δ -géométrie f' pour la surface $\Sigma' = T(\Sigma)$. La géométrie f' est construite à partir de f de manière implicite: pour les sommets inchangés par T , $f' = f$;

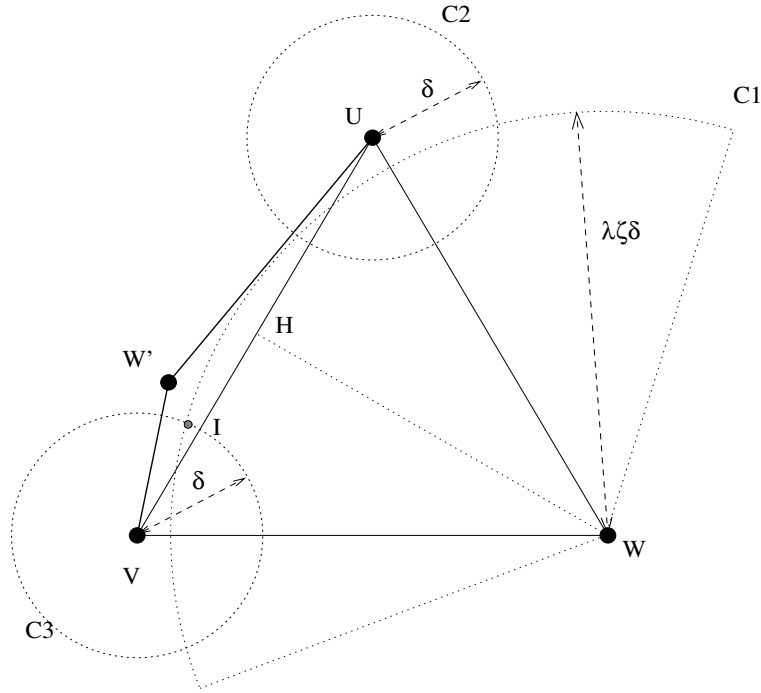


FIG. 5.2 – Contraintes géométriques pour garantir le plongement d’une surface combinatoire triangulée fermée. Le triangle UVW représente une facette de la surface. Le sommet W' est un voisin de U et V . Le cercle $C1$ représente la distance minimale entre le sommet W et un sommet qui ne lui est pas voisin (par exemple W'). Le cercle $C2$ (resp. $C3$) représente la distance minimale entre le sommet U (resp. V) et un sommet voisin (ici W'). Le point H est le milieu de U et V . Le point I est l’intersection de $C1$ et $C3$. Le point W' est contraint à rester en dehors des cercles $C1$, $C2$ et $C3$. En conséquence, si I (ou son symétrique) est à l’extérieur du triangle UVW , alors W' ne peut appartenir au triangle UVW .

pour les sommets créés par T , f' est l’interpolation des sommets voisins inchangés ; les sommets supprimés par T n’appartiennent pas au domaine de f' . On effectue des opérations topologiques tant que f' n’est pas une δ -géométrie. Dès que f' est une δ -géométrie, la surface transformée Σ' est plongée dans \mathbb{R}^3 par f' (Proposition 5.4).

5.3.3 Transformations topologiques Euleriennes

On va définir un ensemble d’opérateurs topologiques sur les surfaces triangulées. Ces opérateurs prennent en paramètres la surface triangulée ainsi que le lieu de l’opération. Ils renvoient une surface triangulée vérifiant la Définition 5.1. La géométrie induite sur cette surface sera une δ -géométrie. Ces opérateurs ne seront pas décrits formellement, étant donnée leur simplicité. En revanche, une illustration est donnée pour expliciter leur effet sur une maille.

Le non-respect de la contrainte (5.2) peut induire deux transformations topologiques Euleriennes : l’opération de *création* d’un sommet intermédiaire T_0^c et l’opération d’*inversion* des liens de voisinage T_0^i (voir Figure 5.3a). Le choix de la constante numérique $\zeta = 2,5$ permet de garantir que la surface transformée $T_0^c(U, V, \Sigma)$ respectera la contrainte (5.1) après

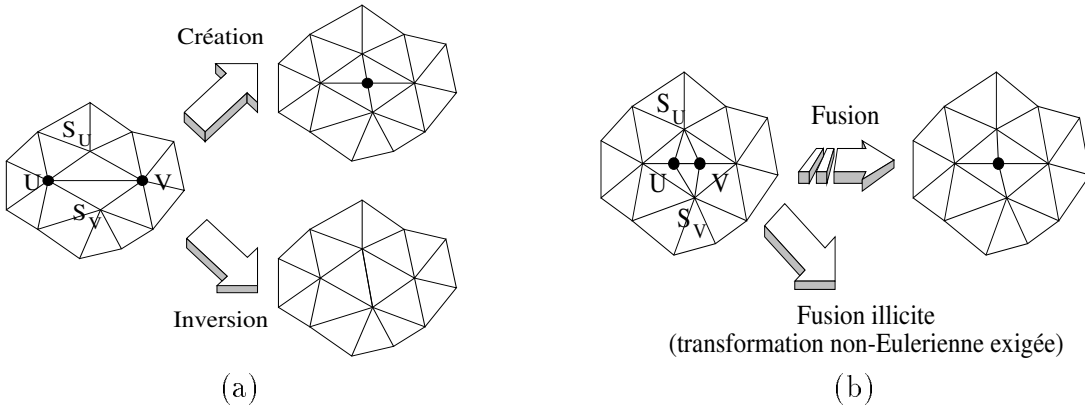


FIG. 5.3 – (a) Création T_0^c ou inversion T_0^i si U et V sont trop distants ; (b) fusion T_0^f ou transformation non-Eulerienne obligatoire dans le cas où U et V sont trop près l'un de l'autre.

la création d'un sommet intermédiaire.

En réalité, la violation de la contrainte (5.1) n'implique pas nécessairement une transformation topologique Eulerienne. Dans la plupart des cas, on peut certes fusionner les deux sommets U et V trop proches par une *fusion* T_0^f (voir Figure 5.3b). Dans certains cas, cela n'est plus possible. Par exemple, si la surface Σ est un simple tétraèdre, l'ensemble $T_0^f(U, V, \Sigma)$ ne peut plus être plongée dans \mathbb{R}^3 par f (ce sont deux triangles collés l'un à l'autre qui ne peuvent être le bord d'une 3-variété dans \mathbb{R}^3). Il faut donc différencier certains cas. La Figure 5.4 décrit les différents cas à prendre en compte pour effectuer correctement la fusion de deux sommets.

Il apparaît trois cas majeurs : la fusion simple des deux sommets (opérateur T_0^f), la suppression pure et simple d'un tétraèdre (opérateur T_{-2}^0), et un problème d'*étranglement* ou de *fusion illicite* (opérateur T_{+2}). Le rôle et la formulation de ces deux opérateurs non-Euleriens seront décrits dans la section suivante.

On peut vérifier très facilement que les opérateurs Euleriens T_0^c , T_0^i et T_0^f ne modifient pas la caractéristique d'Euler¹ de la surface triangulée Σ (voir l'Annexe A et plus particulièrement la Section A.3.2). La surface résultante est donc semblable à Σ . Ces opérateurs Euleriens ont été souvent utilisés pour simplifier ou raffiner des surfaces en synthèse d'images [58], ou en conception assistée par ordinateur [141].

La Table 5.1 résume quelles opérations topologiques sont effectuées en fonction des contraintes géométriques imposées au modèle. A noter que les opérations d'inversion ne sont pas indispensables au respect des contraintes (5.1) et (5.2). Elles permettent seulement de maintenir une triangulation plus régulière.

5.3.4 Transformations topologiques non-Euleriennes

Classification

On appellera ici « rupture de topologie » une opération T sur une surface Σ telle que $T(\Sigma)$ n'est pas semblable à Σ . On suppose que notre modèle déformable fait évoluer l'ensemble

1. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ils sont appelés opérateurs Euleriens.


```

Procédure FusionneDeuxSommets ( & Maille  $\Sigma$ ,
                                     & Sommet  $U$ ,
                                     & Sommet  $V$  )
  si  $n(U) == 3$  et  $n(V) == 3$  alors
    |  $U, V, S_U$  et  $S_V$  forment un tétraèdre
    | que l'on supprime avec  $T_{-2}^\emptyset(U, V, \Sigma)$ 
  sinon
    | si  $n(S_U) == 3$  alors
    | | Le Sommet  $S_U$  est supprimé dans  $\Sigma$ .
    | fin si
    | si  $n(S_V) == 3$  et  $n(S_U) > 3$  alors
    | | Le Sommet  $S_V$  est supprimé dans  $\Sigma$ .
    | fin si
    | /* On peut maintenant déterminer si la fusion de  $U$  et  $V$  */
    | /* est Eulerienne ou non */
    | si  $\text{Card}(\oplus(U) \cap \oplus(V)) == 2$  alors
    | | /* On peut effectuer une fusion Eulerienne */
    | | Les Sommetts  $U$  et  $V$  sont fusionnés par  $T_0^f(U, V, \Sigma)$ 
    | sinon
    | | /* Etranglement au niveau des sommets  $U$  et  $V$  */
    | | Etranglement au niveau de  $U$  et  $V$  résolu par  $T_{+2}(U, V, \Sigma)$ 
    | fin si
  fin si
fin

```

FIG. 5.4 – Algorithme de fusion de deux sommets trop proches. Certains cas particuliers doivent être pris en compte.

de ses sommets de façon continue par rapport au temps (i.e., si on réduit le pas de temps, le déplacement des sommets est réduit proportionnellement). Cette hypothèse est cohérente vis-à-vis des lois de la dynamique Lagrangienne. De plus, nous nous restreignons au cas où les déformations amènent la surface à s'auto-intersecter en des points isolés, appelés *singularités* (voir Annexe B). Cela n'est pas trop restrictif dans la mesure où notre modèle est discrétisé dans l'espace et dans le temps.

Les singularités ou « accidents » peuvent être classés de la manière suivante (voir Annexe B) :

1. La singularité est ponctuelle (i.e., provient d'une partie connexe contractile du plongement de Σ). Du point de vue discret (ou combinatoire), ce sont deux sommets U et V de Σ , tel que $U \oplus V$, qui sont amenés l'un sur l'autre. Une simple opération de *fusion* entre sommets de la surface élimine la singularité.
2. La singularité est annulaire (i.e., provient d'une partie connexe du plongement de Σ , de

| | $\delta \leq d' < 2.0 \delta$ $n(U) > 3$ et $n(V) > 3$ | $\delta \leq d' < 2.0 \delta$ $n(U) = 3$ ou $n(V) = 3$ | $2.0 \delta < d'$ $n(U) > 3$ et $n(V) > 3$ | $2.0 \delta < d'$ $n(U) = 3$ ou $n(V) = 3$ |
|---------------------------------|--|--|--|--|
| $d < \delta$ | FUSION | FUSION | FUSION | FUSION |
| $\delta \leq d \leq 2.5 \delta$ | INVERSION(*) | — | INVERSION(*) | — |
| $2.5 \delta < d$ | INVERSION | CREATION | CREATION | CREATION |

(*) INVERSION seulement si $d > 1.6d'$.

TAB. 5.1 – Table de décision pour appliquer les opérateurs Euleriens de fusion T_0^f , de création T_0^c et d'inversion T_0^i de manière cohérente. Ici, U et V sont deux sommets de Σ tels que $U \otimes V$. Le réel d est la distance euclidienne qui les sépare lorsqu'ils sont plongés dans \mathbb{R}^3 . Le réel d' est la distance euclidienne qui sépare leurs deux voisins communs (autour de l'arête UV). δ est l'invariant géométrique associé à la surface triangulée. Attention, le terme « FUSION » signifie ici un appel à la procédure FusionneDeuxSommets(U, V) (cf. Figure 5.4).

même type d'homotopie que le cercle unité). Sur le plan discret, ce sont trois sommets U, V et W , tels que $U \otimes V, U \otimes W, V \otimes W$ mais UVW ne forme pas une face de Σ (voir Figure 5.5). Géométriquement, la surface forme un tuyau qui se resserre de plus en plus en un point. Ces singularités seront appelées *accidents annulaires*, car on peut tracer intuitivement un plan suivant lequel les sommets forment un anneau de plus en plus petit qui se réduit à un point.

- La singularité est sphérique (i.e., provient d'une partie connexe du plongement de Σ , de même type d'homotopie que la sphère unité). Sur le plan discret, ce sont quatre sommets U, V, W et X , voisins deux à deux (ils forment nécessairement un tétraèdre), qui s'effondrent en un point. Géométriquement, la surface forme une petite sphère qui diminue jusqu'à un point. Ces singularités seront appelées *dégénérescences* ou *accidents sphériques*, et correspondent à la disparition d'une composante connexe de Σ .
- La singularité est non-connexe (i.e., provient de deux parties contractiles mais non connexes du plongement de Σ). D'un point de vue discret, deux sommets U et V de Σ , localement non connectés, sont amenés à occuper géométriquement le même lieu. En théorie, il pourrait y avoir un nombre fini quelconque de sommets amenés en un seul lieu. Comme le problème est discrétisé par le modèle, on suppose que les événements n'arrivent pas exactement en même temps et on les résout les uns après les autres, deux par deux. On appellera ces singularités des *accidents axiaux*, car on peut tracer intuitivement un axe entre ces deux sommets sur lequel ils se rapprochent l'un de l'autre.
- Les autres cas peuvent être simulés par une série d'événements proches mais distincts. Cette approximation est valable car notre modèle est discret dans le temps et dans l'espace. Par exemple, si la singularité provient d'une partie homotope à une double chaîne, on suppose que la singularité provient d'abord d'une des chaînes (résolue par le cas 2) puis de l'autre (résolue aussi par le cas 2). De même lorsqu'il y a plusieurs parties non connexes.

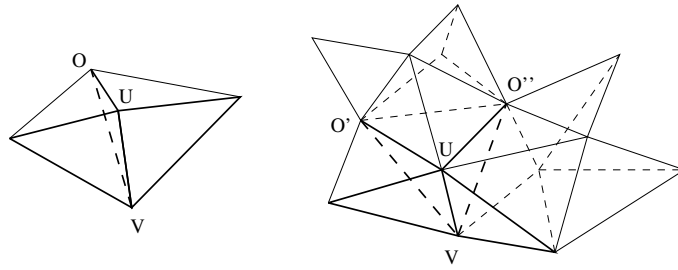


FIG. 5.5 – Deux exemples de surfaces triangulées possédant des sommets U , V et O tels que $U \otimes V$, $U \otimes O$, $V \otimes O$ mais où UVO ne forme pas une face de la surface.

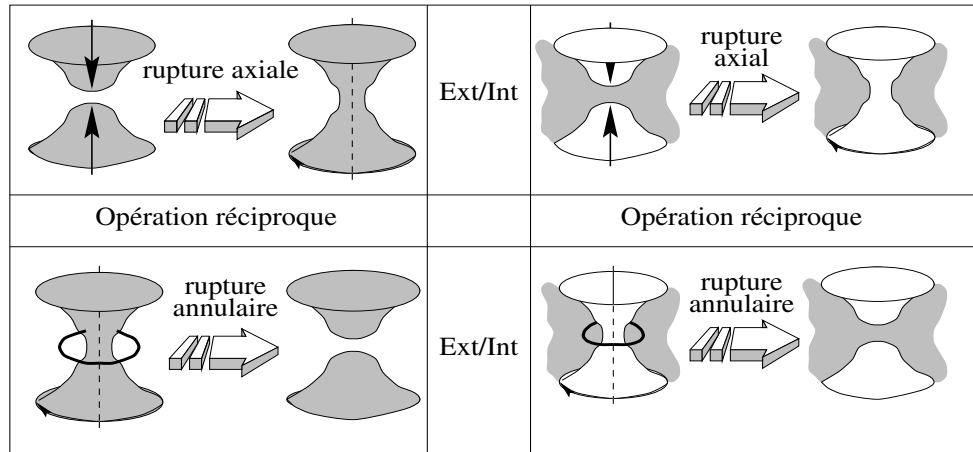


FIG. 5.6 – Description des quatre ruptures de topologie essentielles d'une surface fermée et orientée dans \mathbb{R}^3 . Deux des quatre ruptures ne correspondent qu'à une inversion de la convention intérieur et extérieur et n'exigent pas de traitements spécifiques.

La Figure 5.6 décrit de manière schématique ces singularités (à part la singularité sphérique). Les déformations *attendues* de la surface sont aussi montrées. Ces opérations topologiques sont cohérentes avec les contraintes topologiques du modèle (fermeture, orientation) et avec les contraintes géométriques (le modèle doit approcher au mieux une forme d'après la géométrie de ses points). L'Annexe C fournit une justification analytique des transformations topologiques proposées. Elles correspondent au passage d'une topologie localement similaire à la topologie d'un hyperboloïde à deux nappes vers une topologie localement similaire à la topologie d'un hyperboloïde à une nappe (et réciproquement).

On peut aussi rajouter une singularité simulant l'apparition d'une petite surface, donc d'une nouvelle composante connexe. Cette opération topologique, notée T_{+2}^\bullet , est dirigée par l'utilisateur.

Variations de la caractéristique d'Euler des ruptures de topologie

On peut décrire les ruptures de topologie à l'aide des opérateurs topologiques définis par Griffiths [52]. Ces opérateurs sont assez intuitifs et suffisamment puissants pour calculer les

variations de la caractéristique d'Euler des surfaces.

Rupture axiale : Elle se produit lors de la collision de deux morceaux de surface localement non connectés. L'opération topologique associée, appelée *rupture axiale* et notée T_{-2} , peut être décomposée en les opérations élémentaires suivantes :

1. Un petit élément de surface est découpé sur chacun des morceaux, ce qui définit deux contours C_1 et C_2 .
2. Un pont est créé entre les deux contours ce qui les fusionne en un seul contour C . Le pont créé est disposé de manière à ne pas rendre la surface inorientable.
3. Le contour C est rempli par un couvercle, ce qui referme la surface.

Cette opération peut soit créer une nouvelle *anse* à la surface, soit fusionner deux composantes en une seule. La surface obtenue a une caractéristique d'Euler : $\chi(T_{-2}(\Sigma)) = \chi(\Sigma) - 2$.

Rupture annulaire : C'est l'opération réciproque de la précédente. La surface s'est rétrécie en un mince « tuyau ». L'opération topologique associée, appelée *rupture annulaire* et notée T_{+2} , peut être décomposée en les opérations élémentaires symétriques de la précédente.

Cette opération peut soit supprimer une *anse* de la surface, soit diviser la surface en deux composantes connexes. La surface obtenue a une caractéristique d'Euler : $\chi(T_{+2}(\Sigma)) = \chi(\Sigma) + 2$.

Détection et implémentation algorithmique

Un accident axial se produit lorsque deux parties de la surface, localement non connectées, s'interpénètrent. La contrainte géométrique (5.3) semble donc parfaitement adaptée à la détection de ces accidents.

En fait, cette contrainte peut aussi révéler des accidents annulaires comme le montre la Figure 5.7. Cela provient du fait que les parties de la surface doivent être non connectées. Soient U et V deux sommets de Σ tels que $U \not\cong V$. Un petit voisinage autour du sommet U contient toujours ses voisins. De même pour un voisinage de V . L'intersection de ces deux voisinages peut être non vide ce qui contredit l'hypothèse d'accident axial.

Soit k le nombre de groupes de voisins communs à U et V (qui correspond au nombre de composantes connexes de l'intersection de leur plus petit voisinage). On appelle k l'*ordre de l'accident axial* (voir Figure 5.7).

En pratique, il est virtuellement impossible de trouver une opération topologique non-Eulerienne pour chacun des k . Il est d'autre part très difficile d'inférer la forme attendue d'une telle « collision ». Pour s'affranchir de ce problème, l'idée consiste à *créer un voisinage intermédiaire autour de U et V pour réduire systématiquement l'ordre de l'accident axial à 0*.

La Figure 5.8 montre les deux étapes de résolution des accidents axiaux. Un voisinage plus petit est créé autour des sommets U et V . On est sûr que les deux voisinages induits autour de U et V ne sont pas connectés. On est bien dans le cas d'un accident axial et

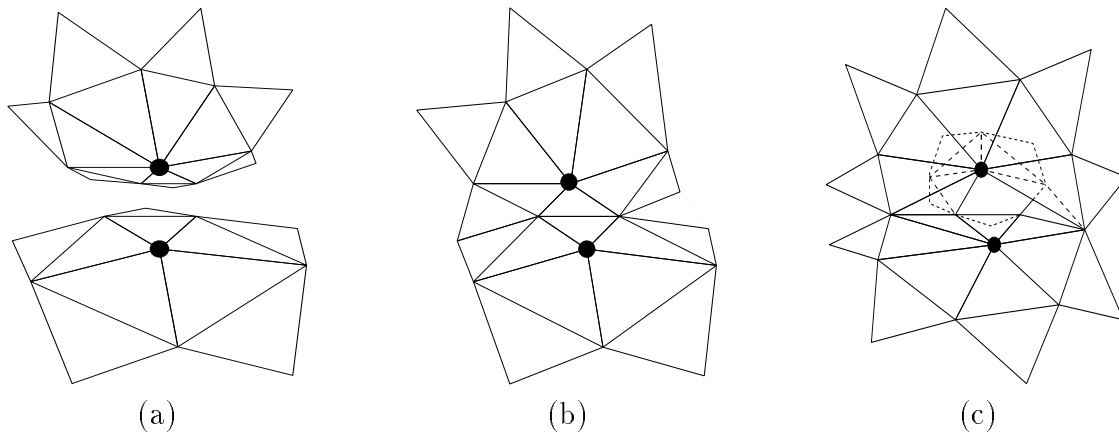


FIG. 5.7 – Ces figures montrent plusieurs exemples où la contrainte géométrique (5.3) n'est plus respectée entre deux sommets non voisins. On voit qu'elle peut révéler des accidents annulaires. (a) Accident axial d'ordre 0; (b) accident axial d'ordre 1; (c) accident axial d'ordre 2.

l'opération T_{-2} peut être effectuée par une triangulation entre les points intermédiaires, suivie de la suppression des sommets U et V et de leurs arêtes incidentes.

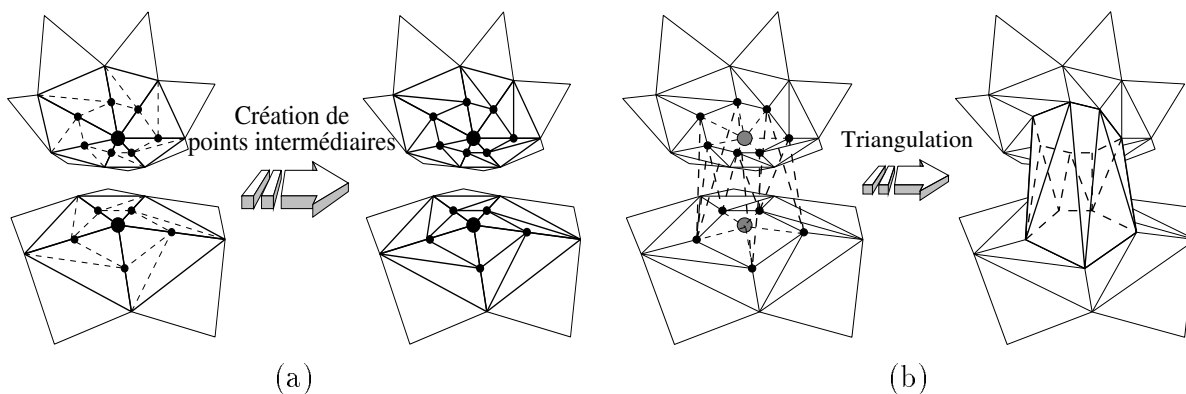


FIG. 5.8 – Résolution des accidents axiaux: (a) création de points intermédiaires autour des sommets problématiques et leurs voisins; (b) la rupture axiale est dorénavant d'ordre 0, on triangule entre les sommets intermédiaires créés.

La réduction de la singularité à un accident axial d'ordre 0 ne fait que déplacer le problème des accidents annulaires. La conséquence intéressante de cette réduction est que les ruptures annulaires sont alors détectées de manière unique lors des opérations de fusion de sommets voisins. La procédure de fusion de deux sommets voisins (Figure 5.4) montre comment détecter ces accidents annulaires par simple test de voisinage.

Pour résoudre les accidents annulaires, l'opération T_{+2} est construite comme suit. On sait que U et V possèdent au moins 3 sommets communs. Notons O un sommet voisin de U et V tel que OUV n'est pas une face de Σ (voir Figure 5.5). Le triplet OUV peut être vu comme un contour sur Σ se resserrant en un point. On découpe donc Σ le long de ce contour, ce qui crée deux bords. On sépare les deux morceaux, que l'on ferme avec un couvercle. On peut alors fusionner effectivement les deux paires de sommets voisins (U_1, V_1) et (U_2, V_2)

(voir Figure 5.9), qui ne respectaient pas la contrainte (5.1).

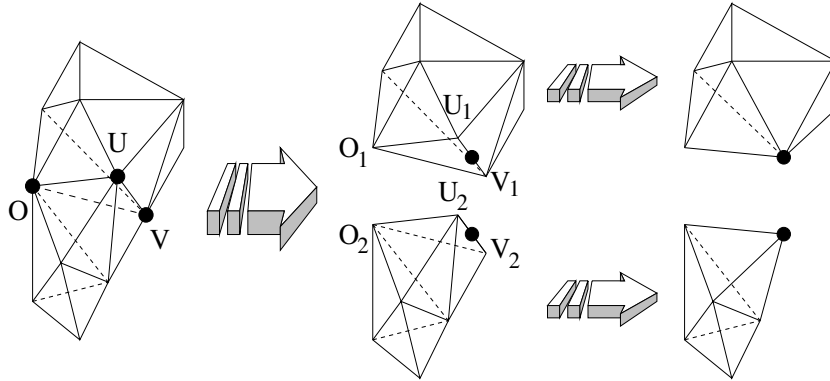


FIG. 5.9 – Résolution des accidents annulaires : on découpe en deux la surface au niveau de la face « virtuelle » OUV , on referme les deux contours avec un couvercle, puis on fusionne éventuellement les sommets trop proches.

Il est aisé de vérifier que nos opérations non-Euleriennes T_{+2} et T_{-2} modifient la caractéristique d'Euler similairement à la Section 5.3.4, ce qui justifie les notations employées (T_{+2} augmente de 2 la caractéristique χ , T_{-2} la diminue de 2).

La résolution des accidents sphériques se fait par suppression du tétraèdre impliqué. L'apparition de matière construit un icosaèdre.

En résumé, la contrainte (5.1) détecte les opérations de fusion T_0^f , de dégénérescence T_{-2}^\emptyset , et de rupture annulaire T_{+2} . La contrainte (5.2) détecte l'opération de création de sommet T_0^c . La contrainte (5.3) détecte les ruptures axiales T_{-2} . L'algorithme correspondant est présenté dans la Section 5.4.

5.3.5 Raffinement

Une surface combinatoire triangulée fermée est plongée dans \mathbb{R}^3 par toute δ -géométrie sur ses sommets (avec des valeurs de ζ et λ adéquates). Il est donc impossible d'obtenir un raffinement *local* de la surface plus fin que δ sans risquer de perdre cette propriété.

En revanche, on peut effectuer un raffinement *global* de la surface, en diminuant l'invariant δ de manière consistante. On propose donc une transformation Eulerienne, notée $\Delta_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, qui transforme toute surface combinatoire triangulée fermée Σ de δ -géométrie f en une surface combinatoire triangulée fermée Σ' de δ' -géométrie f' , avec $\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$. Cette transformation réduit la longueur d'arête moyenne de Σ d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et augmente le degré d'échantillonnage d'un facteur $\sqrt{3}$. Elle est réalisée en deux passes (voir Figure 5.10) :

1. Dans une première passe, un nouveau sommet est créé au barycentre de chaque face (interpolation linéaire). Le sommet est connecté aux 3 sommets de la face.
2. Dans une deuxième passe, les arêtes de la surface qui n'ont pas été créées lors de la première passe sont inversées. Cela permet d'obtenir un maillage régulier.

Cette transformation est facile à mettre en œuvre vis-à-vis de la structure choisie pour représenter la combinatoire de la surface. En moyenne, elle multiplie par trois le nombre de sommets de la triangulation. Elle permet une modélisation multi-résolution des formes et nous l'utiliserons pour obtenir une approche de l'esquisse aux détails. Doncescu [37] a aussi utilisé cette transformation Eulerienne pour contruire des ondelettes de surface.

D'autres transformations qui construisent un raffinement de la surface auraient pu être utilisées. L'opération la plus employée est celle qui divise chaque triangle en quatre (un nouveau sommet sur chaque arête) [84, 93, 102]. En moyenne, elle multiplie par quatre le nombre de sommets de la triangulation pour un échantillonnage multiplié par deux. En revanche, elle est moins adaptée à la structure choisie (chaque sommet a une liste ordonnée de ses voisins), car elle crée des quadrilatères pendant la division de la surface. Des méthodes plus perfectionnées de raffinement de surfaces existent [14], mais ces méthodes ne s'appliquent pas sur des modèles déformables.

Par ailleurs, on peut choisir une autre fonction d'interpolation pour calculer la position des nouveaux sommets [8].

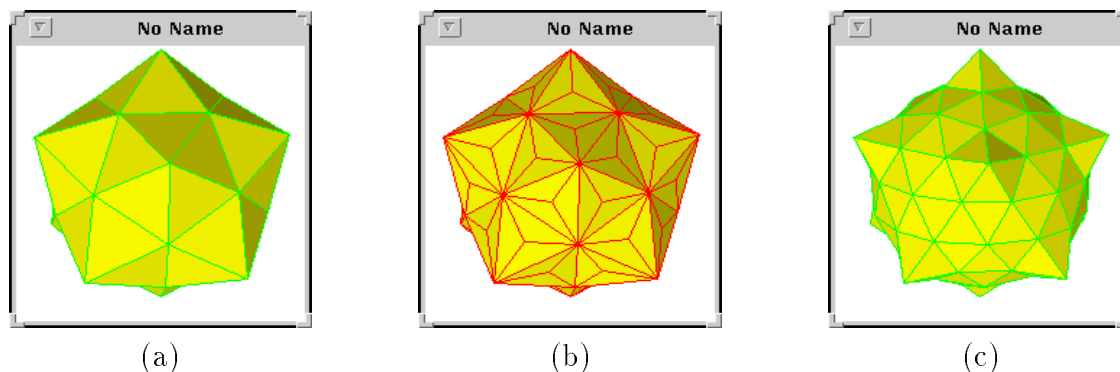


FIG. 5.10 – Opération de raffinement global sur un polyèdre à 60 faces : (a) avant l'opération ; (b) après la première passe ; (c) après la seconde passe.

5.3.6 Autres modèles à topologie adaptative

Notre méthode permet de détecter et de résoudre l'ensemble des transformations que peut subir une surface « hautement déformable ». La δ -géométrie permet de détecter les accidents annulaires de la surface en $O(s)$, si s est le nombre de sommets de la surface, et les accidents axiaux de la surface en $O(s \log s)$ par simple utilisation d'une octree par points. Les opérations de rupture axiale et de rupture annulaire sont applicables en $O(1)$. On peut noter que l'utilisation d'une grille discrète de précision approximative δ peut rabaisser la complexité théorique de la détection des accidents axiaux de la surface à $O(s)$. Ainsi, si notre modèle n'optimise pas le nombre de sommets, il optimise les déformations et transformations de la surface.

Il existe des modèles qui adaptent localement le raffinement de la triangulation en fonction de la courbure [30, 58, 146]. Cependant, si ces représentations sont plus compactes, elles ne permettent pas de gérer de façon homogène l'évolution de la surface (déformations et changements de topologie). Ces modèles peuvent en contrepartie être utilisés en tant que

post-traitement pour obtenir une représentation géométrique plus concise convenant mieux à d'autres applications (visualisation et synthèse d'images notamment).

Modèles hautement déformables

Leitner [72] a été un des premiers à proposer un modèle hautement déformable pour la reconstruction de données présegmentées. Son modèle de surface est basé sur des B-splines. Le modèle déplace les points de contrôle pour coller aux données. Le processus d'adaptation de la forme aux données est original. En effet, dans un premier temps, le modèle n'effectue que des déformations convexes par morceaux. Lorsqu'il ne peut plus en faire, il effectue des déformations hyperboliques ou concaves. Si jamais une rupture de topologie s'est produite, le processus repart sur les déformations convexes. L'initialisation doit donc se faire autour de la forme à recouvrir et le modèle gère deux types de ruptures de topologie (rupture axiale et rupture annulaire pour une surface se dégonflant). Leitner propose plusieurs méthodes pour détecter les accidents : analytique, discrétisation de l'espace, prédiction. Les déformations du modèle ne sont pas régies par des lois de la dynamique (action de forces). En conséquence, il est difficile d'utiliser le modèle pour extraire *directement* des formes d'une image volumétrique qui n'est pas pré-segmentée. Même si l'introduction d'informations ou de contraintes supplémentaires est délicate, le modèle incorpore naturellement la notion de lissage dans le choix du nombre de points de contrôle. Il peut aussi améliorer la pré-segmentation en rajoutant ou en enlevant des points contours à l'image de travail en fonction de critères d'homogénéité.

Delingette [30, 31] a proposé un modèle de surface déformable, le *simplex mesh*, basé sur le dual de la triangulation de surface. Il a défini un ensemble d'opérateurs Euleriens et non-Euleriens pour transformer la topologie de sa surface. D'un point de vue dynamique, le modèle est considéré comme un système masse-ressort. La segmentation/reconstruction se fait à l'aide de forces calculées à partir du gradient de l'image et de forces dérivées d'une image pré-segmentée de contours. Ce modèle permet de modéliser des 2-variétés avec bords, ce qui le rend très souple. Cette flexibilité sur la forme empêche néanmoins le modèle d'adapter automatiquement sa topologie aux formes qu'il approche. En effet, la fermeture de la surface permet de prédire l'opération topologique adéquate vis-à-vis de la géométrie des sommets. C'est pourquoi certaines configurations de rupture de topologie ont pu être automatisées tandis que l'utilisateur traite les autres. En contrepartie, son modèle autorise une adaptation de la finesse du maillage à la courbure locale.

McInerney et Terzopoulos [87] ont étendu à la troisième dimension leur modèle des *T-snakes* bidimensionnels [85]. Leur modèle de surface adapte la topologie de sa maille à la géométrie de ses sommets par un mécanisme *a posteriori*. Leur idée est de placer une grille simpliciale (décomposition simpliciale de Coxeter-Freudenthal) dans l'espace où se déforme le modèle. A chaque itération, les nouvelles positions des sommets sont calculées. Ces nouvelles positions permettent de déterminer les tétraèdres qui contiennent des éléments de la surface. Grâce à un algorithme de « terre brûlée » (similaire à celui utilisé par Osher et Sethian [106]), un ensemble de tétraèdres approchant la surface est extrait et une nouvelle surface triangulée est construite par dualité. L'intérêt de cette approche est d'éviter les problèmes de détection des accidents topologiques et de choix des opérations à effectuer sur la surface, pour que celle-ci puisse s'adapter à la géométrie de ses sommets. Cette

approche a néanmoins quelques inconvénients : la topologie de la maille est entièrement recalculée à chaque nouveau déplacement ; la précision de la maille correspond à la finesse de la grille simpliciale ; le modèle est contraint de choisir une direction générale de mouvement (gonflement ou dégonflement). A noter que ce calcul de la topologie au moyen d'une grille est en définitive proche des modèles de propagation de fronts [19, 82, 143, 116] et de leur formalisation implicite. Leur dynamique est en revanche très différente.

Le modèle de « peaux actives » de Desbrun et Gascuel [35, 34] peut être vu comme un intermédiaire entre les modèles implicites et le modèle des *T-snakes*. Ce modèle a une formulation implicite et une dynamique Eulerienne. En revanche, dans sa recherche d'une iso-surface dans un potentiel, il effectue à chaque itération une polygonalisation de la fonction implicite de déformation. Cette polygonalisation permet au modèle de ne pas osciller autour du résultat en moyennant l'évaluation du potentiel courant sur les sommets de la polygonalisation. Ce modèle est particulièrement adapté au suivi d'iso-surfaces et à la synthèse d'image à partir de fonctions implicites.

Détection des ruptures de topologie

Il existe des algorithmes extrêmement efficaces pour détecter des collisions entre surfaces ou entre morceaux d'une même surface. Malheureusement, ils sont rarement applicables aux modèles déformables :

- Les approches par *Sphere-Tree* ou *OBB-Tree* [50] qui enrobent le modèle géométrique à l'aide de primitives (sphères, parallélépipèdes) de plus en plus grosses ne gèrent que des intersections entre objets rigides.
- Les approches par hiérarchisation des triangles de la surface [139] permettent une détection très rapide des auto-intersections sur des modèles de surfaces triangulées dont les sommets se déplacent. Cependant, la hiérarchisation de la surface en morceaux de plus en plus grands impose une topologie figée à la surface.

D'autres auteurs ont proposé des algorithmes de changement de topologie spécifiques au suivi des iso-surfaces d'un potentiel :

- Ainsi, Rodrian et Moock [113] ont mis en œuvre une maille triangulée pour approcher les iso-surfaces d'un potentiel scalaire. Leur surface se dégonfle progressivement en adaptant localement la résolution de sa maille à la courbure. Le modèle détecte uniquement les ruptures annulaires *a posteriori* : si la maille est très étirée à un endroit de la surface, un contour de découpage est approximé puis la surface est séparée sur ce contour.
- Bottino *et al.* [15] ont proposé une méthode analytique pour déterminer si la surface doit modifier sa topologie. Cela est rendu possible par la spécificité de l'algorithme : la surface cherche à approcher une iso-valeur dans un potentiel scalaire, supposé connu dans tout l'espace. Grâce à cette hypothèse, une bifurcation dans une iso-potentielle apparaît si le gradient en un point est nul. En repérant les lieux où le gradient s'annule et en se plaçant dans le repère local, l'algorithme détermine la nature du problème topologique (passage d'un hyperboloïde à une nappe vers un hyperboloïde à deux nappes ou vice-versa, cf. Annexe C).

5.4 Dynamique et évolution du modèle

La spécificité majeure de notre modèle réside dans la constante mise à jour de la topologie de ses sommets. Elle rend délicate toute approche par minimisation d'énergie, la résolution de la minimisation imposant une topologie constante sur la maille [62, 27, 102]. Certains auteurs [85] font une reparamétrisation régulière de la maille pour pouvoir effectuer cette minimisation, mais ce processus est coûteux.

Une autre approche est de déformer la surface à l'aide d'un ensemble de forces et d'attendre qu'elle atteigne un équilibre stable. A ce moment-là, la surface réalise le minimum du potentiel associé à ces forces. Un ensemble de forces (internes et externes) cohérent avec notre objectif de segmentation/reconstruction doit donc être défini.

5.4.1 Dynamique Lagrangienne

La maille de notre modèle est assimilée à un système dynamique masse-ressort [79, 138, 3], qui est doté de contraintes internes et qui interagit avec l'environnement. Les relations de voisinage entre sommets de la surface (i.e., sa topologie combinatoire) représentent des ressorts entre les sommets assimilés à des masses ponctuelles. Il n'y a donc pas de calcul pour déterminer quelles sont les particules de la surface qui interagissent avec les autres, contrairement aux modèles de particules classiques [122, 123].

Soit $X^{(i)}$ un sommet de la surface triangulée Σ , $\mathbf{x}^{(i)}$ le vecteur de ses coordonnées (i.e. son plongement). La dynamique Lagrangienne de cette particule peut s'exprimer sous la forme :

$$m^{(i)} \frac{d^2 \mathbf{x}^{(i)}}{dt^2} + \gamma^{(i)} \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{dt} = \mathbf{f}_{int}^{(i)} + \mathbf{f}_{ext}^{(i)}, \quad (5.4)$$

où $m^{(i)}$ est la masse de la particule/sommet, $\gamma^{(i)}$ est le frottement de la particule dans le milieu, $\mathbf{f}_{int}^{(i)}$ l'ensemble des contraintes internes sur la particule (qui est en général une fonction de la position des particules voisines), $\mathbf{f}_{ext}^{(i)}$ est la somme des forces externes appliquées sur la particule (et qui est dépendant de sa position). En général, on choisit une masse et un facteur de frottement identiques pour toutes les particules du système : $\gamma^{(i)} = \gamma$, $m^{(i)} = m$.

5.4.2 Contraintes internes

L'objectif de ces contraintes est en fait de *régulariser* le processus d'extraction des formes de l'image. Elle vont représenter l'énergie interne du modèle.

On définit une force interne en chaque sommet $X^{(i)}$, notée $\mathbf{f}_c^{(i)}$, qui tend à ramener ce sommet sur le plan « tangent » défini par ses voisins :

$$\mathbf{f}_c^{(i)} = \alpha_c \left(\overline{\mathbf{x}^{(i)}} - \mathbf{x}^{(i)} - \frac{1}{n(X^{(i)})} \sum_{X^{(j)} \in \mathfrak{N}(X^{(i)})} (\overline{\mathbf{x}^{(j)}} - \mathbf{x}^{(j)}) \right), \quad (5.5)$$

où $\overline{\mathbf{x}^{(i)}}$ est le barycentre des voisins du sommet $\mathbf{x}^{(i)}$, α_c est le coefficient de tension (ou de rigidité) de la surface. Il est aisé de vérifier que cette force suit le principe de l'action/réaction :

chaque sommet est attiré par le plan « tangent » défini par ses voisins mais, en contrepartie, attire ses voisins vers ce plan ainsi défini.

On définit une deuxième force interne en chaque sommet $X^{(i)}$, notée $\mathbf{f}_e^{(i)}$, qui relie physiquement chaque sommet de la surface à ses voisins par un ressort de raideur α_e et de longueur au repos r :

$$\mathbf{f}_e^{(i)} = \alpha_e \sum_{X^{(j)} \in \mathbb{N}(X^{(i)})} (\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}\| - r) \frac{\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}}{\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}\|}, \quad (5.6)$$

Cette force suit aussi le principe de l'action/réaction. Pour une longueur de repos nulle, elle correspond à la force élastique des *snakes* [62] ou à la contrainte de forme de Miller *et al.* [93] et, pour une position de repos non nulle, elle correspond à la force élastique du modèle de Leymarie et Levine [74].

Géométriquement, la force de $\mathbf{f}_c^{(i)}$ cherche à minimiser la courbure sur toute la surface et la force $\mathbf{f}_e^{(i)}$ cherche à minimiser l'aire de la surface si la longueur de repos est nulle ou à régulariser l'échantillonnage de la surface si cette longueur est non nulle. Cette force élastique permet de répartir le long de la surface des déformations locales. On peut noter qu'une position de repos non nulle permet en théorie d'obtenir un maillage très régulier mais, d'un point de vue numérique, a tendance à rendre le système beaucoup plus instable [74].

Par ailleurs, il est possible d'intégrer des contraintes internes globales au modèle : l'algorithme de déformation à volume constant de Promayon *et al.* [111] peut être employé en l'état.

5.4.3 Lien avec la minimisation d'une énergie

Sous certaines hypothèses, la formulation des deux forces internes (5.6) (pour une longueur de repos nulle) et (5.5) correspond aux deux termes de régularisation de (4.8).

En effet, supposons que le maillage soit quadrangulaire (chaque sommet a 4 voisins) et que la longueur de repos pour les forces élastiques soit nulle. On note les sommets sous une forme plus adaptée à la maille : $X^{(i,j)}$. Soit $v(s, r)$ une surface définie sur cette maille de façon naturelle (le maillage quadrangulaire détermine un paramétrage). On cherche à régulariser cette surface à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange (4.9). On suppose aussi que les coefficients ω sont indépendants de s et r : $\omega_{10} = \omega_{01} = \omega_1$ et $\omega_{20} = \omega_{11} = \omega_{02} = \omega_2$.

On obtient facilement que $\mathbf{f}_e^{(i)} = \alpha_e (\mathbf{x}^{(i+1,j)} + \mathbf{x}^{(i-1,j)} + \mathbf{x}^{(i,j+1)} + \mathbf{x}^{(i,j-1)} - 4\mathbf{x}^{(i,j)})$. Or, on peut approcher le terme $\frac{\partial}{\partial s}(\omega_1 v_s) + \frac{\partial}{\partial r}(\omega_1 v_r) = \omega_1 \Delta v$ en utilisant les différences centrées (voir par exemple [105]). Il vient :

$$\Delta v = \frac{1}{h^2} (v(s+h, r) + v(s-h, r) + v(s, r+h) + v(s, r-h) - 4v(s, r)) + O(h^2). \quad (5.7)$$

On a donc, si le maillage est relativement régulier avec chaque sommet à distance h de ses voisins :

$$\mathbf{f}_e^{(i,j)} \approx \alpha_e h^2 \Delta v|_{v(s,r)=\mathbf{x}^{(i,j)}} \quad (5.8)$$

Pour le deuxième terme de régularisation de l'équation (4.9)

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\omega_2 v_{ss}) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\omega_2 v_{rr}) + \frac{\partial^2}{\partial s \partial r}(\omega_2 v_{sr}) = \omega_2 \Delta \Delta v, \quad (5.9)$$

on montre une relation similaire avec la force de tension en utilisant aussi les différences centrées :

$$\mathbf{f}_c^{(i,j)} \approx -\frac{\alpha_c h^4}{4} \Delta \Delta v|_{v(s,r)=\mathbf{x}^{(i,j)}}. \quad (5.10)$$

En conséquence, nos contraintes internes peuvent être assimilés à des opérateurs discrets de différenciation sur la surface, dont le rôle est similaire aux termes de régularisation des *snakes* (opérateurs de Tikhonov). Cette similitude dépend étroitement de la régularité de la maille (d'après (5.8) et (5.10)). *Le fait que la surface soit plongée dans l'espace par une δ -géométrie nous permet d'affirmer que la dynamique de notre modèle est analogue à la dynamique d'un modèle actif élastique* (donc issue d'une minimisation d'énergie).

5.4.4 Estimation et influence des paramètres

Cette analogie nous permet d'obtenir un ordre de grandeur sur les paramètres α_e et α_c , que l'on va déduire des paramètres d'élasticité et de rigidité choisis pour les *snakes*. Ainsi, Cohen et Cohen [27] proposent la valeur $h_s^2 h_r^2$ pour ω_1 et $h_s^3 h_r^3$ pour ω_2 , si h_s et h_r sont les discrétisations spatiales. D'après (5.8) et (5.10), α_e a donc un ordre de grandeur de h^2 et α_c a aussi un ordre de grandeur de h^2 . Il advient que α_e et α_c sont proportionnels à δ^2 .

La Figure 5.11 illustre l'influence des paramètres des contraintes internes sur l'extraction d'un cube. Le coefficient α_c permet de lisser plus ou moins la surface. Le coefficient α_e permet de régulariser les distances entre sommets. On peut voir que pour des coefficients de rigidité trop importants (Figure 5.11d), la résolution numérique par la méthode d'Euler est instable et la surface oscille autour de la position d'équilibre. Pour des valeurs de raideur trop importantes (Figure 5.11g), des creux et des bosses se forment lorsque la longueur au repos de la force élastique n'est pas nulle.

5.4.5 Heuristique de traitement des sommets immobiles

Des sommets quasi-immobiles n'occasionnent que très rarement des modifications dans la topologie de la surface. Dès lors, il est souvent inutile d'examiner à chaque itération si ces sommets respectent les contraintes géométriques définies dans la Section 5.3.2. Cependant, on ne peut prendre le risque de laisser un sommet traverser la surface simplement parce qu'il se déplace très lentement. Dans cette section, nous proposons une heuristique pour adapter la fréquence de vérification des contraintes géométriques des sommets à leur vitesse.

Elle se base sur l'introduction de deux constantes d et D telles que $0 < d < D < 1$ et sur une vitesse maximale imposée aux sommets, mettons V (cette vitesse dépend évidemment du pas de temps choisi pour la dynamique). Si la vitesse est supérieure à DV , alors les contraintes géométriques sont examinées sur ce sommet à chaque itération. Si la vitesse est inférieure à dV , alors les contraintes géométriques sont examinées sur ce sommet toutes les

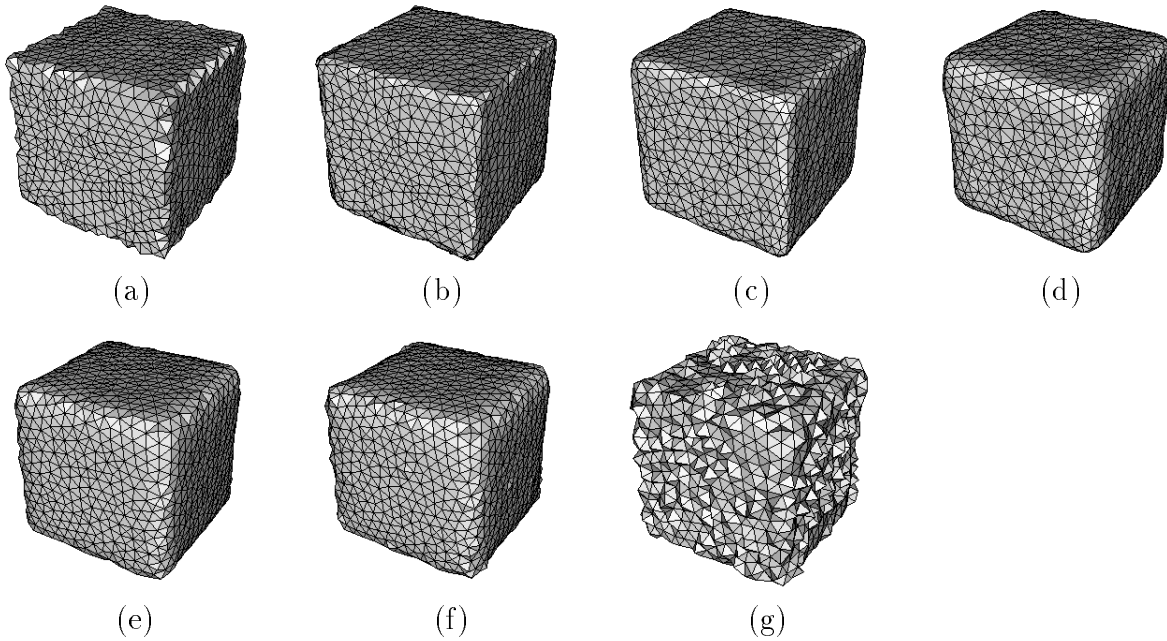


FIG. 5.11 – Influence des paramètres des forces internes sur la reconstruction d'un cube (longueur de repos du ressort $r = 1,5\delta$) : (a) $\alpha_e = 0$ et $\alpha_c = 0$; (b) $\alpha_e = 0$ et $\alpha_c = 0,1$; (c) $\alpha_e = 0$ et $\alpha_c = 0,5$; (d) $\alpha_e = 0$ et $\alpha_c = 2$; (e) $\alpha_e = 1$ et $\alpha_c = 0$; (f) $\alpha_e = 3$ et $\alpha_c = 0$; (g) $\alpha_e = 10$ et $\alpha_c = 0$.

$\frac{D}{d}$ itérations. Si la vitesse est entre ces deux valeurs, la fréquence d'examen est une fonction linéaire des deux bornes données ci-dessus.

Par ce biais, les sommets rapides sont toujours testés, les sommets de vitesses intermédiaires sont testés régulièrement et les sommets immobiles ou quasi-immobiles sont testés de temps en temps. Pour nos expérimentations, nous avons choisi (de façon relativement empirique) une vitesse maximale de $0,5\frac{\delta}{\Delta t}$, et les valeurs $d = 0,002$ et $D = 0,1$. Ces coefficients laissent une marge confortable quant à la fréquence de visite des sommets : le sommet non testé le plus rapide a au plus une vitesse de $\frac{5}{100}\frac{\delta}{\Delta t}$, un sommet immobile est testé toutes les 50 itérations.

De plus, comme les contraintes sont *symétriques*, la détection des contraintes géométriques entre un sommet lent et un sommet rapide sera faite du point de vue du sommet rapide. Il faut donc que les vitesses des deux sommets soient inférieures à $0,002V$ pour que leur contrainte géométrique commune ne soit testée que toutes les 50 itérations. Pendant ce temps, ils auront au maximum parcouru l'un vers l'autre une distance de $0,2\delta$. Les contraintes géométriques sont donc peu biaisées par cette heuristique.

Nous optimisons de façon similaire le calcul des normales aux sommets. En revanche, les forces et déplacements de tous les sommets sont calculés à chaque itération.

5.4.6 Résolution numérique

L'équation (5.4) peut se mettre sous forme matricielle, similairement à l'équation (4.14), avec $\mathbf{q} = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)})$. Cette formulation sous forme de système linéaire permet l'inver-

sion directe du système. Néanmoins elle ne sera pas employée car, *a priori*, la maille du modèle peut changer de topologie (aussi bien par des transformations Euleriennes que non-Euleriennes), et l'inversion du système devrait être réalisée quasiment à chaque itération.

De par la contrainte de δ -géométrie du modèle, la surface impose des variations importantes dans la combinatoire de la surface. Une résolution numérique de (5.4) par une méthode d'éléments finis serait onéreuse à mettre en place. Nous avons donc choisi de résoudre cette équation par différences finies.

Ce choix laisse cependant une certaine marge sur d'autres paramètres qui influencent notablement la convergence du processus :

- méthode d'intégration (Euler ou Runge-Kutta) ;
- estimation du coefficient de frottement.

Méthode d'intégration

A priori, la méthode d'intégration de Runge-Kutta donne des résultats plus rapides et plus précis que la méthode d'Euler. Cependant, en pratique ce n'est pas toujours le cas, car la méthode de Runge-Kutta nécessite quatre calculs des forces à chaque itération. De même, la méthode de Runge-Kutta prédit le comportement des sommets en supposant que la topologie des points ne change pas. En conséquence, l'estimation fournie peut être approximative même si théoriquement elle est précise.

Par exemple, sur la reconstruction d'un cube sans contrainte interne, la Figure 5.12a montre que l'intégration par la méthode de Runge-Kutta est très légèrement plus lente que par la méthode d'Euler, notamment à cause de l'accélération progressive des sommets pendant les premières itérations. L'évolution calculée par la méthode d'Euler, si elle est nettement plus éloignée du comportement physique réel induit par la dynamique Lagrangienne, permet une convergence plus rapide dans ce cas précis.

En revanche, la méthode d'Euler est nettement plus instable, comme le montre la Figure 5.12b qui présente la même reconstruction en incorporant cette fois-ci des contraintes de tension ($\alpha_c = 0.5$). Elle est d'autant plus instable que les forces internes sont importantes (voir Figure 5.12c où $\alpha_c = 2.0$).

Nous utiliserons la méthode de Runge-Kutta dans les expérimentations qui suivent, notamment pour sa stabilité.

Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement γ ou viscosité influence grandement la vitesse de convergence. En effet, s'il est sous-estimé, le système risque d'osciller autour d'une position d'équilibre. S'il est surestimé, le système va mettre beaucoup trop de temps pour atteindre l'équilibre. La Figure 5.13 illustre l'influence du paramètre γ sur la reconstruction d'un cube (pas de contraintes internes). Dans cet exemple, une viscosité comprise entre 0,6 et 0,8 permet d'approcher très rapidement la position d'équilibre en évitant les oscillations.

Algorri et Schmitt [3] ont proposé une méthode pour estimer le coefficient de frottement « critique ». Leur estimation se base sur l'analyse modale. Le problème est que ce calcul est très coûteux. Comme leur objectif est de segmenter des données non-structurées (nuages de

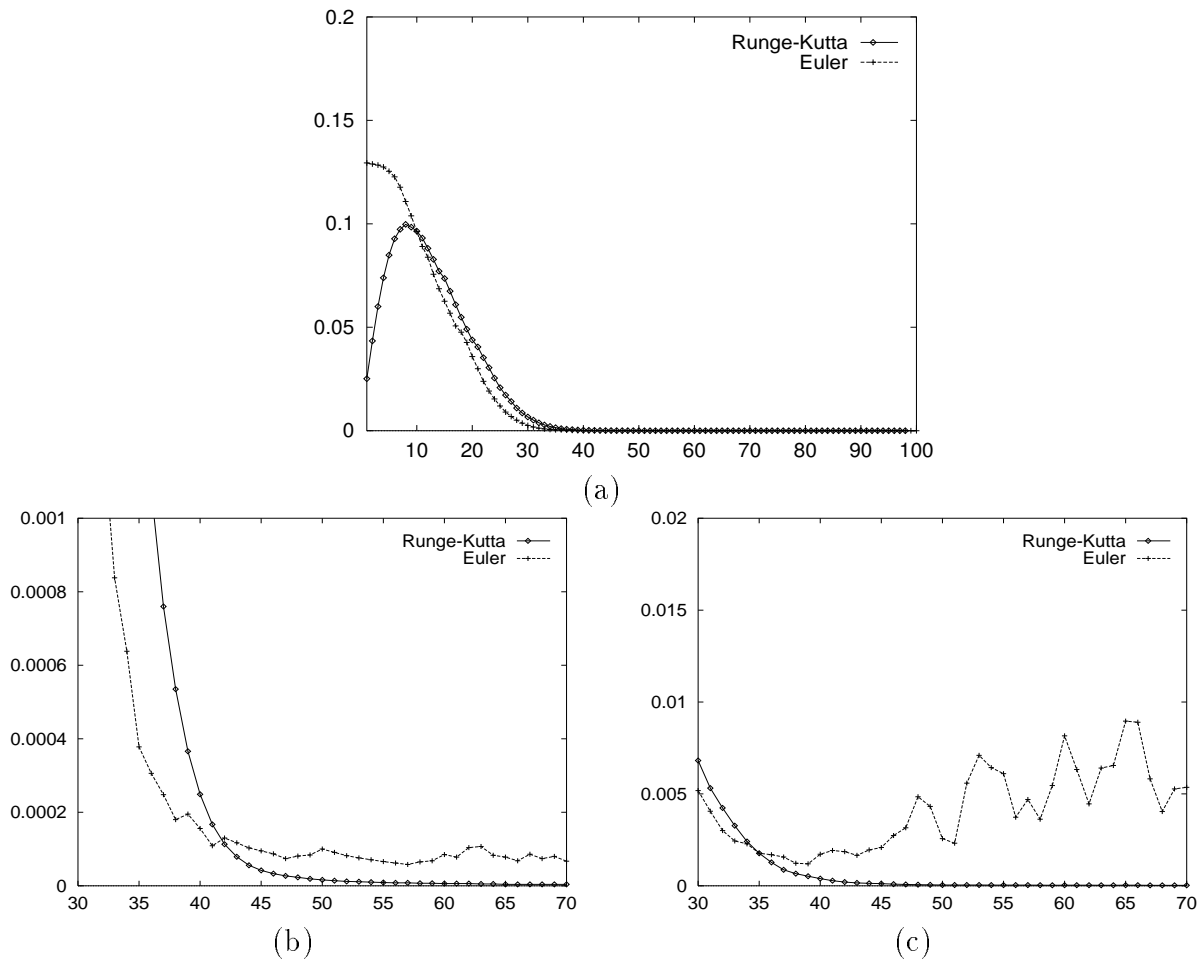


FIG. 5.12 – Comparaison entre les méthodes d’intégration numérique (Euler ou Runge-Kutta). La courbe donne l’énergie cinétique moyenne de la surface en fonction du temps. On remarque l’instabilité de la méthode d’Euler lorsque la surface est soumise à des contraintes internes. (a) $\alpha_c = 0.0$; (b) $\alpha_c = 0.5$; (c) $\alpha_c = 2.0$.

points), ils évitent ce calcul en négligeant les interactions entre les sommets de la surface et estiment un coefficient de frottement sur les sommets reliés à un point des données. Cette méthode ne peut donc pas s’appliquer pour extraire des formes d’images volumétriques.

Le meilleur moyen d’estimer ce frottement serait sans doute d’intégrer ce paramètre dans le vecteur d’état du système comme l’ont fait Metaxas et Kakadiaris [89]. Pour ce qui nous concerne, nous avons remarqué que le facteur de frottement optimal varie peu entre les images issues d’une même modalité d’acquisition. En général, une viscosité $\gamma = 0.7$ convient.

Autres méthodes décrites dans la littérature

On peut citer deux approches différentes utilisées pour s’affranchir du problème des oscillations.

Neuenschwander *et al.* [102] demandent à l’utilisateur de définir un ensemble de points d’ancrage pour leur surface élastique déformable. Ces points d’ancrage fournissent une solu-

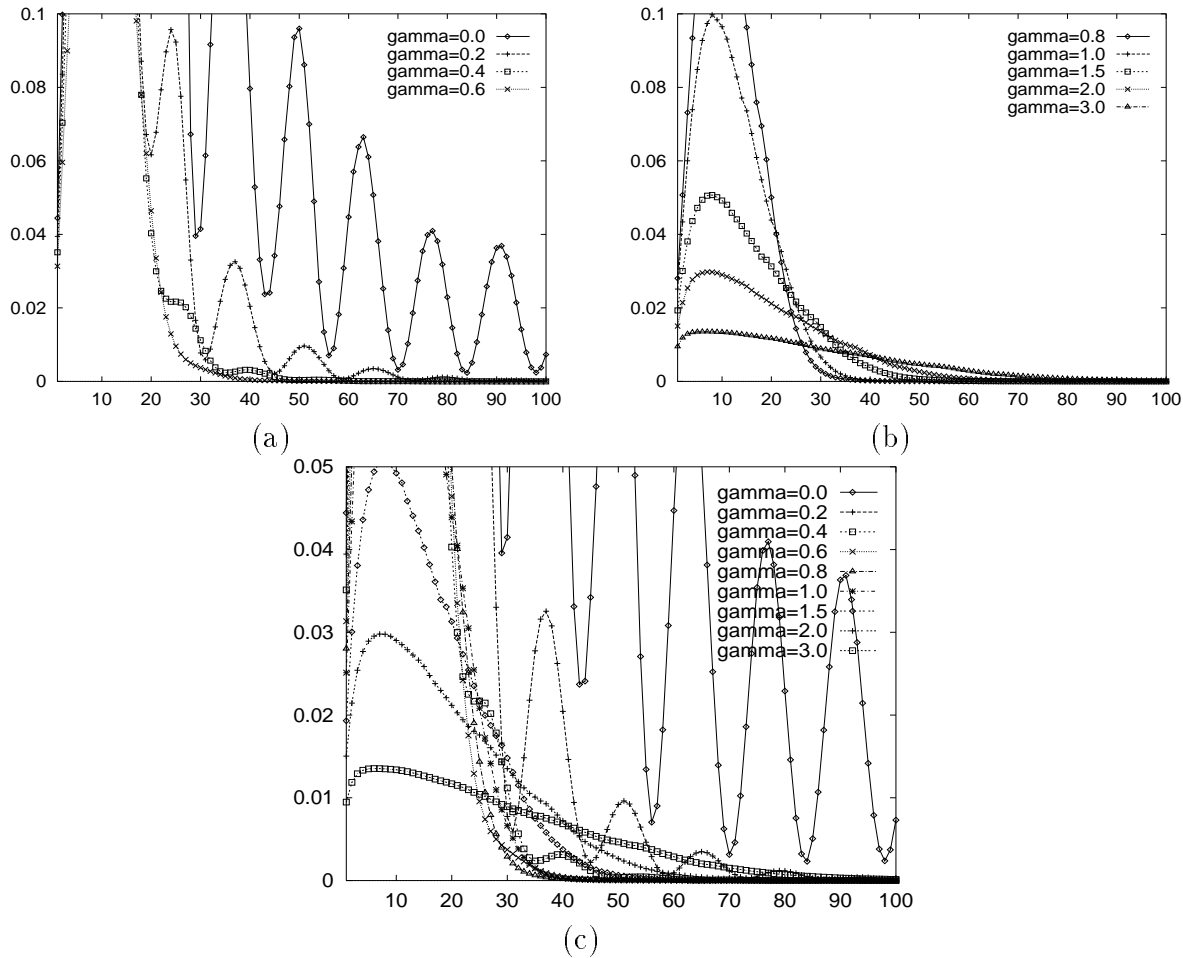


FIG. 5.13 – Influence du coefficient de frottement γ sur la convergence du modèle (en ordonnée, énergie cinétique moyenne de la surface) : (a) système faiblement amorti ; (b) système fortement amorti ; (c) comparaison entre les évolutions faiblement amorties ($\gamma < 0,5$), fortement amorties ($\gamma > 1,0$), et amorties de manière optimale ($\gamma \approx 0,7$)

tion homogène ne tenant compte que des contraintes internes (i.e., c'est une surface minimale suivant certains critères). A partir de cette solution homogène, les contraintes externes sont peu à peu rajoutées au système en partant de ces points d'ancrage par propagations successives. A chaque fois, on attend que le système intègre proprement les nouvelles contraintes avant de lui en additionner d'autres.

Delingette [32] définit l'influence de l'image non comme une force, mais comme un déplacement. Cela revient à supposer que la dynamique du modèle est quasi-statique. Cette approche n'est valable que pour des déplacements très petits.

5.5 Interaction avec les données

Au cours de cette thèse, nous avons utilisé deux forces d'interaction avec des données volumétriques. L'une permet d'approcher les iso-surfaces au sein d'une image (ou d'un potentiel scalaire continu). L'autre permet d'approcher les maxima (ou minima) d'une image

(ou d'un potentiel scalaire continu). On verra que cette force est similaire à la minimisation d'une énergie externe des *snakes* (définie par (4.2)). A noter que nous ne définissons pas des forces calculées à partir d'une image transformée par pré-traitement : nous n'utilisons pas ainsi une image d' « arêtes » comme dans [62, 26, 27, 30] qui aurait été calculée par un algorithme d'extraction de caractéristiques [95]).

Dans la suite, on notera I une image volumétrique discrète (une application de \mathbb{Z}^3 dans l'intervalle réel $[0, 1]$). Une interpolation trilinéaire de I sera notée Π_I (c'est une application de \mathbb{R}^3 dans $[0, 1]$).

On définit une *force de recherche d'iso-surface* $\mathbf{f}_I^{(i)}$ en un sommet $X^{(i)}$ qui tire ce sommet vers une iso-valeur π_I dans le potentiel scalaire continu Π_I par

$$\mathbf{f}_I^{(i)} = \alpha_I (\pi_I - \Pi_I(\mathbf{x}^{(i)})) \mathbf{n}^{(i)}, \quad (5.11)$$

où α_I est le coefficient d'attraction et $\mathbf{n}^{(i)}$ est la normale à la surface au sommet $X^{(i)}$. Informellement, la surface est gonflée ou dégonflée suivant l'isovaleur où elle se trouve. Une valeur positive pour α_I est attendue si le potentiel Π_I a une valeur 1 à l'infini et une valeur négative si le potentiel a une valeur 0 à l'infini. Le déplacement s'effectue suivant la normale à la surface. En dimension 2, la recherche d'une iso-valeur est équivalente à la recherche d'une ligne de niveau sur un terrain : si on est à une altitude inférieure, on monte le long de la pente, si on est à une altitude supérieure, on descend le long de la pente.

On note ∇I l' « image » (application de \mathbb{Z}^3 dans \mathbb{R}^3) gradient de I . On la transforme en un champ vectoriel continu $\mathbf{\Pi}_{\nabla I}$ par interpolation trilinéaire. La *force de suivi de gradient* $\mathbf{f}_{\nabla I}^{(i)}$ définie ci-dessous attire le sommet $X^{(i)}$ le long du gradient de l'image I :

$$\mathbf{f}_{\nabla I}^{(i)} = (\alpha_{\nabla I} - \beta_{\nabla I}) (\mathbf{\Pi}_{\nabla I}(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{n}^{(i)}) \mathbf{n}^{(i)} + \beta_{\nabla I} \mathbf{\Pi}_{\nabla I}(\mathbf{x}^{(i)}), \quad (5.12)$$

où $\alpha_{\nabla I}$ (resp. $\beta_{\nabla I}$) est le coefficient d'attraction par le gradient suivant la normale au sommet (resp. suivant le plan tangent au sommet). Cette force permet donc d'attirer la surface vers les maxima (ou minima) locaux de l'image.

Ces deux forces peuvent être normalisée par δ pour que leur intensité soit inversement proportionnelle à la finesse de la maille. Les coefficients α_I , $\alpha_{\nabla I}$ et $\beta_{\nabla I}$ sont alors proportionnels à δ . Par ailleurs, les coefficients $\alpha_{\nabla I}$ et $\beta_{\nabla I}$ doivent être choisis largement inférieurs à la valeur de α_I (environ d'un facteur similaire à la résolution de l'image). Cela est dû au fait que le gradient peut prendre des valeurs très importantes.

On peut remarquer que la force de suivi de gradient est très liée à la minimisation d'une énergie externe $-\int_C \Phi(\|\nabla I(v)\|) ds$ (cf. (4.2)). En effet, les équations d'Euler associées à cette minimisation transforment la minimisation d'une énergie externe en suivi du gradient du potentiel $\Phi(\|\nabla I\|)$. Il suffit donc de créer une image J égale à $\Phi(\|\nabla I\|)$ puis d'utiliser la force $\mathbf{f}_{\nabla I}^{(i)}$ avec les paramètres $\alpha_{\nabla I} = \beta_{\nabla I} > 0$ pour obtenir le même comportement. De plus, on évite le problème propre aux *snakes* du déplacement des sommets le long du contour en imposant $\beta_{\nabla I} = 0$.

D'autres forces pourraient être définies simplement. Un point de passage donné par l'utilisateur (définition d'un ressort) ou une contrainte de tangence (3 sommets attirés par un plan) sont simples à définir dans ce contexte. Par exemple, Bittar [13] a utilisé un modèle très similaire au notre (qui exclut les problèmes topologiques) pour faire de la reconstruction de données non-structurées en définissant des ressorts entre la maille et les données.

L'utilisation de ces forces dans le cadre de la segmentation/reconstruction d'images biomédicales sera détaillée dans le chapitre suivant.

5.6 Espace image et multi-résolution

5.6.1 Approche multi-échelle avec des pyramides

Une approche « directe » de la segmentation d'une image (i.e., l'image donnée en entrée est utilisée en l'état) n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, la définition des forces externes rend l'influence de l'image/potentiel localisée dans un petit voisinage autour des sommets. Cette définition ne reste cohérente que si la maille a une densité comparable à la résolution de l'image volumétrique. Deux approches sont possibles pour prendre en compte cet aspect :

- On impose à la surface d'avoir une finesse de maille similaire à la résolution de l'image. La dynamique de la surface est alors cohérente avec le domaine de fréquence de l'image dans laquelle elle évolue. Un inconvénient est la nécessité d'utiliser dès l'initialisation une maille très fine ce qui alourdit d'autant les calculs.
- Aucune contrainte n'est imposée sur la finesse de la maille. En contrepartie, les forces ne sont plus calculées précisément sur le sommet mais par un balayage dans un voisinage suffisamment large autour de ce sommet. C'est l'approche utilisée par exemple par Montagnat et Delingette [96] pour calculer l'interaction avec l'image : ils optimisent ce balayage en effectuant un pré-traitement sur l'image toute entière.

Afin de tirer parti des avantages des deux solutions, nous proposons de calculer une fois pour toute l'influence de l'image à différentes échelles. Cette solution hybride est faite en calculant une pyramide d'images tridimensionnelles, où chaque résolution correspond à une finesse différente de la maille triangulée. Le modèle s'appuiera sur le résultat obtenu à un niveau de résolution plus grossier pour débiter efficacement son évolution sur un niveau de résolution plus fin.

La notion d'informations contenues dans une image est étroitement liée à la résolution à laquelle l'image est considérée. L'analyse multi-échelle est dès lors devenu un outil commun, principalement car elle structure le contenu de l'image en l'organisant hiérarchiquement ; cette analyse peut être effectuée aussi bien sur les objets (entités) que sur les images.

Les représentations pyramidales d'images de Tanimoto et Pavlidis [125] ont été les premières à définir et à exploiter les réductions d'une image. Ces représentations servent plusieurs objectifs, parmi lesquels on peut citer le calcul rapide de paramètres, la compression, la décomposition du signal ou la segmentation [22].

Dans notre contexte, les pyramides de décomposition en fréquence, définies par Burt [16] et avec Adelson [17], sont particulièrement intéressantes, car elles fournissent un ensemble d'images à des résolutions décroissantes qui sont proches de la perception visuelle qu'aurait un observateur à des distances croissantes. Leur construction est basée sur la convolution d'un noyau Gaussien qui filtre les hautes fréquences, puis sur le sous-échantillonnage de cette image filtrée ; le processus est répété plusieurs fois pour obtenir tous les niveaux de la pyramide. En pratique, un seul opérateur combine l'opération de filtrage et l'opération de

sous-échantillonnage. Ce processus crée la *pyramide Gaussienne*. Sa particularité est de ne pas créer de faux contours. Lorsque la taille du noyau Gaussien est de 5×5 (en dimension 2), la bande passante est réduite d'un octave, donc la fréquence d'échantillonnage est réduite d'autant.

Pour tirer au mieux parti des représentations pyramidales, nous devons les définir pour des images volumétriques dont les voxels ne sont pas forcément cubiques (images anisotropes) et nous devons les lier à notre modèle de surface. En fait, les pyramides classiques ne sont pas conçues pour des applications tridimensionnelles basées sur le plongement de surfaces maillées dans des données. C'est pourquoi nous avons développé un algorithme pour construire des pyramides d'images avec un facteur de réduction quelconque. Ainsi, nous pourrions maintenir l'adéquation entre la résolution des données et la densité de la surface triangulée.

5.6.2 Pyramide d'images 3D de réduction arbitraire

Pour reconstruire des objets d'une image volumétrique, le modèle doit suivre au plus près les zones de discontinuité tout en englobant les zones homogènes. Une approche multi-échelle de l'image 3D nous fournit un accès à l'image de l'esquisse aux détails. Couplée avec l'évolution de notre modèle de surface, la convergence du modèle sera accélérée (point essentiel en 3D).

Nous rappelons d'abord le principe de construction d'une pyramide Gaussienne classique.

Les niveaux successifs de ces pyramides sont obtenus par convolution par un noyau Gaussien discret de côté 5 voxels. Ce noyau garantit un filtrage passe-bas sans translation de phase et un facteur de réduction de 2 suivant toutes les dimensions de l'image [22]. Soit I_0 l'image 3D initiale et la base de la pyramide. Le calcul du niveau I_{h+1} (image de niveau $h + 1$ dans la pyramide) en fonction du niveau I_h (image de niveau h dans la pyramide) est donné par la formule de convolution discrète suivante :

$$I_{h+1}(i', j', k') = \sum_{\substack{-2 \leq p \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq n \leq 2}} \omega(m, n, p) \cdot I_h(2i' + m, 2j' + n, 2k' + p), \quad (5.13)$$

où ω est noyau Gaussien de taille 5 voxels égal à $(\frac{1}{16}[1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1])^3$.

Trois contraintes majeures sont à prendre en compte dans le cadre de la segmentation/reconstruction de données volumétriques :

1. les images n'ont pas des résolutions qui sont des puissances de 2 et il est coûteux de « combler les vides » en 3D ;
2. les voxels ne sont pas forcément cubiques dans l'espace (les fréquences d'échantillonnage sont très dépendantes des modalités d'acquisition des données et sont rarement identiques dans les trois directions de l'espace — par exemple, le ratio entre différents axes peut varier de 1 à 5 en microscopie confocale) ;
3. le facteur de réduction entre les différents niveaux de la pyramide doit correspondre aux raffinements successifs de la surface triangulée.

La construction précédente induite par (5.13) n'est pas utilisable en l'état.

Il serait très onéreux en mémoire de rendre l'espace des voxels isotrope pour effectuer la convolution de manière cohérente (la résolution suivant les trois axes deviendrait le plus petit commun multiple des résolutions antérieures). Au contraire, en définissant un espace continu réel qui correspond à la structure discrète des données initiales, nous allons réaliser les opérations de convolution de façon efficace.

Soit I_0, I_1, \dots, I_m une liste ordonnée d'images volumétriques : ces images formeront une *pyramide* d'images car leur résolution sera décroissante. L'image I_0 est l'image initiale (i.e., l'image I donnée pour le traitement) de taille *discrète* (M, N, P) et de taille *réelle* (μ, ν, π) dans l'espace. C'est l'image qui contient le plus d'informations (i.e., les données de plus hautes fréquences). L'image I_m sera celle qui ne contient que les plus basses fréquences. On note M_h, N_h et P_h les tailles, encore inconnues, des images discrètes I_h pour h entre 0 et m . On note E_h l'espace discret de taille $M_h \times N_h \times P_h$ (indiqué à partir de $(0, 0, 0)$). Avec ces définitions, chaque image I_h est une application de E_h dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

On note \mathbb{E} , et on appelle *espace réel de l'image*, le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par le produit $[0, \mu] \times [0, \nu] \times [0, \pi]$. Comme toutes les images I_h représentent la même image « réelle » à différentes échelles, elles ont toutes la même taille réelle μ, ν, π . Le plongement d'un voxel (i, j, k) d'une image discrète I_h dans l'espace réel \mathbb{E} est donné par l'application \mathcal{T}_h , fonction du niveau h dans la pyramide, définie ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h : E_h &\rightarrow \mathbb{E} \\ (i, j, k) &\mapsto \left((i + \frac{1}{2}) \frac{\mu}{M_h}, (j + \frac{1}{2}) \frac{\nu}{N_h}, (k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{P_h} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Cette application est un plongement qui préserve les proportions réelles d'une image discrète dans le parallélépipède défini par son image réelle.

Nous appelons *unité* de l'image réelle, et nous notons U_h la valeur $\min(\frac{\mu}{M_h}, \frac{\nu}{N_h}, \frac{\pi}{P_h})$. C'est la distance la plus courte entre les plongements de deux voxels de I_h dans \mathbb{E} . Si l'image est isotrope, nous avons naturellement $U_h = \frac{\mu}{M_h} = \frac{\nu}{N_h} = \frac{\pi}{P_h}$. Dans le cas où l'image est anisotrope, le masque de convolution appliqué pendant la construction de la pyramide doit être isotrope dans l'espace réel où l'image est plongée. Si cela n'est pas fait correctement, les pyramides construites auront tendance à préserver les contours orthogonaux aux directions dont la résolution est fine, et à lisser exagérément les contours parallèles aux directions dont la résolution est proportionnellement plus grossière. L'unité U_h fournit une distance isotrope pour séparer les points constituant le masque de convolution.

L'algorithme de construction de pyramide que nous proposons ici n'assigne pas de valeur particulière au facteur de réduction. En conséquence, une transformation topologique arbitraire peut être employée pour raffiner la surface triangulée. Par exemple, l'opération $\Delta_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ défini dans la Section 5.3.5 nécessite un facteur de réduction non-rationnel de $\sqrt{3}$. On peut néanmoins remarquer que Peleg et Federbusch [108] ont adapté le mécanisme de construction de pyramides discrètes de Burt à des facteurs de réduction rationnels. Cependant leur transformation n'est pas un processus de convolution ; en conséquence, les filtres définis ne sont pas passe-bas et les signaux résultants ne sont pas clairement déterminés. Lozano [78] a explicité la méthode de construction de pyramides à réduction rationnelle de Peleg et Federbusch en montrant comment calculer un ensemble de noyaux générateurs, fonction de la réduction fractionnaire choisie. Il l'a mise en œuvre sur des images couleur.

La cohérence de l'opération de filtrage/sous-échantillonnage doit aussi être vérifiée : le filtrage des hautes fréquences doit correspondre au facteur de réduction employé. Nous avons choisi de conserver un noyau de convolution de côté 5. Le facteur de réduction par dimension, noté ρ , doit être inférieur à deux.

Soit V_0 la base de la pyramide d'images « réelles ». L'application V_0 est donnée par le plongement puis par l'interpolation des valeurs discrètes de I_0 (i.e., $V_0 = \Pi_{I_0}$). On note V_h le niveau h dans la pyramide d'images réelles. V_{h+1} est calculé à partir de V_h . Le nombre et la localisation dans \mathbb{E} des points discrets à calculer au niveau $h + 1$ sont déterminés par le facteur de réduction ρ , et leur valeur est obtenue après convolution sur un ensemble de points de V_h . Leur stockage après calcul dans l'espace de l'image réelle est bien entendu fait dans un tableau tridimensionnel de voxels qui est le niveau $h + 1$ dans la pyramide d'images discrètes $(I_i)_{i=0,\dots,m}$.

Les tailles discrètes M_h , N_h , P_h et l'unité U_h sont associées à l'image réelle V_h . La taille réelle de V_h est constante pour tout h de valeur (μ, ν, π) . Ses caractéristiques sont déterminées récursivement par :

$$\begin{aligned} M_0 &= M & N_0 &= N & P_0 &= P & U_0 &= \min\left(\frac{\mu}{M}, \frac{\nu}{N}, \frac{\pi}{P}\right) \\ M_{h+1} &= \left\lfloor \frac{M_h}{\rho} \right\rfloor & N_{h+1} &= \left\lfloor \frac{N_h}{\rho} \right\rfloor & P_{h+1} &= \left\lfloor \frac{P_h}{\rho} \right\rfloor & U_{h+1} &= \rho U_h \end{aligned} \quad (5.15)$$

Soit $R = (i', j', k')$ un voxel représentant une donnée discrète de I_{h+1} . Notre but est de trouver sa valeur pour tout $(i', j', k') \in E_h$. Son plongement $R_{\mathbb{E}}$ dans l'image réelle V_{h+1} a pour coordonnées $\mathcal{T}_{h+1}(i', j', k')$ (voir Figure 5.14a).

Pour établir la valeur de R , l'opération de convolution est définie sur des points de V_h . Le point central du masque a la même position dans V_h et dans V_{h+1} . La localisation des autres points impliqués dans la convolution ($5^3 - 1$ points en 3D pour un noyau de côté 5) est déterminée par l'emploi de l'unité U_h pour discrétiser V_h autour du point $R_{\mathbb{E}}$ (voir Figure 5.14b). Comme I_h est connu, l'application V_h est définie par Π_{I_h} et on obtient la formule de convolution suivante :

$$I_{h+1}(i', j', k') = \sum_{\substack{-2 \leq p \leq 2 \\ -2 \leq m \leq 2 \\ -2 \leq n \leq 2}} \omega(m, n, p) V_h(\mathcal{T}_{h+1}(i', j', k') + (mU_h, nU_h, pU_h)), \quad (5.16)$$

et V_{h+1} est défini implicitement par I_{h+1} ($V_{h+1} = \Pi_{I_{h+1}}$).

A cause du facteur de réduction inconnu, les 5^3 points impliqués dans la convolution ne coïncident pas en général avec des points de I_h (voir Figure 5.14c). Une conséquence directe est qu'il n'y aura pas de recouvrement entre les points impliqués dans des convolutions voisines. Par ailleurs, chaque point de V_h est interpolé des huit points de données discrètes de V_h (et mémorisés dans I_h) qui constituent le parallélépipède englobant ce point.

Grâce à sa propriété de séparabilité, le noyau de convolution Gaussien — décomposé en trois noyaux mono-dimensionnels de taille 5 — est appliqué successivement suivant les trois dimensions. On peut estimer les gains en temps obtenu en utilisant les notations suivantes : soit t' le temps d'accès à la valeur d'un point réel, t_1 le temps d'exécution de la convolution classique, t_2 le temps d'exécution de l'algorithme utilisant la séparabilité du noyau. On a facilement :

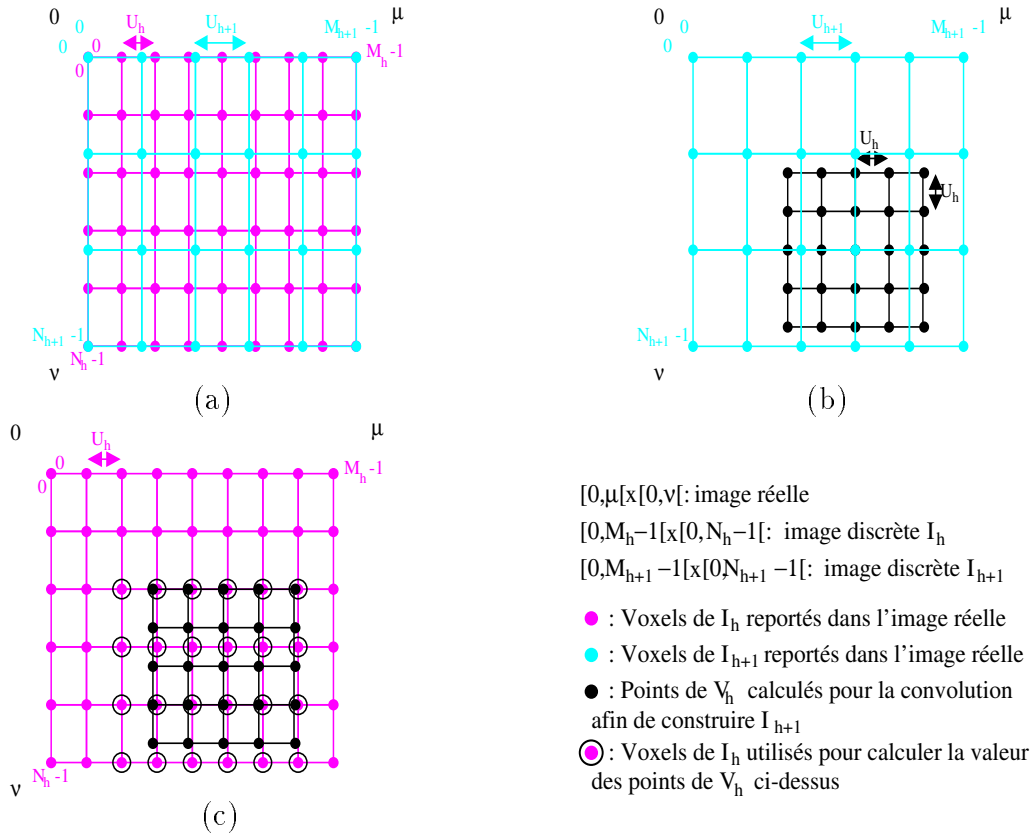


FIG. 5.14 – Exemple de calcul (bidimensionnel) d'un voxel de I_{h+1} à partir des voxels de I_h : (a) les deux images I_{h+1} et I_h reportées dans l'espace image réelle ; (b) calcul d'un voxel du niveau I_{h+1} et localisation des points du masque de convolution ; (c) application du masque de convolution sur les données de I_h (les voxels de I_h nécessaires à l'estimation de la valeur des points du masque de convolution sont entourés d'un cercle noir).

$$\frac{t_1}{t'} = 5^3 M_{h+1} N_{h+1} P_{h+1} \quad (5.17)$$

$$\frac{t_2}{t'} = 5 M_{h+1} N_h P_h + 5 M_{h+1} N_{h+1} P_h + 5 M_{h+1} N_{h+1} P_{h+1} \quad (5.18)$$

D'où

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{25}(\rho^2 + \rho + 1). \quad (5.19)$$

L'algorithme optimisé est donc plus rapide pour des facteurs de réduction ρ entre 0 et $\frac{-1+\sqrt{97}}{2}$ (approximativement 4.42).

Un pseudo-code de la construction de la pyramide tridimensionnelle est donné sur la Figure 5.15.

La Figure 5.16 représente une pyramide d'images calculée avec un facteur de réduction de $\sqrt{3}$ (puis agrandie à l'affichage). Cette image est anisotrope en z d'un facteur 2,6. Les éléments significatifs de l'image sont néanmoins préservés.

```

Procédure ConstruitPyramide ( const & Image I, & Pyramid P, double  $\rho$  )
  int h  $\leftarrow$  0
  int Msup, Nsup, Psup
  int Minf  $\leftarrow$  I.M
  int Ninf  $\leftarrow$  I.N
  int Pinf  $\leftarrow$  I.P
  P.image(h)  $\leftarrow$  I
  tant que  $\rho^h < \rho_{max}$  faire
    int Msup  $\leftarrow$   $\lfloor$  Minf/ $\rho$  $\rfloor$ 
    int Nsup  $\leftarrow$   $\lfloor$  Ninf/ $\rho$  $\rfloor$ 
    int Psup  $\leftarrow$   $\lfloor$  Pinf/ $\rho$  $\rfloor$ 
    Image G(Msup, Ninf, Pinf)
    G  $\leftarrow$  ConvolutionSuiwantX ( P.image(h), [1 4 6 4 1]/16,  $\rho$ )
    Image H(Msup, Nsup, Pinf)
    H  $\leftarrow$  ConvolutionSuiwantY ( G, [1 4 6 4 1]/16,  $\rho$ )
    Image P.image(h + 1) (Msup, Ninf, Psup)
    P.image(h + 1)  $\leftarrow$  ConvolutionSuiwantZ( H, [1 4 6 4 1]/16,  $\rho$  )
    supprime G, H
    h  $\leftarrow$  h + 1
  fin tant que
fin

```

FIG. 5.15 – Algorithme de construction d’une pyramide d’images. I désigne une image de taille discrète $M \times N \times P$ et de taille réelle $\mu \times \nu \times \pi$ dans l’espace \mathbb{R}^3 . ρ est le facteur de réduction et ρ_{max} la réduction maximale. La procédure *ConstruitPyramide()* construit une pyramide P à partir de l’image I avec la réduction ρ .

5.6.3 Relation image – modèle

Dans la Section 5.5 nous avons choisi d’exprimer l’interaction surface – image avec des forces définies localement autour de chaque sommet. L’emploi d’une pyramide d’images tridimensionnelles nécessite un modèle capable d’adapter sa densité à la résolution de l’image. Les arêtes de la surface triangulée ne doivent pas être trop longues, autrement des contours de hautes fréquences pourraient être manqués, ni trop courtes, sinon elles ne représenteraient qu’une décomposition d’un contour formé de deux voxels. Afin de maintenir la cohérence entre le modèle et les images de la pyramide, nous examinons d’abord le lien entre la densité de la maille et la résolution d’une image, puis nous montrons comment préserver ce lien durant le processus de segmentation de l’esquisse aux détails.

Suivant les contraintes de δ -géométrie (5.1) et (5.2), la densité de la maille est déterminée par l’invariant δ . L’approche de l’esquisse aux détails induit un raffinement du modèle à chaque fois qu’il descend un niveau de la pyramide (voir Figure 5.17). L’invariant δ est donc dépendant de l’image de la pyramide dans laquelle la surface est en train de se dé-

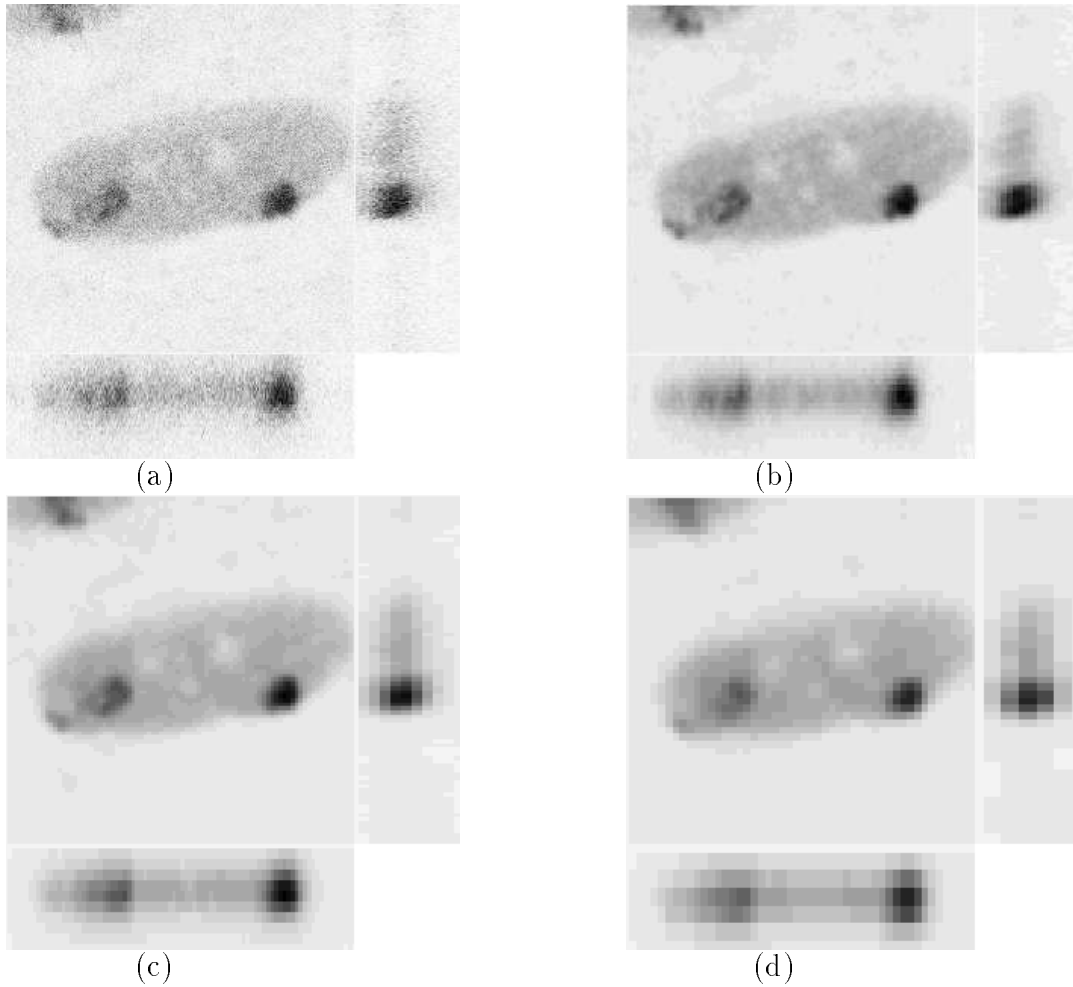


FIG. 5.16 – Pyramide d'images avec un facteur de réduction de $3^{\frac{1}{2}}$. Chaque image représente trois coupes (xy , zy et xz) dans le volume de données. (a) Coupe dans I_0 . (b) Coupe dans I_1 . (c) Coupe dans I_2 . (d) Coupe dans I_3 .

former (i.e., δ est une fonction de h). Soit δ_h l'invariant δ de la maille au niveau h de la pyramide. Soit d_h (resp. D_h) la longueur minimale (resp. maximale) des arêtes de la surface triangulée au niveau h . Comme la surface Σ est plongée dans \mathbb{R}^3 avec une δ_h -géométrie, on a immédiatement $d_h = \delta_h$ et $D_h = \zeta\delta_h$.

La résolution de l'image plongée dans l'espace est étroitement liée à l'unité U_h . Dans la suite, nous supposons que l'image est isotrope (voir la Section 5.6.4 pour les images anisotropes). Les arêtes de la maille doivent approcher des contours discrets de l'image. Tant les contours 6-connexes que les contours 26-connexes sont potentiellement représentables par des arêtes de la surface triangulée. En conséquence, une arête de la maille peut être plus courte que la distance entre deux voxels 6-connexes plongés dans \mathbb{R}^3 , ce qui induit $d_h \leq U_h$, et peut être plus longue que la distance entre deux voxels 26-connexes, ce qui implique $D_h \geq \sqrt{3}U_h$. D'où

$$\frac{\zeta}{\sqrt{3}} \geq \frac{U_h}{\delta_h} \geq 1. \quad (5.20)$$

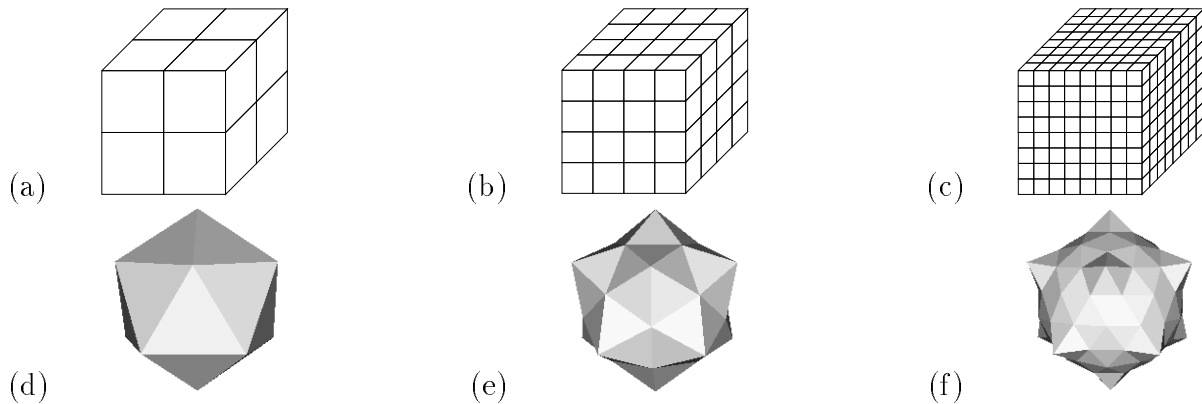


FIG. 5.17 – Résolution d'une image de la pyramide et densité de la maille triangulée : (d) évolue dans (a), (e) dans (b) et (f) dans (c).

La relation précédente borne la densité de la maille en fonction de la résolution de l'image².

Une surface triangulée d'invariant δ donné ne peut être construite qu'à l'initialisation. Après cela, les modifications de l'invariant sont limitées par la géométrie courante de la surface. L'opération de raffinement $\Delta_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (cf. Section 5.3.5) réduit la longueur moyenne des arêtes à $1/\sqrt{3}$ de l'ancienne. C'est pourquoi nous appliquons à l'invariant un même facteur de réduction de $\sqrt{3}$ entre deux niveaux de la pyramide. Pour que la relation (5.20) soit respectée à l'initialisation et durant tous les niveaux successifs de la pyramide, un facteur de réduction identique est choisi pour construire la pyramide d'images ($\rho = \sqrt{3}$). Ainsi, δ_h et U_h sont définis récursivement par :

$$\rho = \sqrt{3} \text{ et } \forall h = 0 \dots m - 1, \begin{cases} \delta_m = \delta_{init}, \delta_h = \delta_{h+1}/\rho \\ U_0 = U, U_{h+1} = \rho U_h \end{cases} \quad (5.21)$$

Au moment de l'initialisation, une bulle ou un ensemble de bulles sont créés avec un invariant δ_{init} vérifiant (5.20). Au cours des déformations et du processus multi-résolution, les définitions induites par (5.21) garantissent l'adéquation surface – image quels que soient l'itération ou le niveau courant dans la pyramide (i.e., $\forall 0 \leq h \leq m$, δ_h et U_h suivent (5.20)).

5.6.4 Surface évoluant dans une image anisotrope

Pendant le processus de segmentation/reconstruction, les arêtes de la maille doivent conserver leur signification par rapport à la discrétisation de l'image en voxels. D'un côté, si la surface évolue dans l'espace réel \mathbb{E} de l'image de taille (μ, ν, π) , les arêtes ne suivent plus les contours de l'image discrète. D'un autre côté, l'évolution du modèle dans un espace réel où les voxels ont été rendus cubiques modifie les contraintes que l'on applique sur le modèle (i.e., les forces perdent leur interprétation physique). On peut mettre en évidence trois façons d'appréhender ce problème :

1. La surface évolue dans l'espace réel \mathbb{E} (de taille (μ, ν, π)) et suit les contraintes définies physiquement. L'adéquation surface – image est réalisée sur les axes de résolution fine.

2. Comme $\zeta > 2$, l'équation (5.20) peut être vérifiée pour des valeurs δ_h adéquates.

2. La surface évolue dans un espace réel obtenu par transformation affine de l'espace \mathbb{E} . Cet espace a les mêmes proportions que l'image discrète qu'il interpole et sa taille est $(\tau M_h, \tau N_h, \tau P_h)$. Le comportement des forces diffèrent légèrement du comportement qu'auraient ces forces dans un espace non déformé.
3. La surface évolue dans l'espace réel \mathbb{E} auquel une métrique anisotrope a été couplée. La métrique est définie à partir des proportions de l'image discrète de taille (M_h, N_h, P_h) . L'adéquation surface – image est réalisée sur tous les axes et les forces conservent une interprétation physique.

La première méthode donne de bons résultats sur des images dont l'anisotropie est faible ; la deuxième fournit de meilleurs résultats lorsque l'anisotropie est plus significative ; la dernière est théoriquement la meilleure solution quel que soit le contexte mais possède l'implémentation la plus lente. Pour la plupart des applications de segmentation/reconstruction, le comportement physique exact du modèle n'est pas un point critique (pour preuve, un grand nombre de modèles déformables ne suivent pas une dynamique ou seulement une dynamique quasi-statique), aussi nous explorerons la deuxième méthode.

5.7 Algorithme de segmentation/reconstruction

5.7.1 Évolution dynamique, géométrique et topologique

Suivant l'application, le modèle peut être initialisé avec un nombre quelconque d'icosaèdres éparpillés dans l'image et qui ne s'intersectent pas dans l'espace, ou, par exemple, un seul icosaèdre englobant l'image entière. On peut optionnellement raffiner la surface (voir Section 5.3.5) afin que la densité de la maille corresponde à la résolution de l'image. Après cela, la surface est libre d'évoluer suivant les lois de sa dynamique et suivant les contraintes de δ -géométrie.

L'algorithme d'évolution de la surface se résume à une itération du pseudo-code de la Figure 5.18. Les tests vérifiant la δ -géométrie de la surface sont effectués moins fréquemment sur les sommets qui se déplacent très faiblement. Le gain est particulièrement substantiel lors d'une approche multi-résolution de la segmentation/reconstruction (voir Section 5.6).

Les Figures 5.19 et 5.20 montrent deux initialisations différentes pour reconstruire deux tores imbriqués. Dans le premier cas (Figure 5.19a-e), un icosaèdre raffiné englobe presque complètement le double tore. Dans le second cas (Figure 5.20a-f), 1000 petits icosaèdres ont été créés. Parmi ceux-ci, un grand nombre dégènèrent rapidement et sont supprimés. Ceux qui restent grossissent et fusionnent. Le résultat final est identique au précédent.

On peut remarquer que la deuxième façon d'initialiser le processus permet de recouvrir des *creux* à l'intérieur de volumes, alors que la première ne peut qu'approcher le bord extérieur de l'objet.

5.7.2 Segmentation/reconstruction

La Figure 5.21 résume l'algorithme d'extraction de formes d'une image. D'abord, la maille est affinée de manière à avoir une densité comparable à la résolution de l'image dans laquelle elle évolue. Puis le modèle se déforme jusqu'à une position d'équilibre stable.

```

Procédure Evolution ( & Maille  $T$ , const & Image  $I$  )
  pour tout Sommet  $U \in T$ ,
    calculer  $U.f_{int}(T)$  et  $U.f_{ext}(I)$ 
    estimer  $U.\dot{x}$  par Runge-Kutta
    borner  $U.\dot{x}$  par une vitesse maximale
  pour tout Sommet  $U \in T$ ,
    Calculer effectivement la nouvelle position  $U.x$  à l'aide
    de  $\Delta t$ ,  $U.f_{int}$  et  $U.f_{ext}$ 
  ListDeSommet  $L \leftarrow$  tous les sommets de  $T$ 
  Booleen  $x \leftarrow$  faux
  repète
    tant que  $L.nonVide()$  faire
      Sommet  $U \leftarrow L.retireSommet()$ 
      pour tout Sommet  $V \in U.\otimes$ 
        pour  $(U, V)$  vérifier les contraintes (5.1) et (5.2); faire
        les transformations correspondantes (création, fusion,
        inversion, accident annulaire); pour tout Sommet  $W$ 
        modifié par la transformation,  $L.mettreALaFin(W)$ 
      fin pour
    fin tant que
    Mettre à jour  $T.octreeParPoint$  et extraire les paires
    (Sommet  $U$ , Sommet  $V$ ) qui ne respectent pas (5.3)
    si  $\nexists(U, V)$  alors  $x \leftarrow$  vrai
    sinon
      pour tout  $(U, V)$ , faire la rupture axiale; pour
      tout Sommet  $W$  modifié par la transformation,
       $L.mettreALaFin(W)$ 
    fin si
  jusqu'à  $x$ 
fin

```

FIG. 5.18 – Cette procédure décrit les principales étapes d'une itération de l'évolution de la surface. Dans un premier temps, on calcule le déplacement géométrique des sommets. Dans un deuxième temps, on vérifie que la surface est toujours un δ -plongement. Si tel n'est pas le cas, on effectue les transformations topologiques adéquates.

La Figure 5.22 résume l'approche multi-résolution du processus de segmentation/reconstruction. Après chaque convergence sur un niveau de la pyramide, la maille est raffinée puis recommence son évolution sur le niveau inférieur de la pyramide.

La Figure 5.23 illustre l'évolution du modèle sur la reconstruction d'un volume fractal (le classique « fromage » de Sierpinski). La Figure 5.24 montre l'évolution du modèle dans

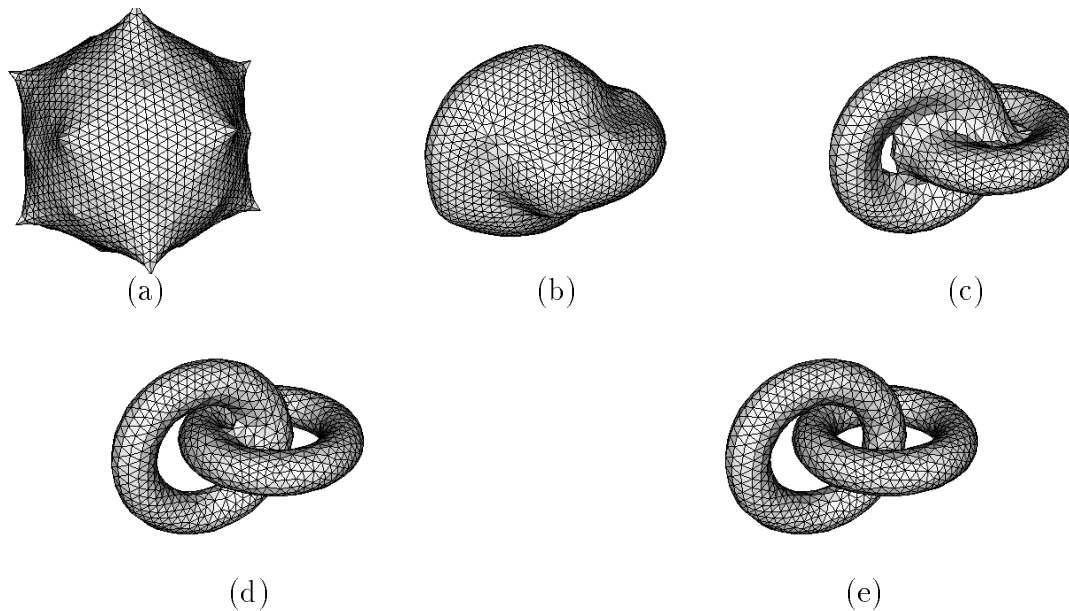


FIG. 5.19 – Evolution de la surface pendant la reconstruction d'une chaîne composée de deux tores imbriqués: (a) à l'initialisation; (b) à l'itération 20; (c) à l'itération 40; (d) à l'itération 60; (e) à l'itération 90.

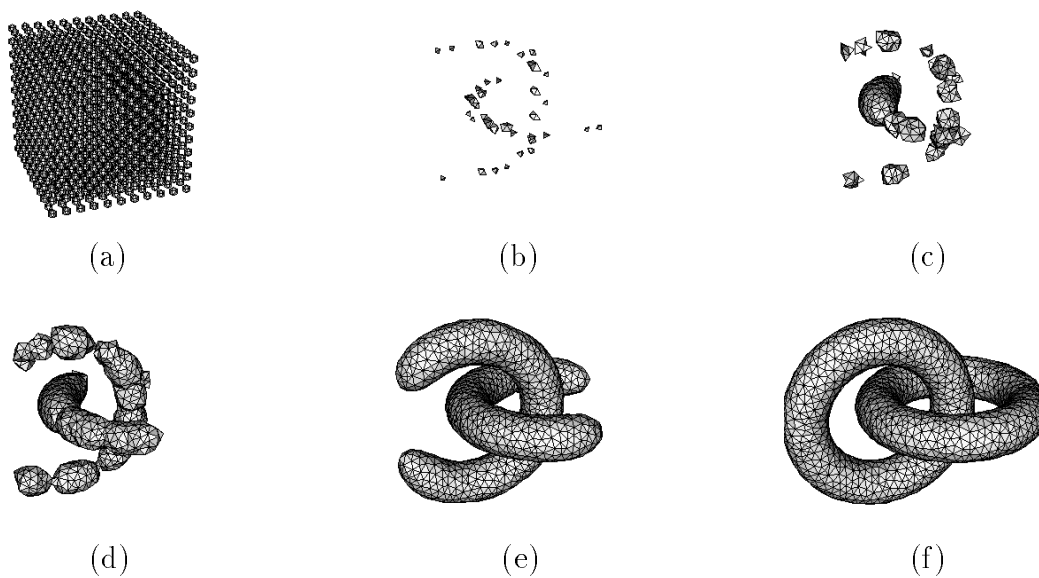


FIG. 5.20 – Evolution de la surface pendant la reconstruction d'une chaîne composée de deux tores imbriqués: (a) à l'initialisation; (b) à l'itération 10; (c) à l'itération 30; (d) à l'itération 40; (e) à l'itération 70; (f) à l'itération 160.

une approche multi-résolution. Les paramètres physiques du modèle ont été ajustés avec les valeurs suivantes : $\alpha_c = 0.05$ et $\alpha_e = 0.001$ pour les forces internes (régularisation faible), $\alpha_I = -1.0$, $\pi_I = 0.4$, $\alpha_{\nabla I} = 0.0$ et $\beta_{\nabla I} = 0.0$ pour attirer la surface vers une iso-surface de l'image. On peut noter que la valeur π_I est diminuée légèrement lors de la reconstruction

```

Procédure ExtraitForme ( & Maille T, const & Image I, const double  $\epsilon$  )
|
|  /* Adéquation surface-image */
|  tant que  $T.\delta > I.U$  faire
|  |
|  |    $T.\text{raffinementGlobal}\Delta_{\frac{1}{\sqrt{3}}}()$ 
|  |
|  | fin tant que
|  |
|  | /* Déformation jusqu'à équilibre */
|  | repète
|  | |
|  | |   Evolution (T, I)
|  | |   double  $E \leftarrow T.\text{calculEnergieCinetiqueSuivantNormales}()$ 
|  | |
|  | | jusqu'à  $E < \epsilon$ 
|  |
|  fin

```

FIG. 5.21 – Algorithme d'extraction de formes d'une image I . Une maille T donnée en initialisation est raffinée tant que sa densité n'est pas cohérente avec la résolution de l'image de travail I .

des niveaux les plus grossiers. En effet, ce volume fractal est vide à l'infini et n'est donc composé que de (infiniment) hautes fréquences.

5.8 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé un modèle générique original, basé sur une surface combinatoire triangulée fermée (Section 5.2). Nous avons montré comment plonger cette surface dans l'espace sans auto-intersection (Section 5.3) en utilisant des contraintes de distances entre les sommets (Section 5.3.2). En se basant sur ces contraintes géométriques, nous avons défini un ensemble d'opérateurs sur la topologie combinatoire de la surface (Section 5.3.3 et Section 5.3.4) afin que le modèle puisse adapter sa topologie en fonction des déplacements de ses sommets. Nous avons enfin comparé notre modèle adaptatif aux modèles existant dans la littérature (Section 5.3.6).

Ensuite, nous avons défini la dynamique du modèle (Section 5.3.6) et nous lui avons associé des forces internes régularisantes (Section 5.4.2). Nous avons montré le lien existant entre la dynamique de notre modèle et une dynamique dérivée d'une minimisation d'énergie (Section 5.4.3). Le problème de la résolution numérique a été également abordé (Section 5.4.6).

Nous avons ensuite défini des forces d'interaction avec l'image pour extraire les formes (Section 5.5). En examinant les problèmes soulevés par la segmentation/reconstruction par plongement d'un modèle déformable dans les données, nous avons proposé une approche multi-résolution à l'extraction des formes (Section 5.6). Cette approche de l'esquisse aux détails est possible grâce à la construction d'une pyramide à facteur de réduction arbitraire (Section 5.6.2). Enfin l'algorithme d'extraction des formes d'une image de manière directe ou de l'esquisse aux détails a été présenté (Section 5.7).

```

Procédure ExtraitFormePyramide ( & Maille T, const & Pyramide P,
                                     const double  $\epsilon$ , const int m )
|
|   int i  $\leftarrow$  m
|   tant que i  $\geq$  0 faire
|   |   ExtraitForme( T, P.image(i),  $\epsilon$  )
|   |   i  $\leftarrow$  i - 1
|   fin tant que
fin

```

FIG. 5.22 – *Extraction de formes dans une pyramide*: m est un niveau donné dans la pyramide P d'images 3D. La maille évolue dans chaque image $P.image(i)$ de la pyramide pour I décrémentant de m à 0. La maille T est donnée comme initialisation sur le niveau le plus grossier de la pyramide. Après convergence au niveau i , la maille résultante (i.e., T) devient l'initialisation du niveau $i - 1$. Le raffinement effectif de la surface est fait dans la procédure *ExtraitForme()*.

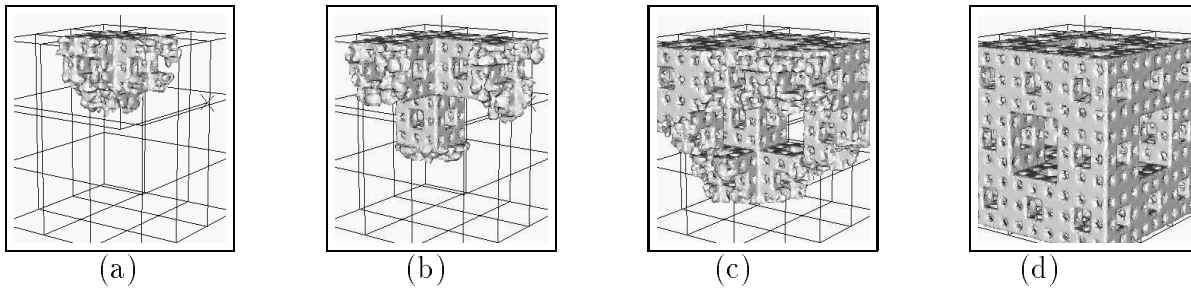


FIG. 5.23 – *Reconstruction directe d'une image synthétique représentant le volume fractal (« fromage ») de Sierpinski*: (a) après 140 itérations; (b) après 240 itérations; (c) après 340 itérations; (d) résultat final après 640 itérations.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons l'application de ce modèle générique à l'extraction de formes de données biomédicales.

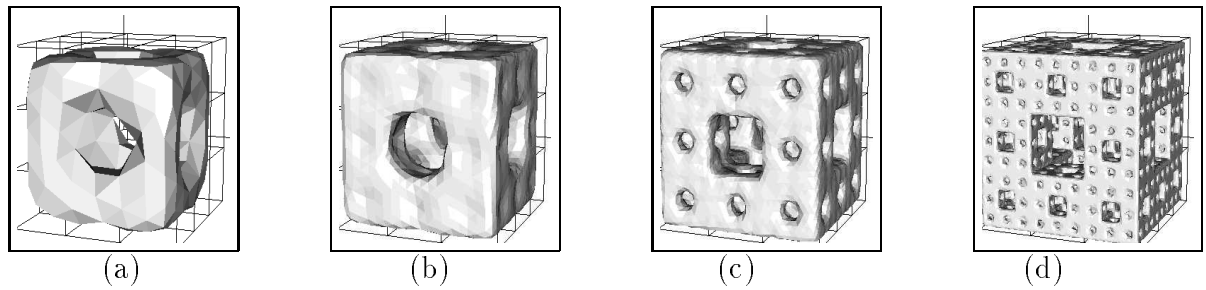


FIG. 5.24 – Reconstruction multi-résolution d'une image synthétique représentant le volume fractal (« fromage ») de Sierpinski : (a) après convergence sur l'image I_3 ; (b) après convergence sur l'image I_2 ; (c) après convergence sur l'image I_1 ; (d) résultat final sur $I_0 = I$.

Chapitre 6

Applications en imagerie biomédicale

Ce chapitre présente l'application à l'imagerie biomédicale tridimensionnelle des méthodes de segmentation/reconstruction par algorithme d'extraction discrète (Chapitre 3) et par le modèle déformable présenté dans le Chapitre 5.

6.1 Présentation des données

6.1.1 Coupes dans les données volumétriques

Suivant la modalité d'acquisition de l'image tridimensionnelle, certaines techniques seront plus efficaces que d'autres. Par exemple, les données fournies par une image angiographique à base de produit de contraste sont relativement faciles à segmenter, car le problème d'isoler les vaisseaux sanguins est résolu par le processus d'acquisition. En revanche, l'imagerie par résonance magnétique met en évidence la proportion d'eau dans les tissus. Comme tous les tissus contiennent plus ou moins d'eau, les composantes d'une IRM ne sont pas clairement différenciées par le processus d'acquisition. Isoler les composantes de ces images est donc une tâche assez ardue.

La Figure 6.1 présente un ensemble de coupes (suivant les plans XY , ZY , XY) pour des images provenant de différentes modalités. Leurs caractéristiques sont très variables, que ce soit en luminosité, contraste, précision, résolution, ou bruit. Il est très difficile pour l'observateur de se représenter mentalement des objets tridimensionnels par le seul examen de l'ensemble des coupes d'une image. Pour des images dont les constituants sont tubulaires (angiographies, cf. Figure 6.1d) ou ont une forme très complexe (noyaux de cellules comme sur la Figure 6.1e), la reconstruction d'une structure géométrique par ordinateur est même indispensable avant toute interprétation.

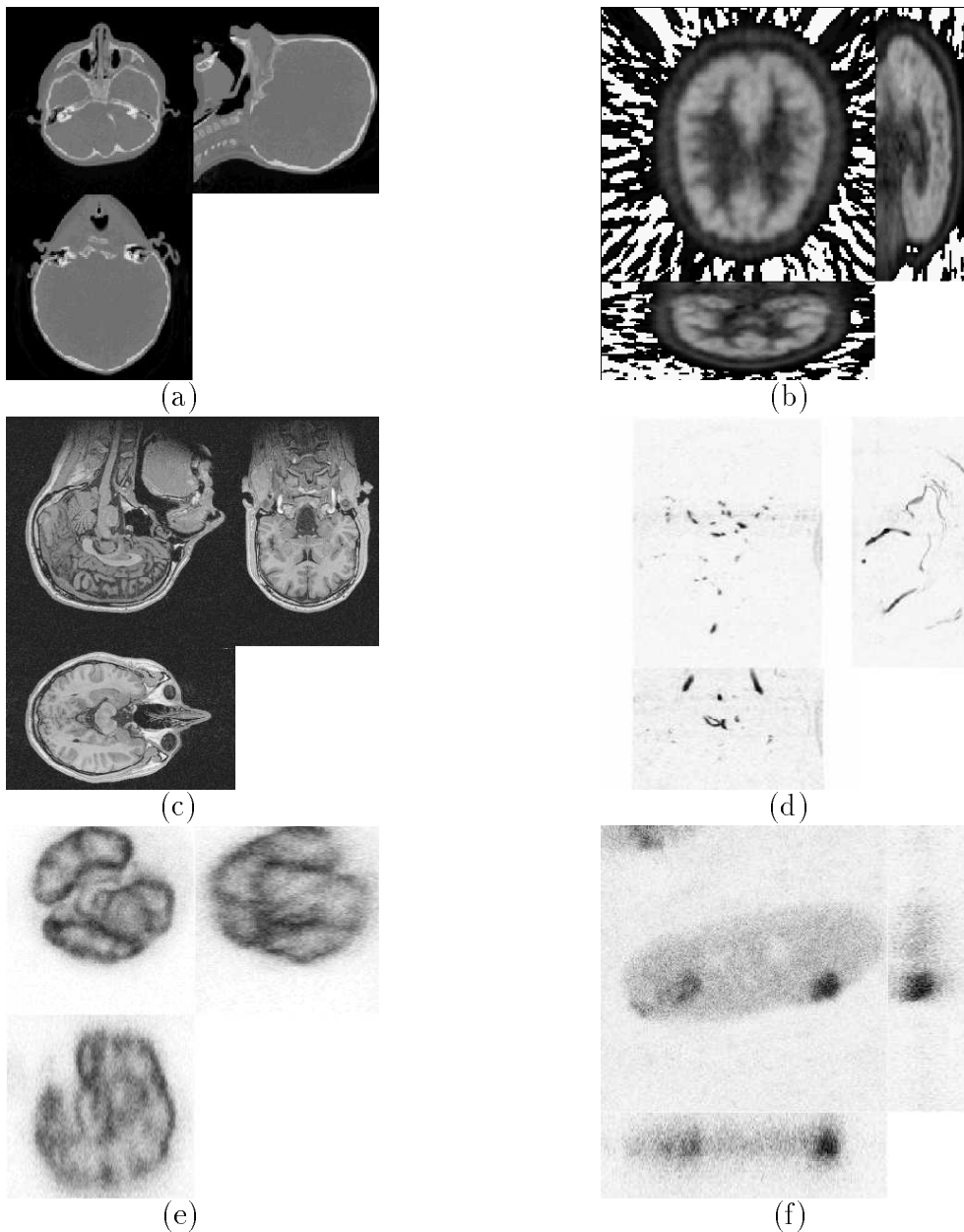


FIG. 6.1 – Visualisation par coupes orthogonales (XY, ZY, XZ) dans des données volumétriques : (a) image « head » acquise par scanner X ; (b) image « tep » de tomographie par émission de positons ; (c) IRM « enfant » (la luminosité a été rehaussée) ; (d) angiographie RM « angio » à contraste de phase ; (e) image « noyau » de microscopie confocale (marquage fluorescent des parois d'un noyau d'une cellule polynucléaire) ; (f) image « chromo » de microscopie confocale (marquage fluorescent des zones chromosomiques).

Les méthodes d'extraction de structures géométriques doivent être paramétrables pour gérer des données aussi diverses. La contrepartie de cette souplesse est la difficulté de trouver le paramétrage « optimal » — s'il existe — qui donnera le résultat escompté. Nous allons tester les capacités de notre modèle générique à segmenter et à extraire les composantes d'images de nature variée. La reconstruction discrète proposée dans le Chapitre 3 servira deux objectifs : montrer un aperçu des composantes recherchées lorsque cet algorithme est applicable (voir Section 6.1.2) et fournir une surface pour l'initialisation de notre modèle générique (voir Section 6.3).

6.1.2 Iso-surfaces extraites

Les Figures 6.2, 6.3 et 6.4 montrent des vues d'iso-surfaces extraites par reconstruction discrète¹. Comme le montre la Table 6.1, le calcul de ces iso-surfaces est très rapide (en général moins de 20 secondes). Des versions parallèles de cet algorithme ont été développées [90]. L'extraction d'iso-surfaces est alors réalisée à des vitesses quasi-interactives. Le choix des seuils pour une image se fait par examen des intensités sur les coupes ou par observation de l'histogramme des intensités de l'image.

Les résultats sont particulièrement probants sur les images de tomodensitométrie. Ainsi, la Figure 6.2 présente deux iso-surfaces reconstruites à partir de la même image « head » : pour l'une des iso-valeurs, une bonne approximation du contour externe est obtenue, pour l'autre, on obtient une bonne approximation des tissus osseux. Le léger effet d'escalier peut être atténué en utilisant des techniques d'ombrages plus évoluées.

Sur une angiographie RM où les vaisseaux sont marqués, la segmentation par seuillage est là-encore assez efficace (cf. Figure 6.3). En revanche, le choix du seuil est moins aisé.

La Figure 6.4 met en évidence deux limites majeures à ces algorithmes de reconstruction : la première est la sensibilité aux bruits (cf. Figure 6.4a), la seconde est l'incapacité à gérer l'anisotropie des images (cf. Figure 6.4b). Ainsi, une variation du seuil de 1/250ème diminue le genre de la surface de 2000 (cf. Table 6.1). L'anisotropie sur les images « chromo » et « cœur » est respectivement de 2.5 et 5.4. Le rendu des surfaces obtenues est particulièrement peu réaliste et ne peut pas se corriger par des techniques d'ombrage.

Nous ne présentons pas des iso-surfaces extraites des autres images de la section précédente, car elles ne seraient pas représentatives de *composantes* de l'image. En effet, pour une image obtenue par IRM, il faudrait enlever auparavant — automatiquement si possible, manuellement en général — les tissus que l'on ne souhaite pas visualiser. Pour une image TEP, les anomalies générées par le processus d'acquisition doivent être préalablement éliminées. Enfin — et c'est sans doute leur limite principale —, ces méthodes discrètes ne peuvent pas extraire des formes de données représentant la *surface* d'un objet. L'image « noyau » (Figure 6.1e), qui a été obtenue en marquant la surface des noyaux par un produit fluorescent, est un exemple d'image de cette nature.

1. Un grand merci à Jean-Marc Nicod et Serge Miguet pour leur implémentation du *marching-cubes*.

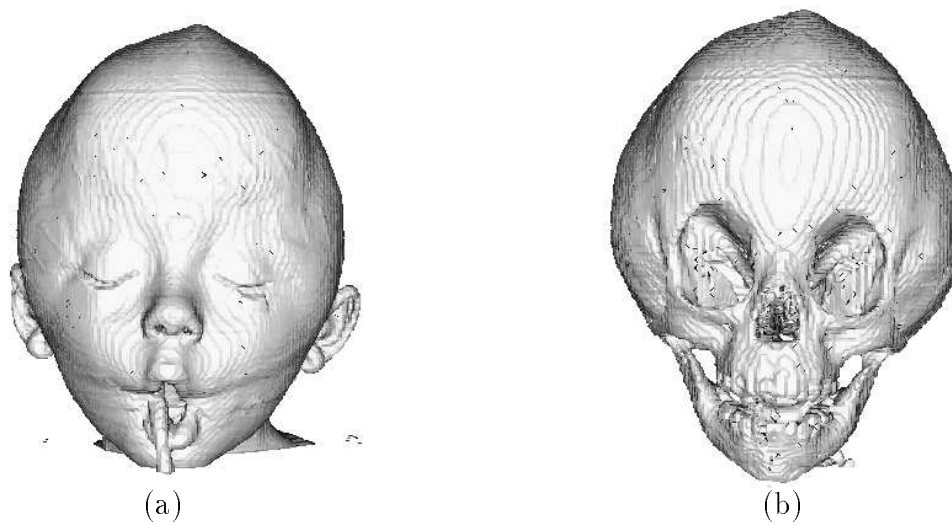


FIG. 6.2 – Iso-surfaces extraites sur l'image « head » : (a) pour un seuil de 25.6 (sur 256), on obtient une approximation de contour externe de la tête ; (b) pour un seuil de 76.8 (sur 256), on obtient une approximation des os de la tête.

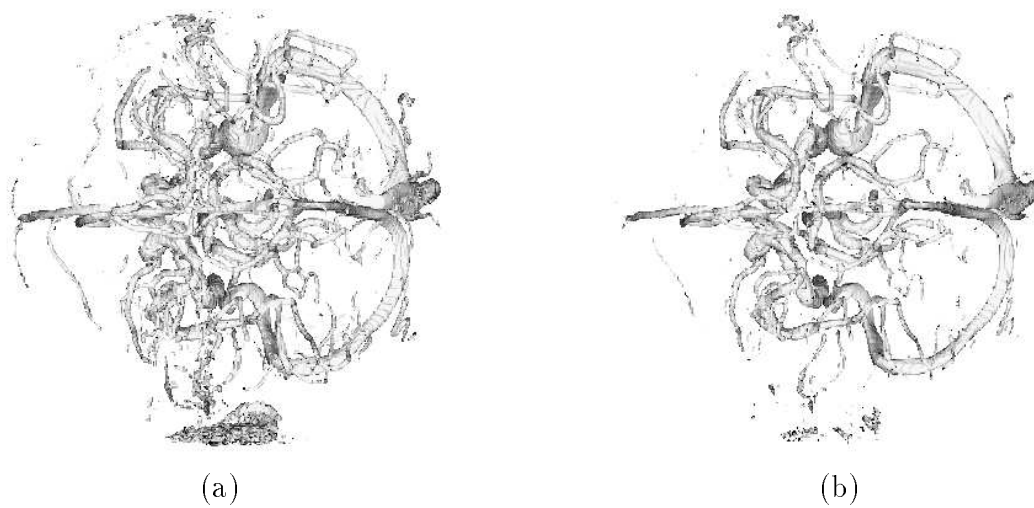


FIG. 6.3 – Iso-surfaces extraites sur l'image « angio » : (a) pour un seuil de 19.2 et (b) pour un seuil de 25.6.

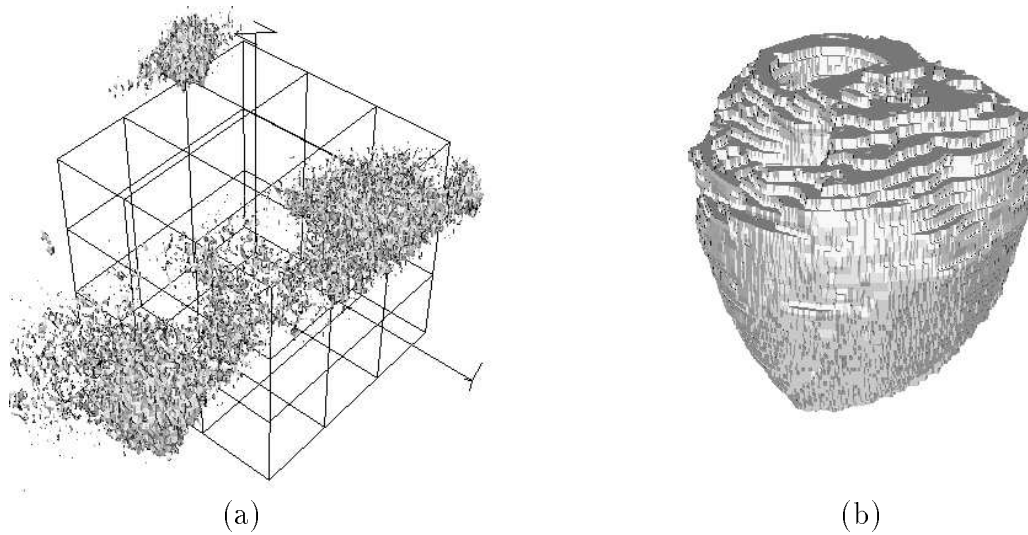


FIG. 6.4 – Limites à l’algorithme de reconstruction discrète : (a) iso-surface extraite sur l’image « chromo » pour un seuil de 40,0 ; (b) iso-surface extraite sur l’image pré-segmentée « cœur ».

| Image | Nature | Résol. | Seuil | Tps (s) | Nsom | C. cnx | Genre |
|------------|---------|--------------------|-------|---------|--------|--------|-------|
| « head » | X | 128^3 | 25,6 | 10,0 | 75004 | 68 | 33 |
| « head » | | | 76,8 | 12,6 | 117674 | 122 | 225 |
| « skel » | X | $256^2 \times 68$ | 25,6 | 39,9 | 241600 | 86 | 103 |
| « angio » | aRM | $256^2 \times 124$ | 19,2 | 25,0 | 107754 | 687 | 334 |
| « angio » | | | 25,6 | 21,5 | 68810 | 395 | 83 |
| « chromo » | Confoc. | $256^2 \times 32$ | 39,9 | 11,0 | 93006 | 2354 | 2552 |
| « chromo » | | | 40,0 | 11,0 | 84772 | 3247 | 967 |
| « cœur » | Découpe | $256^2 \times 43$ | 128,0 | 16,6 | 156884 | 694 | 223 |

TAB. 6.1 – Caractéristiques de différentes surfaces triangulées extraites par un algorithme de reconstruction discrète dérivé du marching-cubes. La colonne “Seuil” indique l’iso-valeur (entre 0 et 255) recherchée ; la colonne “Tps” donne le temps de calcul en secondes sur un Pentium 300MHz avec 128Mo de RAM ; les colonnes suivantes fournissent respectivement le nombre de sommets, le nombre de composantes connexes et le genre (i.e. le nombre de trous) de la surface reconstruite.

6.2 Segmentation/Reconstruction par modèle déformable

Cette section examine les capacités de notre modèle à appréhender les composantes des images biomédicales. Elle compare différentes approches à la déformation du modèle (directe, multi-résolution) et analyse la vitesse de convergence en fonction des paramètres de la dynamique et des méthodes d'intégration.

6.2.1 Comparaison approche directe/pyramidale

Ainsi qu'il a été souligné dans la Section 5.6, une approche de l'esquisse aux détails des formes à extraire peut constituer un gain de temps important. Nous allons évaluer ce gain sur différentes données.

La Table 6.2 montre les temps de calcul d'une pyramide de facteur de réduction $\sqrt{3}$ sur un *Pentium 300MHz avec 128Mo de RAM*.

| Image | Nature | Résol. | Tps (s) | Taille (oct.) |
|------------|---------|--------------------|---------|---------------|
| « head » | X | 128^3 | 34,5 | 2600252 |
| « skel » | X | $256^2 \times 68$ | 74,7 | 5508092 |
| « enfant » | IRM | $256^2 \times 113$ | 175,3 | 12958284 |
| « angio » | aRM | $256^2 \times 124$ | 145,5 | 10064626 |
| « chromo » | Confoc. | $256^2 \times 124$ | 35,1 | 2578080 |

TAB. 6.2 – Temps de calcul d'une pyramide sur un Pentium 300MHz avec 128Mo de RAM (colonne 4) et taille en octets de la pyramide calculée (pour 4 niveaux de résolution). Le noyau de convolution est de taille 5^3 et sa propriété de séparabilité est utilisée pour optimiser les calculs.

Ces temps de calcul restent raisonnables, d'autant plus que les pyramides sont calculées une fois pour toute et qu'aucune interaction de l'utilisateur n'est nécessaire.

Comparaison sur une image scanner X « skel »

Nous allons estimer les gains en temps de calcul d'une approche pyramidale sur une image « skel » obtenue par scanner X, de taille $256 \times 256 \times 68$. Vue la nature des données, une simple recherche d'iso-surfaces sera effectuée pour déterminer les tissus osseux. Le modèle sera soumis à une force \mathbf{f}_I paramétrée par l'iso-valeur $\pi_I = 0,1$ et le coefficient $\alpha_I = 1,0$. Nous introduisons une légère régularisation avec une force \mathbf{f}_c paramétrée par $\alpha_c = 0,4$. Pour la dynamique du modèle, nous choisissons les paramètres suivants : $m = 1,0$, $\Delta t = 0,3$, $\gamma = 0,4$ (une discussion plus détaillée du choix de ces paramètres est dans la Section 6.2.3). Une pyramide P , composée de quatre images I_0, I_1, I_2, I_3 , est construite à partir de l'image volumétrique « skel » (l'image I_0 correspond à cette image). Le processus est lancé deux fois :

- Le processus est lancé une première fois sur l'image I_0 , sans approche multi-résolution, en appelant la procédure *ExtraitForme()* (Figure 5.21) avec un icosaèdre qui englobe

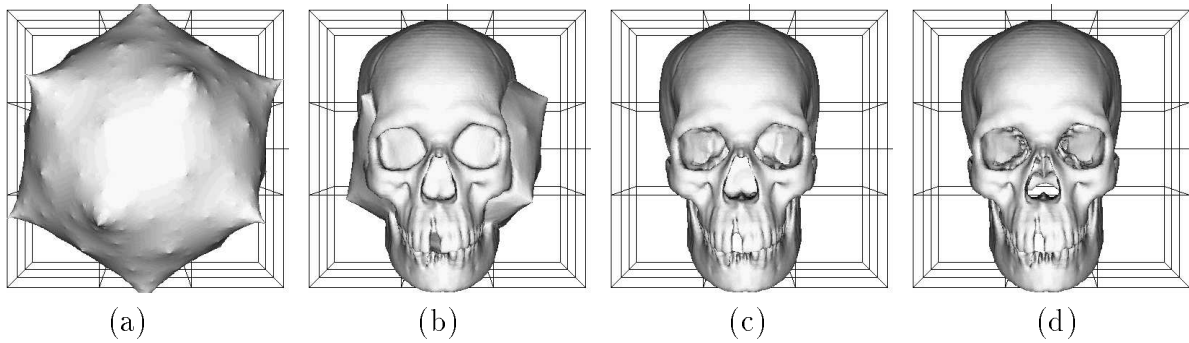


FIG. 6.5 – *Evolution de la surface sans approche multi-résolution sur l'image « skel » : (a) itération 0 sur l'image I_0 ; (b) itération 200 sur l'image I_0 ; (c) itération 400 sur l'image I_0 ; (d) itération 1100 sur l'image I_0 .*

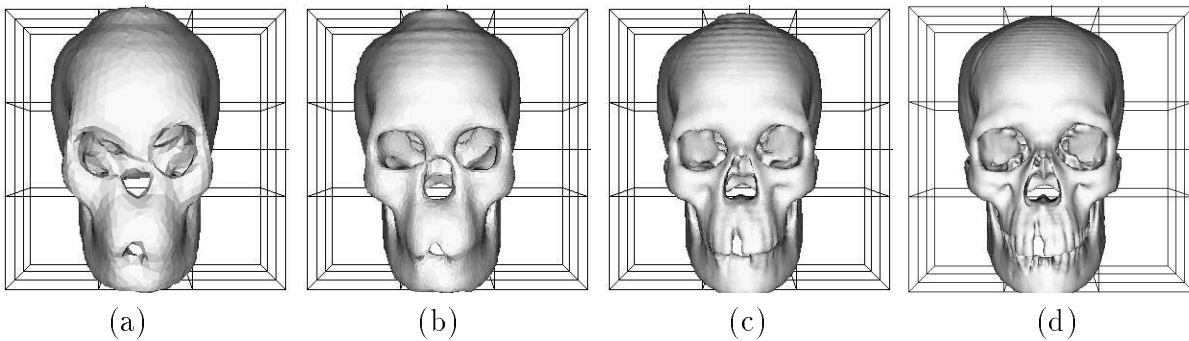


FIG. 6.6 – *Evolution de la surface avec approche multi-résolution sur l'image « skel » : (a) itération 399 sur l'image I_3 ; (b) itération 599 sur l'image I_2 ; (c) itération 799 sur l'image I_1 ; (d) itération 999 sur l'image I_0 .*

l'image. La surface est automatiquement subdivisée pour adapter la finesse de sa maille à la résolution de l'image. Dès la première itération, la surface compte plus de 65000 sommets. La Figure 6.5 montre l'évolution de la surface: d'abord la surface tombe lentement sur la partie extérieure du crâne, puis rentre à l'intérieur pour extraire le contour interne (orbites, cavité cérébrale, mâchoires).

- Le processus est lancé une seconde fois sur la pyramide P , avec approche multi-résolution, en appelant la procédure *ExtraitFormePyramide()* (Figure 5.22) avec le même icosaèdre que précédemment. La surface est automatiquement subdivisée pour adapter la finesse de sa maille à la résolution de l'image I_3 , mais ne comporte au début qu'un peu plus de 6000 sommets. Le processus attend la convergence sur chaque niveau de la pyramide avant de subdiviser la surface et de descendre d'un niveau. La Figure 6.6 montre l'évolution de la surface par cette approche: la surface esquisse rapidement la forme du crâne. Puis, le modèle se base sur cette esquisse obtenue au niveau précédent pour commencer l'évolution au niveau suivant aussi près que possible du résultat escompté.

On considère que le processus a convergé sur un niveau lorsque d'une part son énergie cinétique moyenne est inférieure à une valeur $\epsilon = 5.10^{-6}$, et d'autre part la vitesse du

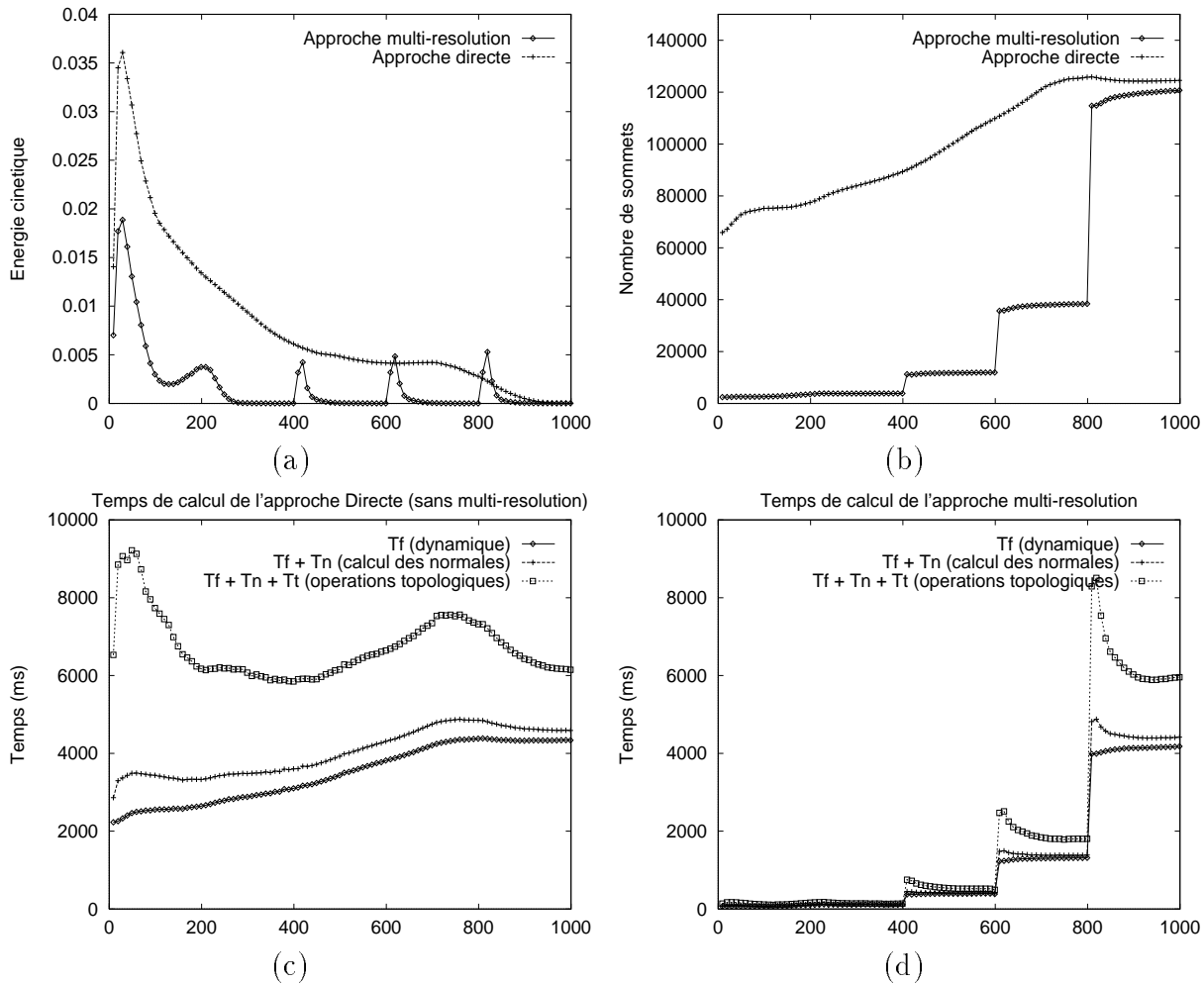


FIG. 6.7 – Comparaison entre une approche multi-résolution et une approche directe pour extraire les tissus osseux de l'image « skel » (obtenue par scanner X) : (a) énergie cinétique moyenne du modèle (normalisée par δ^2 et le nombre de sommets) ; (b) le nombre de sommets de la maille ; (c) les temps de calcul de chaque itération en vision sommée pour l'approche directe (la courbe la plus haute représente donc le temps total d'une itération) ; (d) idem que (c) pour l'approche multi-résolution.

sommet le plus rapide est inférieure à $10^{-2}\delta$.

La Figure 6.7 analyse le comportement des deux approches. Le comportement de l'approche directe est clair. La courbe décrivant l'énergie cinétique moyenne (normale à la surface) montre la convergence lente du modèle (Figure 6.7a). Le nombre de sommets est sujet à peu de changements (cf. Figure 6.7b ; à noter l'augmentation due à l'extraction de la partie interne du crâne). Le temps de calcul de chaque itération diminue progressivement grâce à l'heuristique présentée dans la Section 5.4.5 (cf. Figure 6.7c) : on voit que le calcul des déplacements des sommets prend sensiblement le même temps quelle que soit l'itération, si ce temps est normalisé par le nombre de sommets de la surface.

Le comportement de la deuxième approche met en évidence les quatre niveaux de la pyramide. Le nombre de sommets (Figure 6.7b) indique que le modèle a descendu d'un

niveau aux itérations 400, 600, et 800. L'énergie cinétique moyenne montre la convergence vers une position stable à chaque niveau. Les temps de calcul présentés dans la Figure 6.7d mettent clairement en évidence la rapidité d'obtention d'une bonne esquisse du résultat par rapport à l'approche directe. Le tableau ci-après indique les temps d'extraction pour les deux approches :

| Image | Approche | | T(s) - I_3 | T(s) - I_2 | T(s) - I_1 | T(s) - I_0 | Totaux |
|-------|------------------|---|--------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| skel | multi-résolution | T | 17,0 | 30,0 | 108,7 | 543,8 | 11' 39 |
| | | N | 1,4 | 5,5 | 22,3 | 97,6 | 2' 27 |
| | | F | 38,8 | 77,8 | 258,3 | 1242,6 | 26' 58 |
| | | = | 0' 57 | 1' 53 | 6' 30 | 31' 24 | 40' 45 |
| skel | directe | T | | | | 2701,7 | 45' 01 |
| | | N | | | | 553,8 | 9' 13 |
| | | F | | | | 3476,4 | 57' 56 |
| | | = | | | | 112' 12 | 112' 12 |

Les symboles T, N, et F, désignent respectivement les temps de calcul des opérations topologiques (détection et modification), des normales et barycentres, et de la dynamique.

Le modèle met une minute pour esquisser la forme du crâne avec environ 3800 sommets. Il met presque deux minutes de plus pour affiner son esquisse qui comporte désormais 12000 sommets. Six minutes trente secondes plus tard, le modèle possède plus de 38000 sommets. Trente minutes supplémentaires sont nécessaires au modèle pour converger sur l'image I_0 ; le modèle comporte alors 122000 sommets.

Si ces temps de calcul sont largement supérieurs aux temps de calcul des reconstructions discrètes, ils sont néanmoins loin d'être prohibitifs. De plus, l'extraction par modèle déformable intègre d'autres contraintes, comme le lissage ou la régularité de triangulation. Par ailleurs, les structures géométriques obtenues par modèle déformable sont plus simples que les structures obtenues par reconstruction discrète, et ce pour une finesse de maille similaire.

Comparaison sur une image angiographique « angio »

Nous allons tester la robustesse de l'approche multi-résolution sur des données ne comportant quasiment pas d'informations de basses fréquences. En conséquence, le modèle se base sur une esquisse très éloignée de la forme finale pour rechercher les détails. Les Figures 6.8 et 6.9 montrent l'inadéquation apparente de l'approche multi-résolution dans ce cas précis. Cependant, le modèle parvient à retrouver une partie du réseau en remontant le long des vaisseaux. Le réseau final n'a donc qu'une seule composante connexe. Le tableau

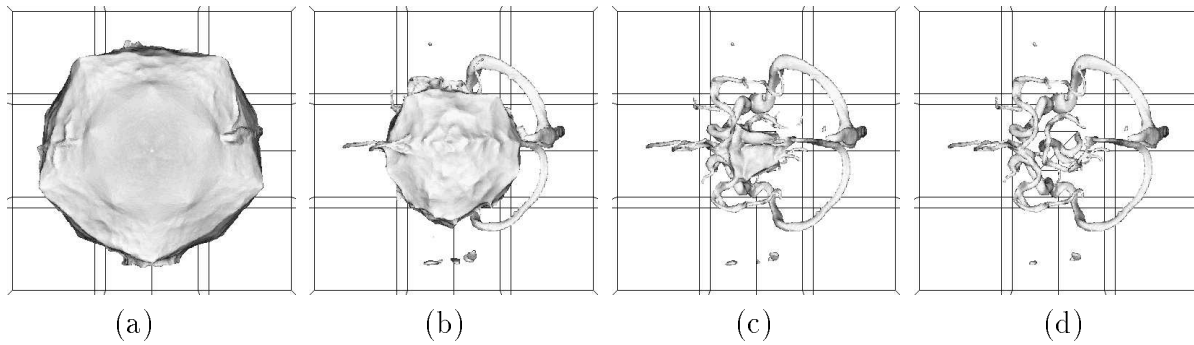


FIG. 6.8 – Evolution de la surface sans approche multi-résolution sur l'image « angio » : (a) itération 200 sur l'image I_0 ; (b) itération 400 sur l'image I_0 ; (c) itération 600 sur l'image I_0 ; (d) itération 800 sur l'image I_0 .

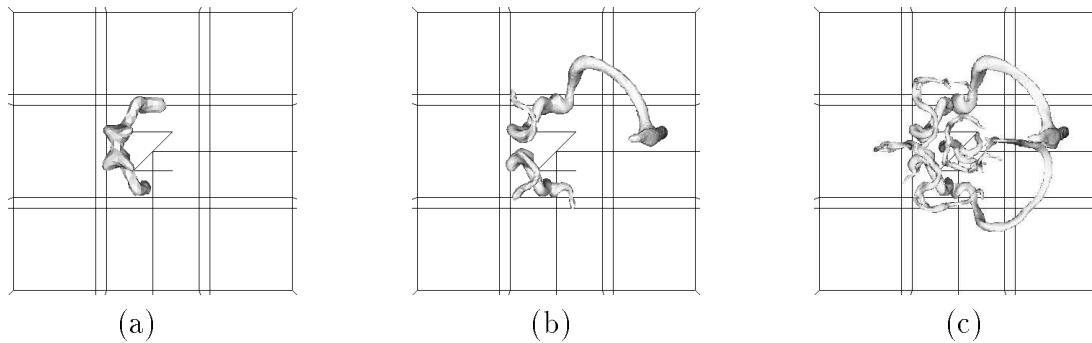


FIG. 6.9 – Evolution de la surface avec approche multi-résolution sur l'image « angio » : (a) itération 800 sur l'image I_2 ; (b) itération 1400 sur l'image I_1 ; (c) itération 3500 sur l'image I_0 .

ci-dessous présente les temps de calcul pour ces deux approches :

| Image | Approche | | T(s) – I_3 | T(s) – I_2 | T(s) – I_1 | T(s) – I_0 | Totaux |
|-------|------------|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------|
| angio | pyramidale | T | 6,8 | 0,0 | 3,8 | 196,9 | 3' 27 |
| | | N | 1,4 | 0,0 | 0,0 | 26,4 | 0' 28 |
| | | F | 4,3 | 0,1 | 27,8 | 729,2 | 12' 41 |
| | | = | 0' 13 | 0' 0 | 0' 32 | 15' 52 | 16' 37 |
| angio | directe | T | | | | 1521,0 | 25' 21 |
| | | N | | | | 344,6 | 5' 45 |
| | | F | | | | 986,4 | 16' 26 |
| | | = | | | | 47' 32 | 47' 32 |

Les symboles T, N, et F ont la même signification que précédemment.

L'approche multi-résolution est environ trois fois plus rapide que l'approche directe, mais manque les composantes ténues. Une solution à ce problème pourrait venir de l'interaction d'un utilisateur, qui initialiserait une bulle autour des composantes manquantes ; on perdrait cependant l'automatisme de l'extraction.

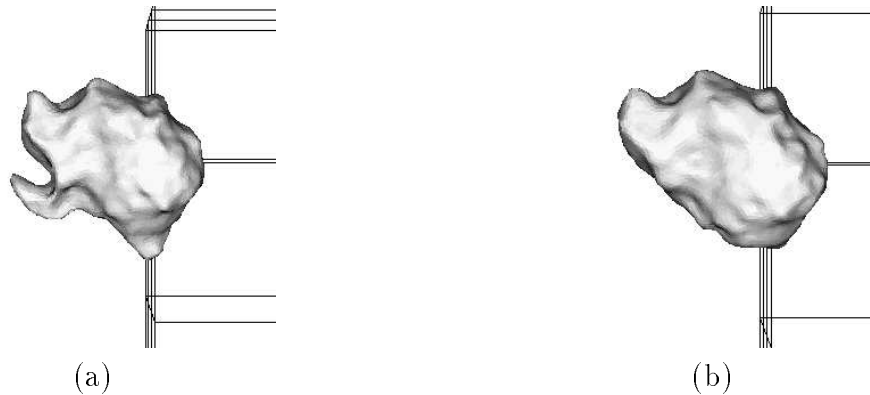


FIG. 6.10 – *Résultat finaux sur l'image « chromo » (recherche de l'iso-valeur 40,0 sur 256) : (a) approche directe ; (b) approche multi-résolution*

Comparaison sur une image confocale « chromo »

L'image « chromo » est obtenue par microscopie confocale d'un noyau de cellule dont les zones chromosomiques ont été préalablement marquées. La zone quasi-sphérique la plus noire (Figure 6.1f) est le chromosome inactif, la zone plus diffuse et plus grise est le chromosome actif. Ces données sont assez bruitées et les contours mal définis (c'est pourquoi une iso-surface extraite de ce volume de données est inexploitable en l'état ; cf. Figure 6.4a).

Nous nous intéressons à l'extraction du chromosome actif en plaçant une bulle autour de cette zone (c'est la même pour les deux approches). Comme la surface finale possède environ 4000 sommets, l'extraction multi-résolution est extrêmement rapide (1 minute et 17 secondes). L'approche directe est environ 7 fois plus lente (8 minutes et 40 secondes).

La Figure 6.10 montre les surfaces obtenues pour les deux approches. Il apparaît clairement qu'une protubérance a été ignorée par l'approche multi-résolution. Les deux surfaces se sont stabilisées à des *minima* locaux différents pour les mêmes paramètres. La Figure 6.11 montre trois coupes orthogonales dans cette image, ainsi que la trace des surfaces extraites. Comme les contours sont très mal délimités, il est difficile voire impossible de dire laquelle des deux approches donne le résultat le plus cohérent vis-à-vis des données.

Conclusion à ces deux approches

Les différents exemples présentés montrent que ce modèle s'adapte à des images de modalités très diverses. Les résultats obtenus sont très prometteurs et les temps de calcul restent raisonnables en dépit de la complexité des formes manipulées.

En outre, l'approche pyramidale peut constituer un gain de temps appréciable si elle est utilisée avec discernement. Elle est efficace si les objets recherchés ont une composante basse fréquence importante ou si les objets recherchés sont très bruités. Elle permet de sélectionner rapidement les composantes majeures de l'image. Elle fournit des représentations géométriques des constituants de l'image à différentes échelles. En contrepartie, elle est beaucoup moins efficace pour extraire des objets fins ou tubulaires, qui ont une information basse fréquence assez ténue. Elle n'est pas non plus adaptée à l'analyse de données dont les différentes composantes sont très proches les unes des autres (e.g., les images IRM) ; en effet, la construction de la pyramide a tendance à fusionner les composantes de l'image. Elle

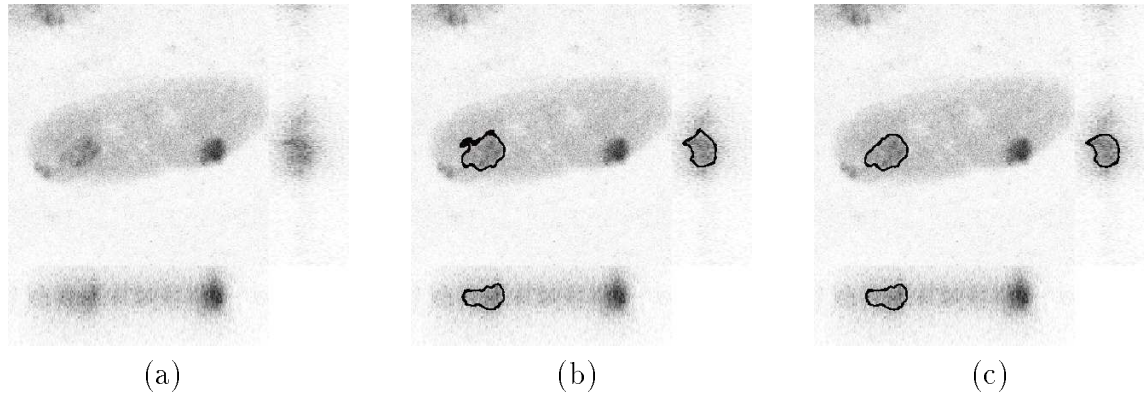


FIG. 6.11 – Adéquation modèle et données sur l'image « chromo » : (a) coupes orthogonales dans l'image « chromo » ; (b) le trait noir représente la trace dans ces coupes de la surface obtenue par approche directe ; (c) idem que (b) pour la surface obtenue par approche multi-résolution.

ne garantit pas non plus que les surfaces extraites soient strictement identiques aux surfaces obtenues avec les mêmes paramètres mais sans multi-résolution, même si les résultats sont souvent assez proches en pratique.

6.2.2 Autres exemples

Segmentation en microscopie confocale

En imagerie biologique cellulaire, il est parfois indispensable de ne marquer que la surface (i.e., le bord) des composants. Un exemple d'image de cette nature est donné sur la Figure 6.1e. C'est une image représentant un noyau de cellule polynucléaire. L'extraction des constituants de ces images ne peut pas se faire par la recherche d'une iso-valeur. Il faut au contraire rechercher l'information de contour.

En conséquence, nous utilisons la force $\mathbf{f}_{\nabla I}$, avec les coefficients $\alpha_{\nabla I} = 0,1$ et $\beta_{\nabla I} = 0,0$, pour rechercher les contours les plus marqués dans l'image. Nous initialisons une bulle autour de l'image. Pour que la bulle se rétracte sur la forme, le modèle est soumis à une légère force élastique \mathbf{f}_e ($\alpha_e = 0,2$ avec une longueur au repos nulle). L'image étant assez bruitée, le modèle est contraint par la force de régularisation \mathbf{f}_c paramétrée par $\alpha_c = 1,5$.

La Figure 6.12a montre une vue de la structure géométrique obtenue. La Figure 6.12b permet d'apprécier l'adéquation du modèle extrait vis-à-vis des données.

Segmentation d'IRM

La segmentation et la reconstruction de la zone corticale est une opération délicate: le cerveau est bordé par un grand nombre de tissus et est relié à d'autres structures anatomiques par différentes connexions (e.g., le nerf optique). Afin de simplifier le problème, le cerveau est souvent isolé manuellement de la boîte crânienne: ainsi, McInerney et Terzopoulos [87] utilisent un modèle déformable pour reconstruire un cerveau, mais les tissus environnants ont été préalablement enlevés manuellement.

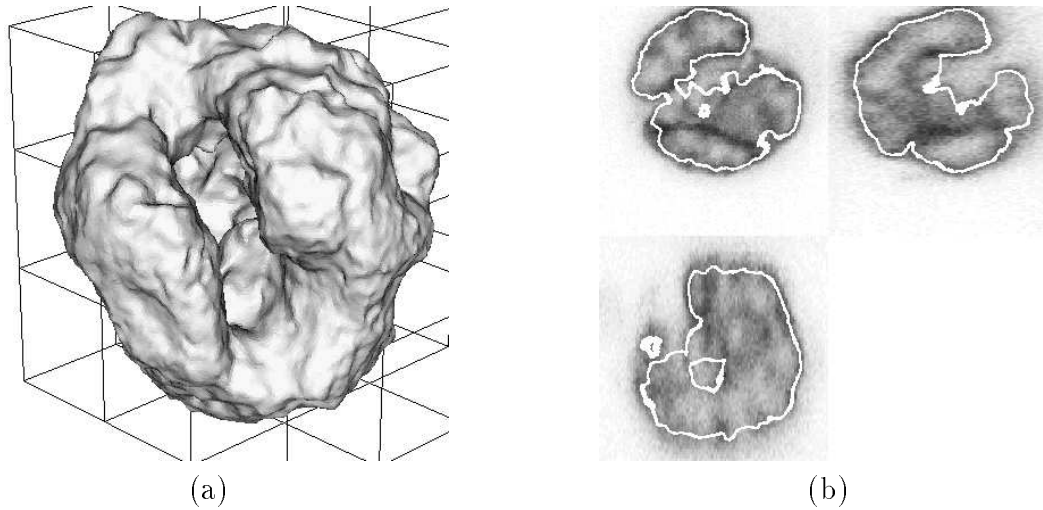


FIG. 6.12 – *Résultat finaux sur l'image « noyau » (recherche des contours maxima par la force $\mathbf{f}_{\nabla I}$): (a) vue de la représentation géométrique obtenue (environ 41000 sommets, 1 composante connexe et 2 trous topologiques); (b) trace de la surface obtenue dans les données.*

Nous présentons ici quelques expérimentations menées sur l'image IRM « enfant » (voir Figure 6.1c), sans qu'aucun pré-traitement n'ait été effectué sur l'image. Six petites bulles sont placées dans l'image du cerveau, trois dans chacun des hémisphères. Le modèle recherche l'iso-valeur 40 (sur 256) qui correspond à peu près à la frontière entre matière blanche et fluide cérébro-spinal. Le modèle est aussi soumis à des contraintes de lissage et de minimisation d'aire, pour limiter au maximum l'extension de la surface en dehors de la zone corticale. La Figure 6.13 présente les premiers résultats obtenus, qui sont encourageants. Les deux hémisphères sont correctement segmentés. Cependant, l'examen attentif du résultat montre que la surface a trouvé un « pont » suffisamment marqué entre l'hémisphère droit et la boîte crânienne. Si on laissait le modèle évoluer jusqu'à complète stabilisation, la surface engloberait non seulement les deux hémisphères, mais aussi la boîte crânienne et une partie des composantes qui la bordent. Une première solution pourrait être d'initialiser le modèle avec un plus grand nombre de bulles réparties de façon à peu près homogène dans la zone corticale d'intérêt ; on pourrait alors donner des contraintes internes plus importantes au modèle afin qu'il ne s'engouffre pas entre les « ponts ». Une deuxième solution serait d'utiliser un modèle de référence du cerveau pour contraindre le modèle [80].

6.2.3 Optimisation de la convergence

Dans la Section 5.4.6, nous avons évoqué les problèmes liés à la résolution numérique des équations d'évolution. L'étude d'un cas d'école nous a permis de choisir une méthode d'intégration robuste (méthode de Runge-Kutta) plutôt qu'une méthode rapide mais peu précise (méthode d'Euler). Il reste néanmoins un grand choix de paramétrage pour la dynamique du modèle et il est intéressant d'étudier son influence.

Certains modèles (notamment les modèles dérivés du *snake*) font le choix d'une dynamique quasi-statique, c'est-à-dire que le modèle est en équilibre à chaque instant. On peut

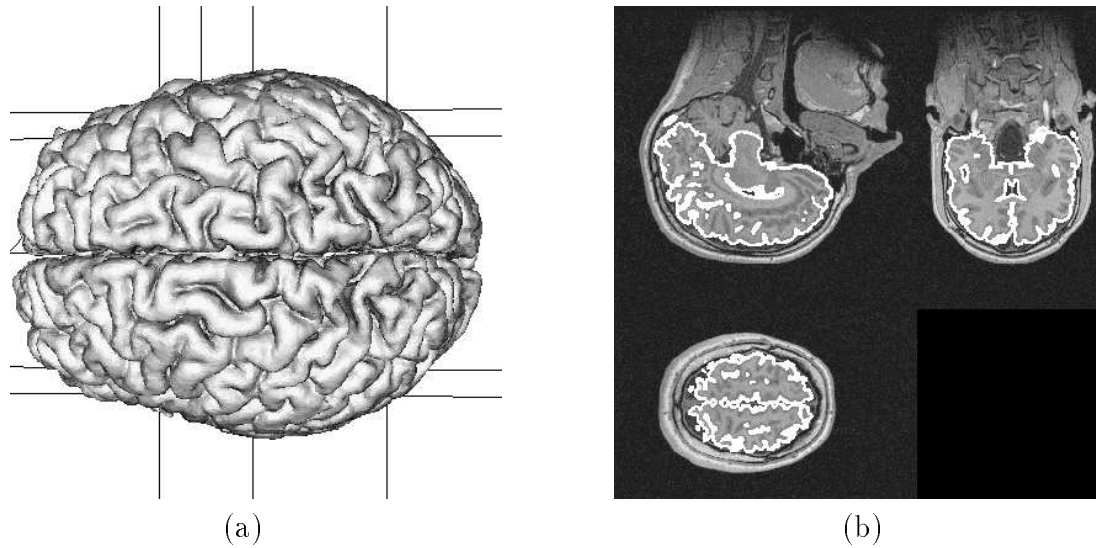


FIG. 6.13 – *Extraction des deux hémisphères cérébraux sur une image RM « enfant » non traitée: (a) vue de la structure obtenue (une légère protubérance sur l'hémisphère droit montre que la surface s'est engouffrée dans un pont entre la matière blanche et une autre structure anatomique); (b) trace de la surface obtenue dans l'image.*

voir cette dynamique comme la dynamique d'une particule de masse nulle soumise à une certaine viscosité γ . Les forces deviennent des déplacements pour les sommets. Nous avons comparé la convergence de l'approche quasi-statique et de l'approche dynamique, ainsi que leur sensibilité à la viscosité γ , sur l'image « skel ».

La Figure 6.14 montre le comportement du modèle dans le cas quasi-statique suivant le paramètre de viscosité γ . Les courbes montrent que la convergence est très sensible au choix de ce paramètre: une viscosité trop faible empêche toute convergence (alors même que le déplacement maximal de chaque sommet est automatiquement borné pour que les contraintes géométriques soient applicables) tandis qu'une viscosité trop forte la ralentit considérablement.

L'examen de la Figure 6.15a montre également que même avec un bon choix de viscosité, l'évolution quasi-statique se stabilise beaucoup plus difficilement que lorsque l'évolution suit une dynamique Lagrangienne. Il est donc difficile de donner un critère précis de convergence dans le cas quasi-statique. La Figure 6.15b montre l'influence de la viscosité sur la convergence d'une évolution Lagrangienne. Si le temps de calcul nécessaire à l'extraction des composantes de l'image est influencé par ce choix, le modèle conserve dans tous les cas de bonnes propriétés de convergence. En conséquence, des critères de stabilité assez strictes peuvent être choisis avec la dynamique Lagrangienne: le modèle est considéré comme stable lorsque d'une part son énergie cinétique moyenne est inférieure à une valeur $\epsilon = 5.10^{-6}$ et d'autre part la vitesse du sommet le plus rapide est inférieure à $10^{-2}\delta$.

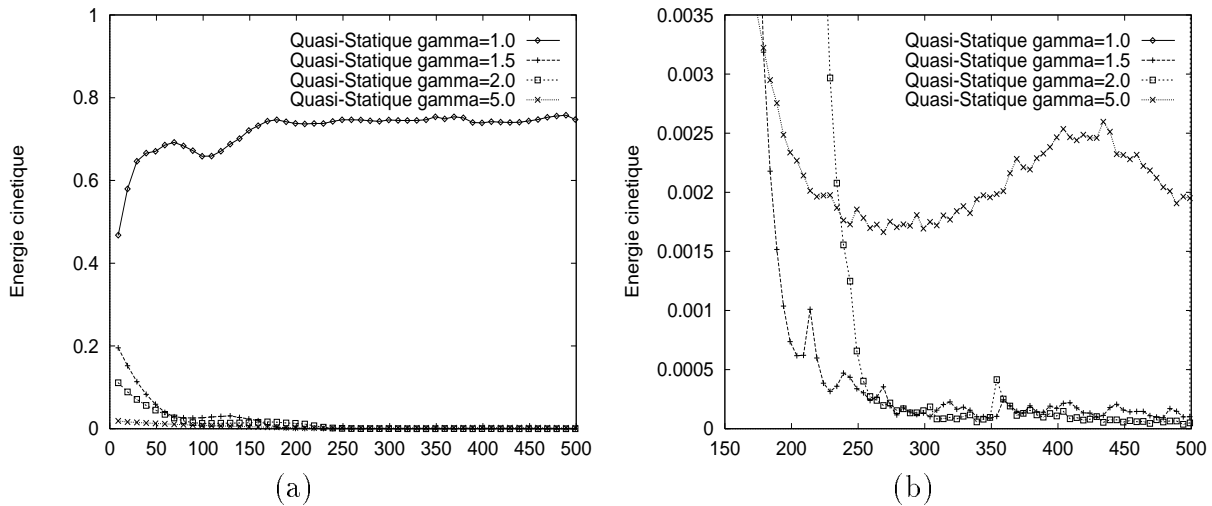


FIG. 6.14 – Convergence de l'évolution quasi-statique du modèle sur l'image « skel », en fonction de la viscosité choisie : (b) montre une vue rapprochée de (a). Les énergies cinétiques sont moyennées sur dix itérations.

6.3 Enchaînement des deux approches

Ainsi qu'il a été dit précédemment, notre modèle générique peut être initialisé avec le résultat d'un algorithme de reconstruction discrète. Afin d'obtenir une initialisation grossière mais très rapide, on peut lancer une ou plusieurs reconstructions discrètes sur une image I_3 d'une pyramide (qui est environ 140 fois plus petite que l'image I_0), avec différentes iso-valeurs. Comme l'extraction est de l'ordre du dixième de seconde, il est aisé de choisir une bonne initialisation pour le modèle. L'avantage de cette approche est d'obtenir très rapidement un bon départ pour le processus de déformation. Son inconvénient par rapport à l'approche multi-résolution proposée est le manque de souplesse vis-à-vis des formes extraites, ce qui peut les rendre inutilisables pour certains types d'images (e.g., IRM)

6.3.1 Simplification par modèle déformable

Une utilisation possible du modèle générique est d'éliminer les « bruits » de la triangulation obtenue par une reconstruction discrète comme le *marching-cubes*, c'est-à-dire de supprimer des composantes connexes ou des protubérances trop petites ou peu stables vis-à-vis de critères géométriques et physiques. Ainsi, en paramétrant \mathbf{f}_I de manière à ce qu'elle attire la surface vers la même iso-valeur que celle choisie dans la reconstruction discrète, le modèle recherche théoriquement la même iso-surface mais, prend en compte les contraintes géométriques dérivées de δ , plus des contraintes éventuelles de minimisation d'aire (force \mathbf{f}_e) ou de continuité de courbure (force \mathbf{f}_c).

Cet enchaînement entre l'approche discrète et le modèle déformable permet d'obtenir rapidement — car le modèle déformable est proche de la solution finale — des modélisations géométriques qui suivent les contraintes de régularité et de lissage données. Par ce biais, on a un dispositif *paramétrable* pour régler l'élimination des bruits et des erreurs de reconstruction de la surface.

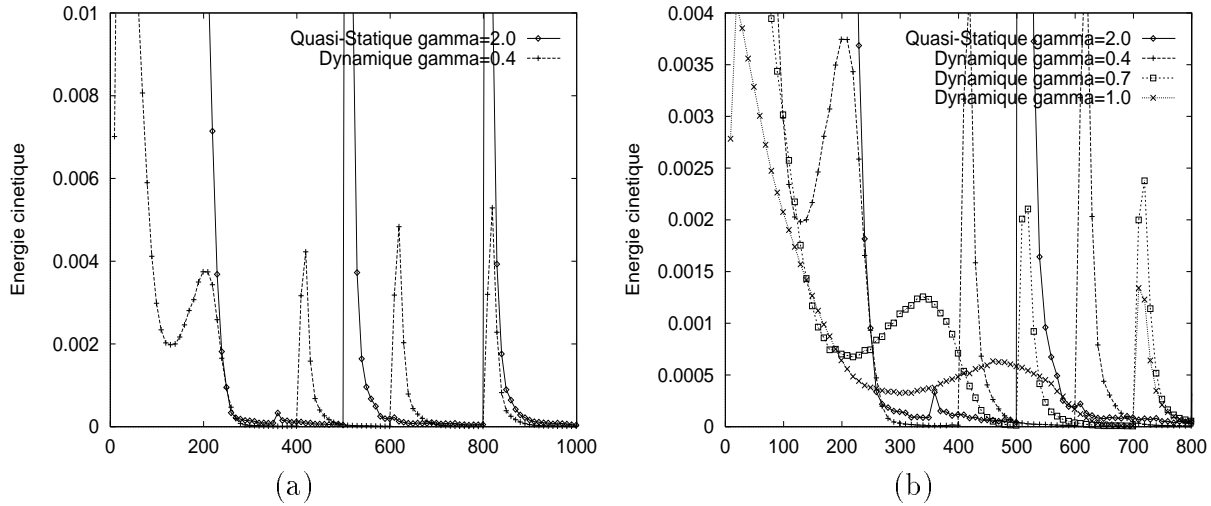


FIG. 6.15 – Convergence de l'évolution dynamique du modèle comparée à son évolution quasi-statique sur l'image « skel » par approche multi-résolution : (a) analyse de la convergence entre les deux types d'évolution ; (b) influence de la viscosité sur l'approche dynamique.

Le Table 6.3 montre les simplifications obtenues sur les surfaces triangulées extraites, pour des images de nature diverse. On constate que les complexités relatives des mailles obtenues dépendent étroitement de la nature de l'image. Pour des images bruitées (cf. image « chromo »), le gain obtenu est drastique et la structure géométrique simplifiée est nettement plus interprétable que la structure originelle (voir Figure 6.16).

| Nom | | Seuil et π_I | Reconstruction discrète | | | Après modèle déformable | | | |
|------------|---------|---------------------|-------------------------|-------|-------|-------------------------|-------|-------|-------|
| Nom | Nature | | Nsom | C.cnx | Genre | α_c | Nsom | C.cnx | Genre |
| « head » | X | 25,6 | 75004 | 68 | 33 | 0,3 | 46917 | 10 | 1 |
| « head » | | 76,8 | 117674 | 122 | 225 | 0,3 | 70155 | 6 | 69 |
| « angio » | aRM | 19,2 | 107754 | 687 | 334 | 0,1 | 46170 | 58 | 29 |
| « angio » | | 25,6 | 68810 | 395 | 83 | 0,1 | 25942 | 9 | 8 |
| « chromo » | Confoc. | 40,0 | 84772 | 3247 | 967 | 0,5 | 6792 | 4 | 0 |
| « cœur » | Découpe | 128,0 | 42562 | 43 | 56 | 6,0 | 41808 | 1 | 5 |

TAB. 6.3 – Simplification de structures géométriques par modèle déformable. Pour chaque image, le seuil choisi pour la reconstruction discrète est donné ainsi que les caractéristiques topologiques des structures résultantes. Les caractéristiques topologiques de ces mêmes structures après simplification par notre modèle déformable sont données, avec la régularité de courbure spécifiée (coefficient α_c).

Cependant, la simplification opérée n'est pas sans incidence sur la forme représentée : la simplification par un modèle déformable peut supprimer de l'information ténue mais néanmoins significative. En effet, le modèle élimine naturellement les structures tubulaires de faible rayon ou les plaques minces : les structures vasculaires ne sont pas forcément préservées, comme le montre la Figure 6.17.

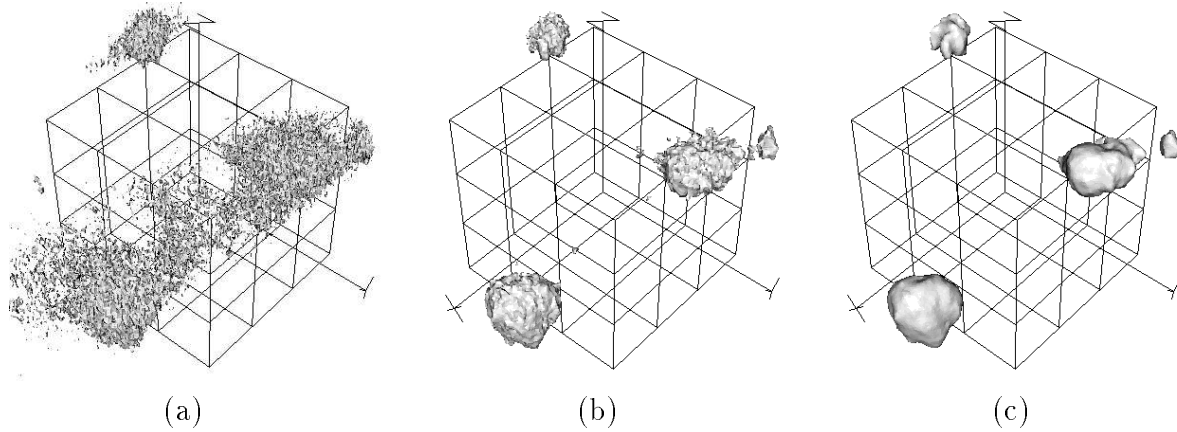


FIG. 6.16 – *Simplification par modèle déformable sur l'image « chromo » obtenue par microscopie confocale : (a) résultat de la reconstruction discrète ; (b) après simplification avec une contrainte de régularité de courbure $\alpha_c = 0,05$; (c) après simplification avec une contrainte de régularité plus importante $\alpha_c = 0,5$.*

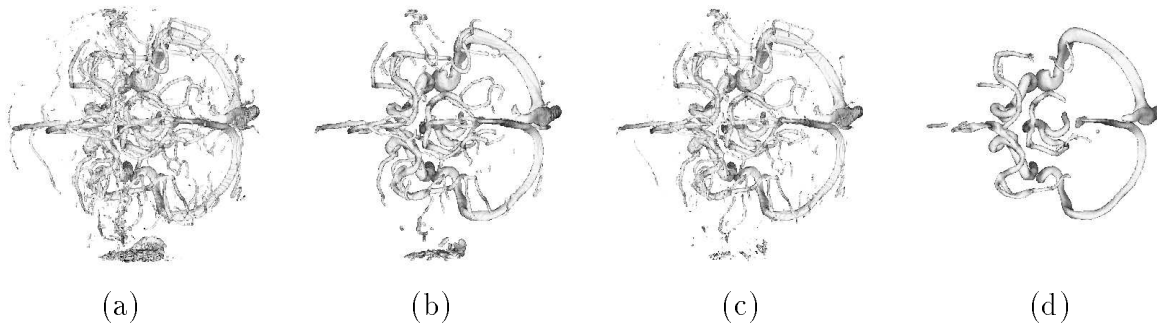


FIG. 6.17 – *Simplification par modèle déformable sur l'image « angio » (aRM à contraste de phase) : (a) résultat de la reconstruction discrète pour un seuil de 19,2 sur 256 ; (b) après simplification avec une contrainte de régularité de courbure $\alpha_c = 0,1$; (c) résultat de la reconstruction discrète pour un seuil de 25,6 sur 256 ; (d) après simplification avec une contrainte de régularité de courbure $\alpha_c = 0,1$.*

Correction de l'anisotropie

Certaines modalités d'acquisition fournissent des images fortement anisotropes (e.g., en imagerie confocale ou en imagerie par découpe). Comme les algorithmes de reconstruction discrète ne tiennent pas compte des dimensions réelles de l'image, ils ne peuvent corriger les défauts induits par l'anisotropie. Au contraire, un modèle déformable qui évolue dans un espace continu réel prend en compte de façon transparente l'anisotropie des images et peut s'appuyer sur des contraintes internes pour corriger ce phénomène indésirable. La Figure 6.18 montre cette capacité de notre modèle déformable sur l'image « cœur », dont l'anisotropie est environ d'un facteur 5 entre l'axe Z et les autres axes.

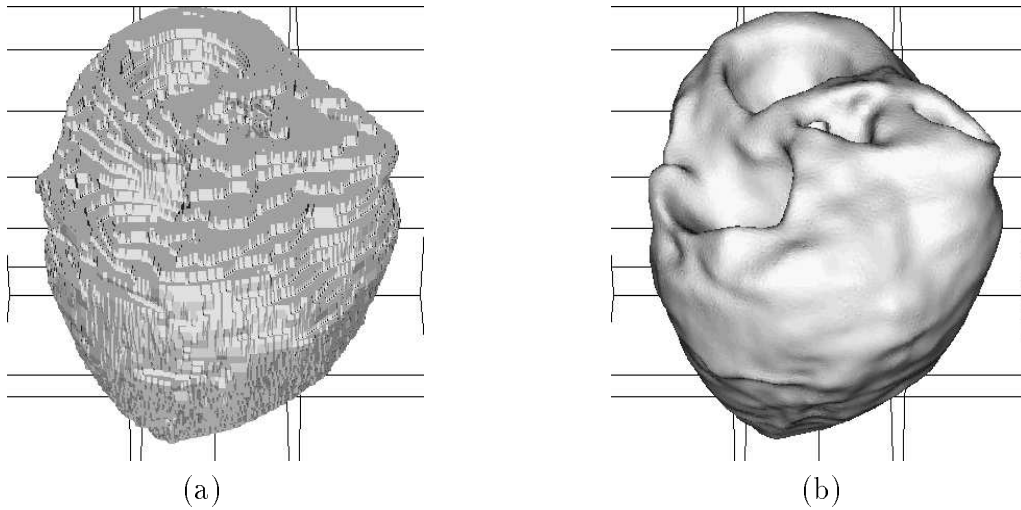


FIG. 6.18 – Correction de l'anisotropie des images par utilisation des contraintes de régularité d'un modèle déformable : (a) reconstruction discrète de l'image « cœur » ; (b) surface obtenue avec une contrainte de régularité de courbure $\alpha_c = 6,0$.

6.4 Robustesse du modèle déformable

6.4.1 Vis-à-vis de la multi-résolution

Reconstruire une image représentant l'intérieur d'une surface triangulée est un problème difficile, auquel nous ne nous sommes pas intéressés faute de temps. Il est donc difficile de comparer *exactement* les résultats de différentes approches sur un même volume de données. En revanche, on peut comparer certaines caractéristiques qui sont assez fiables : le « volume » de l'intérieur de la surface et, dans une moindre mesure, l'aire de la surface. Les caractéristiques topologiques sont beaucoup moins fiables. Le tableau suivant montre les aires et « volumes » obtenus (l'unité de l'espace est purement abstraite) :

| Image | Approche | Aire | Ecart | Volume | Ecart |
|------------|------------|--------|--------|---------|--------|
| « skel » | directe | 4,611 | 0,98 % | 0,08247 | 0,30 % |
| | pyramidale | 4,566 | | 0,08222 | |
| « angio » | directe | 0,4728 | 7,9 % | 0,00263 | 3,7 % |
| | pyramidale | 0,4367 | | 0,00253 | |
| « chromo » | directe | 0,4399 | 12,3 % | 0,01839 | 6,3 % |
| | pyramidale | 0,3888 | | 0,01727 | |

Les différences obtenues peuvent avoir différentes origines :

- les surfaces obtenues n'ont pas le même nombre de composantes connexes. L'approche directe détecte des petites composantes invisibles à l'approche pyramidale car la bulle balaye l'image avec la résolution maximale dans cette approche. Or, dans l'approche multi-résolution, la surface passe aux travers de ces petits constituants qui n'ont pas de composantes basse fréquence.

- la convergence des processus n'est jamais totale et un modèle dont la dynamique est régie par des équations différentielles n'atteint jamais vraiment son point d'équilibre.
- le modèle peut converger vers des *minima* locaux différents, et ce, pour une paramétrisation identique. Cela provient du fait que rien ne garantit que le minimum global d'énergie soit atteint lorsque le modèle se stabilise.

En pratique, les structures géométriques ont peu de chance de différer si les objets recherchés ne sont pas trop minces ou trop étroits. Un bruit important peut aussi aboutir à des différences dans les structures obtenues, mais seule l'introduction de connaissances externes aux données pourrait aider le modèle à différencier entre bruits et données.

6.4.2 Vis-à-vis du paramétrage

Là-encore, la sensibilité de la structure extraite aux paramètres choisis pour le modèle est très dépendante des données. Néanmoins, les différentes expérimentations que nous avons menées nous ont conduits aux observations suivantes :

- Les paramètres de la dynamique du modèle ont une très faible influence sur la forme extraite mais peuvent modifier de manière conséquente son temps d'obtention. Avec l'évolution Lagrangienne choisie, le modèle a de bonnes propriétés de convergence. Nous avons constaté que le paramètre de viscosité γ dépend essentiellement de la nature de l'image et sa valeur critique peut donc être déterminée une fois pour toute pour chaque modalité.
- Les paramètres réglant les contraintes internes du modèle revêtent une grande influence sur les images fortement bruitées, auquel cas il est indispensable d'introduire de fortes contraintes internes, et sur les images constituées d'un grand nombre de composantes dont les caractéristiques sont similaires ; dans ce contexte, le réglage des contraintes doit être suffisamment précis pour que la surface esquisse la forme tout en ignorant les liens vers les autres composantes.
- Pour les images dont les composantes sont différenciées par l'intensité de leurs voxels (force externe \mathbf{f}_I), l'iso-valeur choisie (coefficient π_I) doit correspondre précisément aux caractéristiques du bord recherché. L'examen de l'image sur différentes coupes permet de déterminer l'iso-valeur de façon empirique. Sur certaines images, il est possible d'exploiter l'information de l'histogramme des intensités pour déduire l'iso-valeur « optimale ». Pour les images dont les composantes sont différenciées par l'examen de l'information de gradient (force externe $\mathbf{f}_{\nabla I}$), le paramétrage est considérablement simplifié, car il ne s'agit plus que de trouver un juste équilibre entre l'intensité des contraintes internes et externes.

Dans tous les cas, les images sous-échantillonnées obtenues par le calcul de la pyramide constituent un véritable laboratoire d'expérience pour tester la qualité d'un paramétrage, notamment pour estimer les meilleurs paramètres de dynamique. De plus, comme l'a remarqué Elomary [40], l'approche multi-résolution limite l'influence du paramétrage en guidant le modèle des basses fréquences de la forme vers ses hautes fréquences.

6.5 Conclusion

Pour effectuer toutes ces expérimentations, un atelier de traitement dédié a été développé (programmation en C et C++, interface sous X et Xview). Il fonctionne sous SunOS, Solaris et Linux. Il rassemble plusieurs outils : des utilitaires de visualisation, transformation et conversion d'images tridimensionnelles, une application gérant le modèle déformable générique et une application permettant d'examiner l'adéquation entre image et modèle.

Cet atelier nous a permis de tester la validité de nos approches et de mesurer l'étendue de leur utilisation. Nous avons ainsi été à même de :

- tester la puissance et les limites de la reconstruction discrète ;
- mettre en œuvre un modèle dynamique déformable, capable d'appréhender des formes arbitrairement complexes de manière automatique ;
- valider le modèle déformable sur un ensemble de données volumétriques acquises par diverses modalités (scanner X, IRM, angiographie RM, microscopie confocale) ;
- estimer les gains offerts par une approche multi-résolution du problème de la segmentation/reconstruction par modèle déformable ;
- chaîner un processus de reconstruction discrète avec un processus de déformation pour atteindre trois objectifs différents : avoir une initialisation rapide pour le modèle déformable, simplifier la structure géométrique à l'aide de critères paramétrables, extraire des structures géométriques viables de données anisotropes ;
- estimer la robustesse du modèle pour la segmentation/reconstruction ;
- vérifier l'adéquation entre la structure extraite et l'image tridimensionnelle en calculant la trace de la surface dans l'image.

C'est certainement le dernier point qui mériterait le plus d'attention. Cependant, pour le moment, on ne dispose malheureusement d'aucun moyen informatisé pour vérifier la validité d'une structure extraite d'une image médicale ; seul l'examen du résultat par un expert peut la déterminer. Pour les images issues de microscopie confocale, le problème est encore plus délicat, car la structure reconstruite doit justement aider le biologiste dans sa compréhension de l'organisation des composantes microscopiques ; il n'y a donc pas de « modèle de référence » pour juger de la qualité de la structure extraite.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Résumé et contributions

Cette thèse a approfondi deux approches majeures de l'extraction de représentation géométriques à partir d'images tridimensionnelles :

- Les similitudes entre les deux principales méthodes de reconstruction discrète, le *marching-cubes* qui construit une iso-surface et le suivi de surface qui extrait une surface digitale, nous ont donné l'idée d'introduire des considérations de topologie digitale dans la définition d'une iso-surface. Par une approche formelle, nous avons défini les $\kappa\lambda$ -iso-surfaces par un ensemble de propriétés, puis nous avons montré comment les construire de manière automatique pour un ensemble de couple de connexité (κ, λ) . Les $\kappa\lambda$ -iso-surfaces définies sont des 2-variétés combinatoires sans bord, qui représentent une surface fermée de \mathbb{R}^3 de façon combinatoire. Elles séparent effectivement les voxels du devant des voxels du fond en accord avec le couple de connexité (κ, λ) choisi. Grâce à ses propriétés, une $\kappa\lambda$ -iso-surface est donc directement exploitable par toute application qui manipule des surfaces.

Par ailleurs, la formulation des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces montre qu'elles sont étroitement liées aux surfaces digitales : il apparaît que leur graphe est exactement le graphe d'adjacence entre surfels de l'interface de cette image, pour ce couple de connexité. Cette propriété a deux conséquences intéressantes :

- D'un point de vue pratique, il est possible d'extraire une surface triangulée fermée (une 2-variété dans \mathbb{R}^3 sans bord) connexe, qui représente le bord d'un constituant de l'image, au moyen d'un algorithme de suivi de surfaces. Le gain en temps de calcul est considérable par rapport à un algorithme de *marching-cubes* : si n^3 est la taille de l'image, alors le calcul d'une iso-surface englobant une composante de l'image peut se faire en un temps en $O(n^2)$ par un algorithme de suivi, comparativement à un temps de calcul en $O(n^3)$ par l'algorithme du *marching-cubes*.
- D'un point de vue théorique, cela montre que le graphe de $\sigma_{\kappa,\lambda}$ -adjacence entre les surfels de l'interface de l'image, considéré avec une relation d'adjacence $\sigma_{\kappa,\lambda}$, est le graphe d'une 2-variété combinatoire sans bord. Une image binaire peut donc être entièrement déterminée par la donnée d'une 2-variété combinatoire.

En outre, toute $\kappa\lambda$ -frontière a une représentation combinatoire sous forme de 2-variété fermée, si $(\kappa, \lambda, \sigma_{\kappa,\lambda})$ est un triplet de Jordan.

L'application de cet algorithme de reconstruction discrète à des données biomédicales a mis en valeur sa rapidité (environ 20s pour extraire l'iso-surface d'une image de 8Mo) et son efficacité sur les images acquises par tomodensitométrie ou sur des angiographies bien contrastées. En contrepartie, les limites de cet algorithme ont été identifiées : sensibilité aux bruits, à l'anisotropie, et à la nature des images (images pré-segmentées ou segmentables par seuillage), incapacité à exploiter l'information de contour.

- Les méthodes précédentes étant incomplètes, nous avons examiné une nouvelle approche à la segmentation/reconstruction, appelée approche par *modèle déformable*. Les modèles déformables ont été introduits dans le domaine de l'analyse d'images par Kass, Witkin et Terzopoulos [62]. Plutôt que d'effectuer l'opération de segmentation et l'opération de reconstruction séparément, un modèle géométrique *plongé dans l'image* peut, en variant ses paramètres (donc sa forme), estimer progressivement un ou plusieurs constituants de l'image. Le calcul de la variation des paramètres se fait par un examen de l'image au voisinage de la surface ; le calcul est régularisé par des contraintes associées au modèle (régularité de courbure, minimisation d'aire, points de passage, etc.).

Ce cadre très général a permis le développement de modèles déformables de formalismes très divers. En se basant sur l'étude de ces modèles et de leurs spécificités, nous avons extrait un ensemble de caractéristiques qu'un modèle déformable doit posséder pour extraire les surfaces des constituants d'images 3D de modalités variées. Nous avons proposé un *modèle générique*, qui fait la synthèse d'une partie de ces caractéristiques :

- c'est un modèle *explicite*, de type *masse-ressort*, construit sur une maille triangulée fermée. Quelles que soient ses déformations, la maille est *plongée* dans \mathbb{R}^3 sans auto-intersection. Ainsi, le modèle représente toujours le bord d'une 3-variété dans \mathbb{R}^3 , i.e. un volume. La géométrie de la forme est déterminée par la position des sommets, qui suivent les lois de la mécanique Lagrangienne. Les avantages des modèles masse-ressort sont : la simplicité de leur mise en œuvre, la rapidité de calcul de la dynamique, et la définition intuitive des contraintes internes et externes.
- ce modèle possède une spécificité importante des *modèles Euleriens de propagation de fronts* : la capacité à approcher des formes arbitrairement complexes. En introduisant un invariant géométrique, un ensemble de contraintes géométriques simples (distance entre sommets) permet de calculer rapidement si la géométrie des sommets correspond à la topologie de la maille ; si tel n'est pas le cas, des opérateurs topologiques sont appliqués sur la maille. Par ce biais, le modèle adapte automatiquement la topologie de la maille aux déplacements des sommets, ce qui lui permet d'extraire des surfaces de forme quelconque. Le temps de calcul de ces traitements reste très raisonnable (en $O(n \log n)$ si n est le nombre de sommets) :

environ 5s pour 65000 sommets sans heuristique, et moins de 2s pour 125000 sommets si l'heuristique optimise 85% des sommets.

- la dynamique du modèle, définie par ses forces internes et externes, peut s'interpréter comme la minimisation d'une énergie similaire à celle des *modèles actifs*. Les deux contraintes internes \mathbf{f}_e et \mathbf{f}_c correspondent aux deux termes de régularisation de ces modèles (minimisation d'aire et minimisation de courbure). La force externe $\mathbf{f}_{\nabla I}$ permet de rechercher les maxima de potentiel d'une image de contour, et correspond à la minimisation d'une énergie externe basée sur l'intensité des gradients de l'image. Notre modèle inclut donc le formalisme de l'adéquation modèle/données par minimisation d'énergie.
- ce modèle peut appréhender le problème de la segmentation/reconstruction par une approche multi-résolution et extraire les composantes de l'image de l'esquisse aux détails. Pour ce faire, un algorithme de construction d'une pyramide d'images tridimensionnelles a été mis au point ; il autorise un facteur de réduction arbitraire. En évoluant dans cette pyramide d'images, le modèle extrait les formes des basses fréquences vers les hautes fréquences et fournit leur représentation géométrique à différentes échelles.

Ce modèle a été testé sur un ensemble d'images biomédicales, provenant de modalités d'acquisition variées. Le modèle peut à la fois exploiter des données brutes ou des données de contour. Comme les tests ont été effectués sans interaction avec l'utilisateur (à part dans le choix des paramètres initiaux), les résultats obtenus sont très prometteurs et montrent la souplesse du modèle. L'approche multi-résolution permet un gain de temps important par rapport à l'approche directe, mais ne convient pas à toutes les modalités. Son usage permet d'estimer rapidement les « meilleurs » paramètres vis-à-vis des données. Les formes extraites de l'esquisse aux détails sont aussi moins sensibles au paramétrage choisi.

- Enfin, nous avons combiné les deux approches proposées en enchaînant le résultat d'une reconstruction discrète avec notre modèle générique. La reconstruction discrète construit effectivement une surface triangulée fermée plongée dans \mathbb{R}^3 , de topologie arbitrairement complexe (parfois plusieurs milliers de composantes connexes ou de trous). Notre modèle générique peut déformer de telles surfaces. Le résultat du premier sert d'initialisation au second. Nous montrons ainsi que notre modèle peut simplifier ou améliorer les iso-surfaces, mais aussi qu'un algorithme de reconstruction discrète peut fournir rapidement une bonne initialisation à un processus de modèle déformable.

7.2 Perspectives

Les recherches menées ont ouvert un certain nombre de directions de recherche qui semblent intéressantes à poursuivre :

1. En ce qui concerne les reconstructions discrètes, il serait utile d'étendre la définition des $\kappa\lambda$ -iso-surfaces aux dimensions supérieures. Certaines applications traitent en effet

des données quadri-dimensionnelles (spatio-temporelles ou espace multi-échelle) et nécessitent le calcul de *bi-iso-surfaces* [42] ou d'iso-hyper-surfaces à partir de ces données. Une piste sérieuse à explorer est d'exploiter le lien entre iso-surface et surface digitale. Des auteurs comme Udupa [135] ou Herman [53, 54] se sont en effet déjà intéressés aux propriétés de Jordan des surfaces digitales en dimension quelconque, ainsi qu'à la définition d'une adjacence entre leurs éléments. En définissant une iso-surface à partir d'une surface digitale, on pourrait sans doute dériver des caractéristiques similaires à celles obtenues en dimension 3.

2. Pour le modèle générique, divers prolongements peuvent être envisagés :

- l'introduction de connaissances *a priori* dans l'évolution du modèle permettrait sans doute d'améliorer la robustesse de l'extraction, en limitant l'espace de recherche. Ainsi, on pourrait traduire les informations d'un atlas anatomique, doté à la fois d'un modèle de référence et d'une carte de la variabilité des structures, en contraintes sur le modèle. La combinaison de ces deux outils serait certainement très profitable sur des images IRM de cerveaux.
- similairement à certains modèles bidimensionnels [20, 59], il serait intéressant de faire coopérer l'approche modèle de surface avec une approche région de la segmentation. Une difficulté réside dans la masse des données à traiter pour une approche région (en $O(n^3)$ si n^3 est la résolution de l'image). Une solution pourrait venir du théorème de Green, qui transforme le calcul sur un volume par le calcul d'une variation autour de la surface.
- la dynamique de la propagation de fronts est utilisée par certains auteurs dans les modèles implicites pour rechercher les formes d'une image. Cette dynamique s'exprime très simplement en fonction de la courbure de la surface et de l'intensité de l'image gradient. On peut donc très simplement exprimer cette dynamique sur notre modèle explicite. Le problème de l'instabilité numérique de la formulation implicite serait donc évité. La comparaison de ces deux dynamiques (propagation de fronts et dynamique Lagrangienne) *avec le même modèle* permettrait sans doute de déterminer avec plus d'objectivité les champs d'application respectifs des deux approches.
- ce modèle possède une maille relativement régulière. Des parties relativement planes de la surface pourraient ainsi être représentées avec beaucoup moins de sommets. Certains auteurs proposent donc une densité de sommets fonction de la courbure [30]. Malheureusement, il est difficile d'optimiser le nombre de sommets sans perdre les avantages de la détection et du traitement rapide des transformations topologiques. Une solution pourrait venir de l'utilisation d'une distance non-Euclidienne paramétrée par la courbure locale : les contraintes géométriques seraient alors utilisées en l'état.

Parallèlement à ces pistes de recherche, on peut s'intéresser aux autres applications du modèle déformable présenté. L'adaptation automatique de la topologie à la géométrie des

sommets constitue une spécificité qui peut être exploitée avantageusement dans un certain nombre d'applications :

- une première application est la reconstruction de données non-structurées (typiquement un nuage de points acquis par radiométrie ou des informations éparses issues de mesures géologiques). Bittar [13] a utilisé une version simplifiée de ce modèle, ne comprenant pas les variations de topologie, pour reconstruire de telles données. Il serait intéressant de tester les possibilités de notre modèle dans ce cadre, où les formes recherchées sont souvent complexes.
- une deuxième application est la modélisation d'objets fluides ou visqueux, hautement déformables. De tels objets sont fréquemment employés en synthèse d'images et en animation [35, 34]. L'approche usuelle est de manipuler des objets définis de manière implicite. Un modèle explicite capable de reproduire le comportement de ces objets pourrait constituer un complément aux modèles implicites : l'utilisateur aurait le choix entre les deux représentations et les utiliserait dans le contexte où elles sont les plus efficaces.
- la modélisation d'objets physiques peut constituer un troisième champ d'application. Ainsi, la chirurgie assistée par ordinateur (plannification, simulation) nécessite des modèles représentant au mieux les différents tissus du corps humain. Ces objets sont déplacés, découpés ou sectionnés. Les modèles qui les représentent doivent simuler un tel comportement. Notre modèle a sans doute quelques atouts pour répondre à ce besoin.
- la segmentation/reconstruction d'images spatio-temporelles peut aussi constituer un champ d'expérimentations pour notre modèle. Sa formulation rend naturel le suivi des formes au cours du temps. Pour rendre compte au mieux des déformations, il faudrait sans doute étendre sa formulation physique en lui adjoignant des paramètres globaux de formes.

Cette thèse nous a permis d'explorer un aspect majeur de l'analyse d'images tridimensionnelles : la transformation de données volumétriques en représentations géométriques de surface. Les approches suivies sont à la confluence de différents domaines : topologie digitale et topologie des surfaces, modélisation géométrique et dynamique, segmentation, multi-résolution. Ces recherches ont conduit à des résultats aussi bien théoriques que pratiques, qui ne sont pas limités à la seule segmentation/reconstruction d'images, mais touchent d'autres domaines connexes.

Annexe A

Eléments de topologie des surfaces

Ce chapitre rassemble des définitions essentielles en topologie des surfaces ainsi que des résultats majeurs. Il permet de mieux comprendre les différentes définitions associées au terme générique « surface » et qui peuvent être parfois contradictoires. Deux sections ont bénéficié d'apports personnels : la Section A.1.2 étend la notion d'orientation cohérente pour les surfaces fermées de \mathbb{R}^3 non connexes ; la Section A.1.4 fournit un analogue continu à une surface définie combinatoirement. Cette analogue nous permet de déterminer si la surface combinatoire est « plongée » ou « immergée » lorsqu'on l'envoie dans \mathbb{R}^3 .

A.1 Définitions

A.1.1 Variétés et surfaces

Définition A.1 (Plongement) Un *plongement* d'un espace topologique (X, T) dans un espace topologique (Y, T') est un homéomorphisme entre (X, T) et un sous-espace Y' de Y .

⇒ Suivant la manière dont cet homéomorphisme s'étend à un homéomorphisme de l'espace environnant tout entier, le plongement est appelé « apprivoisé » (“tame”) ou « sauvage » (“wild”) [57]. Par exemple un plongement fractal est qualifié de sauvage.

⇒ Il faut bien opposer plongement et *immersion*. On parle d'immersion lorsque l'application f de (X, T) vers (Y, T') n'est pas un homéomorphisme. Ainsi la bouteille de Klein ne peut pas être *plongée* dans \mathbb{R}^3 ; elle peut être *immergée* dans \mathbb{R}^3 .

Définition A.2 (Variété topologique (de dimension m) [48]) Une variété topologique M de dimension m est un espace topologique séparé non vide où tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m ou du demi-espace H^m . On appelle *bord* de M , et on note ∂M , l'ensemble des points de M qui possèdent un voisinage homéomorphe à un ouvert de H^m . On dira souvent que M est une *m -variété*.

⇒ Aleksandrov [1] rajoute la contrainte de connexité aux variétés topologiques.

Définition A.3 (n -variété (sans bord) dans \mathbb{R}^m) Une n -variété M dans \mathbb{R}^m , où $m \geq n$, est un sous-espace de \mathbb{R}^m qui est localement homéomorphe à \mathbb{R}^n . Si elle est compacte, on dira qu'elle est *fermée*.

Définition A.4 (n -variété avec bord dans \mathbb{R}^m) Une n -variété avec bords M dans \mathbb{R}^m , où $m \geq n$, est un espace localement connexe par arcs dont le bord est localement homéomorphe à H^n et dont les points intérieurs ont un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Définition A.5 (Surface (topologique)) Une *surface (topologique)* est usuellement définie comme une *variété topologique* de dimension 2 (compacte ou non, connexe ou non, avec ou sans bord) [48].

Une surface compacte sans bord sera dite *fermée*.

\Rightarrow Une surface définie comme une variété topologique de dimension 2 peut « s'auto-intersecter » (au sens intuitif du mot) dans un espace où elle est immergée. Si cette surface est une 2-variété dans \mathbb{R}^3 , on dit qu'elle a été *plongée* dans \mathbb{R}^3 (cf. *plongement*), sinon on dit qu'elle a été *immergée* dans \mathbb{R}^3 .

\Rightarrow Certains auteurs définissent une surface comme une 2-variété (avec ou sans bord) dans \mathbb{R}^3 [57]. Une surface définie comme une 2-variété dans \mathbb{R}^3 ne peut pas « s'auto-intersecter dans \mathbb{R}^3 » ou avoir des points singuliers. On peut montrer qu'elle est aussi orientable (Théorème A.34).

A.1.2 Orientation des 2-variétés dans \mathbb{R}^3 sans bord

Lorsque l'on manipule des surfaces fermées dans \mathbb{R}^3 , il est souvent intéressant d'associer une *orientation* à ces surfaces afin de leur définir un *intérieur* et un *extérieur*. C'est toujours possible grâce au théorème de Jordan (Théorème A.31). S'il est aisé de dire si deux surfaces ont une orientation cohérente par rapport à une autre, le cas de n surfaces fermées disjointes est moins trivial. Nous montrons ici comment définir un *intérieur* et un *extérieur* à un ensemble de surfaces fermées disjointes orientées de façon cohérente.

Définition A.6 (2-variété dans \mathbb{R}^3 orientée ; intérieur et extérieur) Si M est une 2-variété dans \mathbb{R}^3 fermée et connexe (donc orientable), l'ensemble M sépare \mathbb{R}^3 en deux composantes connexes d'après le théorème de Jordan (Théorème A.31). *Orienter* M , c'est désigner une des composantes de \mathbb{R}^3 comme étant l'*intérieur* de M et l'autre comme étant l'*extérieur*. On désignera par $\text{Int}(M)$ l'intérieur de M et $\text{Ext}(M)$ l'extérieur de M . On a immédiatement que M est le bord de $\text{Int}(M)$ et de $\text{Ext}(M)$.

Hoffmann [57] définit la notion d'*orientation cohérente entre deux surfaces fermées* :

Définition A.7 (Orientation cohérente) Soit M et N deux 2-variétés dans \mathbb{R}^3 fermées, connexes, orientées et disjointes. On dit que M et N sont *orientées de façon cohérente* si

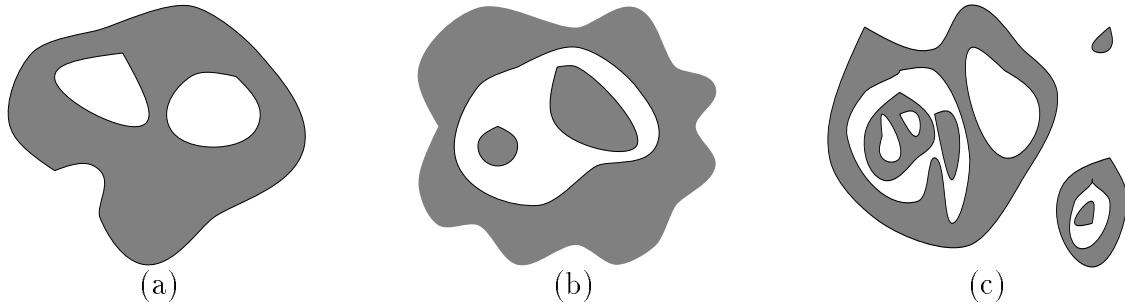


FIG. A.1 – *Intérieur et extérieur d’une surface composée de plusieurs composantes connexes orientées (surface représentée en dimension 2) : la définition d’orientation cohérente de Hoffmann [57] peut s’appliquer pour les surfaces représentées sur (a) et (b) ; en revanche, cette définition n’est pas applicable sur la surface de (c), même si on peut intuitivement lui attribuer un intérieur et un extérieur.*

M est incluse dans l’intérieur de N lorsque N est incluse dans l’intérieur de M . On notera $M \smile N$; la relation \smile est symétrique.

⇒ La notion d’orientation cohérente entre des variétés disjointes est intrinsèquement liée à l’espace dans lequel elles sont plongées (leur espace de représentation).

Par extension, Hoffmann [57] a défini l’orientation cohérente pour des 2-variétés compactes dans \mathbb{R}^3 dont chaque composante connexe est fermée et orientée, si toutes les composantes connexes ont une orientation cohérente deux à deux. Le problème de cette définition est qu’elle est restrictive, car elle n’englobe pas un grand nombre de surfaces dont on peut intuitivement définir une notion d’intérieur et d’extérieur (voir Figure A.1).

C’est pourquoi nous affinons sa définition en distinguant 2 cas d’orientation cohérente entre deux surfaces :

Définition A.8 (Orientations cohérentes : relations \smile et \smile^c) Soit M et N deux 2-variétés dans \mathbb{R}^3 fermées, connexes, orientées et disjointes. Si M est incluse dans l’intérieur de N et N est incluse dans l’intérieur de M , alors on notera $M \smile N$. Si M est incluse dans l’extérieur de N et N est incluse dans l’extérieur de M , alors on notera $M \smile^c N$. Bien entendu, $M \smile N \Rightarrow M \smile N$ et $M \smile^c N \Rightarrow M \smile N$. Ces relations sont irréflexives, symétriques, non transitives dans le cas général. Elles sont exclusives l’une de l’autre. Si on a ni $M \smile N$, ni $M \smile^c N$, alors on notera $M \not\smile N$ et on dira que M et N ne sont pas orientés de façon cohérente.

On pose maintenant la définition suivante (on supposera que le nombre de composantes connexes est fini) :

Définition A.9 (Orientation cohérente de plusieurs composantes connexes)

Un ensemble M_1, \dots, M_n de 2-variétés dans \mathbb{R}^3 fermées, connexes, orientées et disjointes est *orientée de façon cohérente* si et seulement si

$$\forall (M_i, M_j), \text{ si } M_i \not\smile M_j, \text{ alors } \exists k \text{ tel que } \begin{cases} M_i \smile^c M_k \smile M_j & \text{ou,} \\ M_i \smile M_k \smile^c M_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Informellement, si la composante M_i est à l'intérieur de M_j , il faut une cavité M_k dans M_j située entre M_i et M_j ; si la composante M_i est à l'extérieur de M_j , il faut une coque M_k autour de M_j située entre M_i et M_j .

On a trivialement la proposition suivante :

Proposition A.10 Si l'ensemble M'_1, \dots, M'_n est l'ensemble M_1, \dots, M_n précédent avec l'orientation inverse pour chaque M_i , alors cet ensemble M'_1, \dots, M'_n a une orientation cohérente lorsque M_1, \dots, M_n a une orientation cohérente.

La proposition suivante nous permet de définir un intérieur et un extérieur à un ensemble de surfaces fermées connexes disjointes :

Proposition A.11 Soit M_1, \dots, M_n un ensemble de 2-variétés dans \mathbb{R}^3 fermées, connexes, disjointes et orientées de façon cohérente. Soit un point $x \in \mathbb{R}^3$ qui n'appartient à aucune des M_i . Soient c_1 et c_2 deux chemins arbitraires partant de x et traversant au moins un des M_j . Si M_{k_1} est la première M_j traversée par le chemin c_1 et M_{k_2} la première M_j traversée par le chemin c_2 , alors, soit $x \in \text{Int}(M_{k_1})$ et $x \in \text{Int}(M_{k_2})$, ou $x \in \text{Ext}(M_{k_1})$ et $x \in \text{Ext}(M_{k_2})$.

Intuitivement, si l'on se place en un point quelconque de l'espace et que l'on se déplace continûment de ce point vers une des composantes connexes, alors on sera soit à l'intérieur de toutes les premières composantes que l'on va rencontrer, soit à l'extérieur. Cette proposition se démontre en utilisant la propriété de connexité par arcs de l'espace \mathbb{R}^3 . On en déduit une définition de l'intérieur et de l'extérieur d'un tel ensemble de surfaces :

Définition A.12 (Intérieur et extérieur d'une 2-variété dans \mathbb{R}^3 fermée (connexe ou non)) Soit M une 2-variété dans \mathbb{R}^3 fermée telle que ses composantes connexes M_1, \dots, M_n soient orientées de façon cohérente. On définit l'intérieur de M comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3 \setminus M$ dont un chemin partant de ce point traverse en premier une composante M_i avec $x \in \text{Int}(M_i)$. L'extérieur est défini symétriquement. Par extension, on notera $\text{Int}(M)$ l'intérieur de M et $\text{Ext}(M)$ l'extérieur de M similairement à la Définition A.6.

L'intérieur et l'extérieur sont bien définis d'après la Proposition A.11. Cette définition coïncide avec la définition d'intérieur et d'extérieur d'une surface fermée connexe (Définition A.6). Elle est consistante avec les propriétés attendues : on peut vérifier que M , $\text{Int}(M)$ et $\text{Ext}(M)$ forment une partition de \mathbb{R}^3 où $\text{Int}(M)$ et $\text{Ext}(M)$ sont des ensemble ouverts, que toute composante M_i « touche » $\text{Int}(M)$ et $\text{Ext}(M)$ et donc que $\overline{\text{Int}(M)} \setminus \text{Int}(M) = M$ et $\overline{\text{Ext}(M)} \setminus \text{Ext}(M) = M$. La Proposition A.11 induit le corollaire suivant :

Corollaire A.13 Tout chemin c dans \mathbb{R}^3 d'un point x à un point y qui ne rencontre pas une 2-variété fermée M orientée de façon cohérente est soit entièrement inclus dans $\text{Int}(M)$, soit entièrement inclus dans $\text{Ext}(M)$. Tout chemin c' dans \mathbb{R}^3 d'un point $x \in \text{Int}(M)$ à un point $y \in \text{Ext}(M)$ rencontre M .

Enfin, la Proposition A.11 précédente peut s'inverser sous la forme :

Proposition A.14 Soit M une 2-variété dans \mathbb{R}^3 fermée, composée de n composantes M_1, \dots, M_n orientées. Soit x un point quelconque de $\mathbb{R}^3 \setminus M$. Si c_j est un chemin qui part

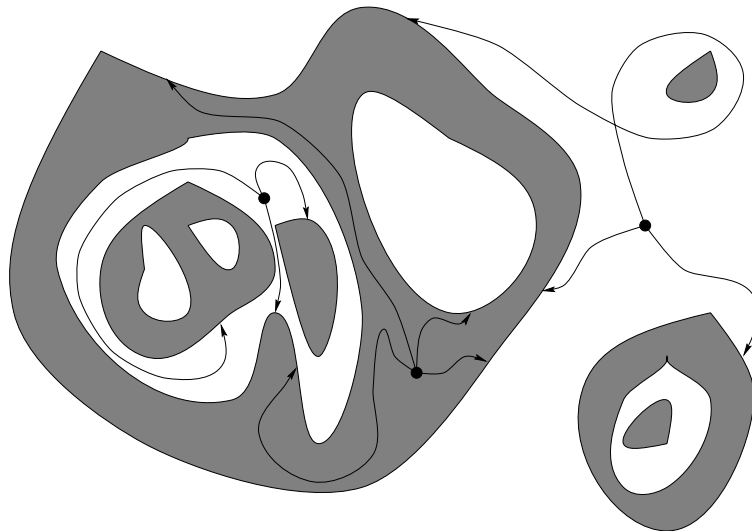


FIG. A.2 – *Cohérence d'une orientation par approche locale : en traçant des chemins, on vérifie que tout point est soit à l'intérieur de toutes les composantes qui le bordent, soit à l'extérieur.*

de x et qui traverse M , on note i_j l'indice de la première composante de M intersectée par ce chemin. Si les chemins c_j (restreints à leur parcours de x à M_{i_j}) sont soit tous inclus dans les intérieurs des M_{i_j} , soit tous inclus dans les extérieurs des M_{i_j} , alors l'orientation de M est cohérente.

Ainsi, une notion locale d'intérieur et d'extérieur (chaque point ne voit que les composantes qui le bordent) permet de déduire si l'orientation globale induite de la surface est cohérente (voir Figure A.2).

A.1.3 Polyèdres

Définition A.15 (Polyèdre [56]) Un *polyèdre (au sens de Hilbert)* est un système de polygones arrangés dans l'espace tel que (1) exactement deux polygones se rencontrent (avec un certain angle) à chaque arête, et (2) il est possible d'aller de n'importe quel polygone vers n'importe quel autre polygone en traversant des arêtes du polyèdre (pas les sommets).

⇒ Dans ce sens, un polyèdre ne peut avoir qu'une composante connexe.

Définition A.16 (Surface polyédrique [64]) Une *surface polyédrique* est l'union d'un système de triangles fermés (pour les polygones, il faut trianguler) arrangés dans un espace \mathbb{R}^n tel que (1) l'intersection de deux triangles distincts est soit l'ensemble vide, soit un sommet commun, soit un côté commun, et (2) chaque côté d'un triangle quelconque est le côté d'au plus un autre triangle.

Le *bord* d'une surface polyédrique Σ est alors défini comme l'union des côtés de triangles qui n'appartiennent qu'à un seul triangle. Il est souvent noté $\partial\Sigma$.

Une surface polyédrique sans bord Σ est telle que $\partial\Sigma = \emptyset$.

\Rightarrow Une surface polyédrique n'est pas forcément connexe.

Définition A.17 (Triangulation [1]) Un ensemble fini K , dont les éléments sont des triangles (ouverts), segments (ouverts) et points individuels de \mathbb{R}^n , est appelé une *triangulation* si les conditions suivantes sont satisfaites : les éléments de K n'ont aucun point commun deux à deux, les côtés et sommets d'un triangle quelconque de K et les sommets d'une arête quelconque de K sont aussi des éléments de K .

L'union dans \mathbb{R}^n des éléments de K s'appelle le *corps* de la triangulation K . Le corps d'une triangulation est aussi parfois appelé un *polyèdre* [1]. Si un polyèdre P est le corps d'une triangulation K , on dira que K est une *triangulation de P* . Cette définition inclut la Définition A.15 de Hilbert et la Définition A.16 de Kong et Roscoe.

Définition A.18 (Étoile dans une triangulation) Soit T un élément d'une triangulation K . L'*étoile de T dans K* , notée $O_K T$, est définie par : si T est un triangle, $O_K T = T$; si T est un segment, alors $O_K T$ contient T plus tous les triangles de K qui ont un côté égal à T ; si T est un point, alors $O_K T$ contient T plus tous les triangles et arêtes de K qui ont T comme sommet.

Une étoile est dite *cyclique* si son bord extérieur est homéomorphe au cercle unité. Le corps de l'étoile est alors aussi homéomorphe au disque unité (ouvert).

A.1.4 Objets et variétés combinatoires

La plupart des définitions de cette section proviennent de Lefschetz [71] et de Françon [44]. La notion de boucles est essentielle à la définition de surface combinatoire :

Définition A.19 (Boucle) Soit G un graphe fini, V son ensemble de sommets. Une *boucle orientée* de G est une permutation circulaire $L = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$, $k > 2$, d'éléments de V telle que, pour tout i , u_i est adjacent à u_{i+1} (indices pris *modulo k*) et $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$; la *boucle orientée opposée* L' de L est la boucle $(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_0)$; une *boucle* de G est une boucle orientée mise à part l'orientation. Un sommet u_i d'une boucle (orientée ou non) est appelé *adjacent* à la boucle ; l'arc orienté (u_i, u_{i+1}) (resp., l'arc $\{u_i, u_{i+1}\}$) est dit *adjacent* à la boucle orientée (resp., la boucle). Deux boucles (orientées ou non) qui ont un arc commun (orienté ou non) sont dites *adjacentes*. La *longueur d'une boucle* est le nombre de ses sommets.

La subdivision d'une boucle permet de transformer une boucle en un ensemble de boucles de longueur 3 :

Définition A.20 (Subdivision d'une boucle)

Soit $L = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ une boucle orientée avec $k \geq 3$. L'ensemble des $k - 2$ boucles orientées $\{L_1, \dots, L_{k-2}\}$ est appelé *subdivision de la boucle L* si et seulement si (indices pris *modulo k*) :

1. tous les L_i ont 3 arcs et leurs sommets sont des sommets de L ;

2. tout arc orienté (u_i, u_{i+1}) appartient à exactement un L_j ;
3. un arc orienté de la forme (u_{i_1}, u_{i_2}) avec $i_2 \neq i_1 + 1$ soit n'existe pas, soit appartient à une boucle L_{j_1} et une boucle L'_{j_2} avec $j_1 \neq j_2$,

On définit de manière similaire la subdivision d'une boucle non orientée.

La notion de boucles sur un graphe permet de définir un objet combinatoire, première étape vers les 2-variétés combinatoires :

Définition A.21 (Objet combinatoire) Nous appellerons *objet combinatoire* un graphe fini G associé à un ensemble B de boucles orientées sur G . Si M est un objet combinatoire, alors les *sommets de M* sont les sommets de son graphe, les *arcs de M* sont les arcs de son graphe, les *boucles de M* sont les éléments de B ; on dira aussi *faces* ou *2-cellules* de M . Un objet combinatoire est *triangulé* si ses boucles sont de longueur 3.

Un objet combinatoire peut être défini avec un graphe orienté ; les *arcs orientés* de cet objet sont alors les arcs orientés du graphe. Un objet combinatoire peut ni contenir ni boucles, ni arcs. Un objet combinatoire sans boucles (i.e., un graphe) est par définition un objet combinatoire triangulé.

Définition A.22 (Subdivision d'un objet combinatoire) Par extension, une *subdivision d'un objet combinatoire M* est un objet combinatoire N issu de M telle que les sommets et les arcs de N sont les sommets et arcs de M plus les nouveaux arcs créés par la subdivision des boucles de M , et les boucles de N sont les subdivisions des boucles de M .

Soit M un objet combinatoire. On appellera *géométrie de M dans \mathbb{R}^m* toute application qui associe à un sommet de M un point de l'espace \mathbb{R}^m . Une géométrie permet d'avoir une représentation d'un objet combinatoire dans un espace euclidien sous la forme :

Définition A.23 (f -complexe) On appelle *f -complexe d'un objet combinatoire triangulé M de géométrie f dans \mathbb{R}^m* , et on note $\overline{M^f}$, le complexe défini comme l'ensemble des sous-ensembles de \mathbb{R}^m suivants : les points $f(U)$ de \mathbb{R}^m si U est un sommet de M , les segments ouverts de \mathbb{R}^m définis par les arcs de M et dont les extrémités sont les images des sommets correspondants aux arcs, les triangles ouverts de \mathbb{R}^m définis par les boucles de trois arcs de M et dont les extrémités sont les images des sommets correspondants aux faces.

On dira qu'un f -complexe est *propre* lorsque ses éléments sont disjoints. Le *corps de $\overline{M^f}$* , noté $|\overline{M^f}|$, est l'union dans \mathbb{R}^m de ses éléments.

Proposition A.24 Le f -complexe d'un objet combinatoire M de géométrie f dans \mathbb{R}^m est une triangulation (dans \mathbb{R}^m) si il est propre. On dira alors que M est *sans auto-intersection dans \mathbb{R}^m par f* et, par abus, on appellera le corps de $\overline{M^f}$ le *plongement de M dans \mathbb{R}^m par f* et on dira que M est *plongée dans \mathbb{R}^m par f* .

Dans le cas contraire on dira que M est *immergée dans \mathbb{R}^m par f* .

On définit maintenant l'analogie combinatoire des surfaces fermées, sous la forme :

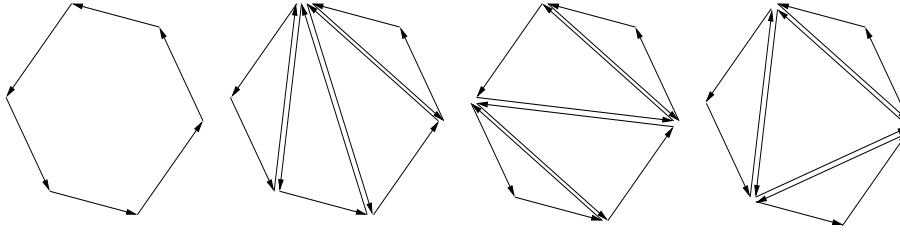


FIG. A.3 – Quelques subdivisions d'une boucle orientée.

Définition A.25 (2-variété combinatoire sans bord) Une 2-variété combinatoire sans bord (ou fermée) M est un objet combinatoire de graphe G et de boucles F_1, F_2, \dots, F_f , tel que :

1. Tout arc de G est adjacent à exactement deux faces ;
2. pour tout sommet u , l'ensemble des faces adjacentes à u peut être organisé en une permutation circulaire $(f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$, $k > 1$, appelée l'ombrelle de u , telle que, pour tout i , f_i est adjacent à f_{i+1} (indices pris modulo k).
3. tout sommet u de G est l'extrémité d'au moins trois arcs (cette condition est rajoutée à la définition de Françon [44] pour éviter certains cas particuliers).

M est appelée une 2-variété triangulée lorsque toutes ses boucles (i.e., ses faces) ont exactement trois arcs.

La 2-variété combinatoire M est dite être définie sur le graphe G , appelé lui-même *le graphe* de M . Les sommets (resp., les arcs) de M sont aussi appelés les 0 -cellules (resp., les 1 -cellules ou *les arcs*) de M .

On peut vérifier que toute subdivision d'une 2-variété combinatoire sans bord est encore une 2-variété combinatoire sans bord.

Toute 2-variété combinatoire sans bord M définit implicitement une topologie d'une 2-variété topologique sans bord. Cela peut se voir par construction. Nous définissons donc :

Définition A.26 (Complexe canonique associé à une 2-variété combinatoire sans bord) Soit M une 2-variété combinatoire sans bord. Soit T une subdivision arbitraire de M . Soit $S = (S_1, \dots, S_n)$ l'ensemble des n sommets de M , donc aussi de T . Soit g une application de S dans \mathbb{R}^n qui associe à S_i le i -ème vecteur de base de \mathbb{R}^n . L'application g est donc une géométrie dans \mathbb{R}^n de l'objet combinatoire triangulé T . Le g -complexe de T est appelé un *complexe canonique associé à M* .

Le lemme suivant provient du fait que tout arc de M appartient à exactement deux faces de M et que les éléments du complexe K sont deux à deux disjoints (indépendances des coordonnées de chaque sommet dans \mathbb{R}^n).

Lemme A.27 Les segments d'un complexe canonique associé à une 2-variété combinatoire sans bord sont les côtés d'exactly deux triangles.

On a la propriété suivante :

Proposition A.28 Les complexes canoniques associés à une 2-variété combinatoire sans bord M sont des triangulations (voir Définition A.17). Le corps d'un complexe canonique est la triangulation d'une surface fermée. Tous les corps des complexes canoniques associés à M appartiennent à la même classe d'homéomorphisme.

Preuve : Soit K un complexe canonique associé à une 2-variété combinatoire sans bord M . Il est facile de vérifier que K est une triangulation par construction. Le fait que les éléments de K n'ont aucun point commun deux à deux est garanti par l'indépendance de toutes les coordonnées des sommets de la triangulation et par l'hypothèse que chaque sommet de M est l'extrémité d'au moins trois arcs.

On peut montrer que l'ordre sur les sommets et le choix de la subdivision n'influent pas sur la topologie du complexe canonique. Les corps de deux complexes canoniques d'une même variété combinatoire M sont donc homéomorphes.

Enfin, K est la triangulation d'une surface fermée si l'étoile de chacun des sommets de K est cyclique (Théorème A.39). L'ombrelle d'un sommet de K construit un ensemble de triangles et de segments dans \mathbb{R}^n autour du plongement du sommet dans \mathbb{R}^n . Chaque segment est le côté d'exactly 2 triangles. Le sommet ferme l'ombrelle. Le bord de l'ombrelle est bien homéomorphe au cercle unité. \square

Le théorème précédent montre que l'on peut associer à toute 2-variété combinatoire sans bord la topologie d'une surface (topologique) fermée. On peut donc définir un critère de « similitude topologique » avec des variétés combinatoires :

Définition A.29 (Variétés combinatoires semblables) On dira qu'une 2-variété combinatoire M est *semblable* à une 2-variété topologique N pour signifier que le corps d'un complexe canonique arbitraire associé à M est homéomorphe à N .

Similairement, deux 2-variétés combinatoires sont dites « *semblables* » si les corps de leurs complexes canoniques associés sont homéomorphes.

En fait, on pourrait montrer que l'on peut trouver un « plongement » (le terme anglais est « *imbedding* ») d'une 2-variété combinatoire sous forme d'une triangulation dans \mathbb{R}^5 d'une surface fermée. Il faudrait alors utiliser un théorème dû à Pontryagin ([1], p. 127–128) sur les « plongements » de complexes cellulaires abstraits. Ici, nous avons préféré montrer simplement que l'on peut associer une variété topologique à une variété combinatoire, sans rechercher l'espace minimal (au sens de la dimension de l'espace) dans lequel il est possible de le réaliser.

A.2 Propriétés et théorèmes

A.2.1 Variétés et surfaces

Théorème A.30 (Bord d'une n -variété) Le bord d'une n -variété est homéomorphe à une $n - 1$ -variété sans bord [57].

Théorème A.31 (Théorème de Jordan [2]) Toute 2-variété dans \mathbb{R}^3 connexe fermée sépare l'espace \mathbb{R}^3 en deux composantes connexes, dont l'une est finie.

Théorème A.32 (Variétés et polyèdres) Toute 2-variété topologique fermée est homéomorphe à un polyèdre (au sens de corps d'une triangulation).

Théorème A.33 (Orientabilité) La classification des surfaces en surfaces à deux faces et en surfaces à une face est identique à la classification en surfaces *orientables* ou *non-orientables*.

Théorème A.34 (Surface fermée à une face) Toute surface (topologique) connexe fermée à une face ne peut être plongée dans \mathbb{R}^3 (i.e., la surface s'auto-intersecte dans \mathbb{R}^3 par toute application continue f).

Théorème A.35 (Théorème fondamental de la topologie des surfaces [1]) Toute surface connexe fermée Φ est homéomorphe à une sphère à p anses, de genre p (si Φ est orientable), ou à la sphère à $p + 1$ “cross-caps” (trous comblés par des rubans de Möbius) (si Φ est non-orientable).

Théorème A.36 (Classification des surfaces [1]) Deux surfaces connexes fermées Φ et Φ' sont homéomorphes si, et seulement si, elles sont toutes les deux orientables ou toutes les deux inorientables, et si, en plus, elles ont soit la même caractéristique d'Euler, soit la même connectivité, soit le même genre.

Théorème A.37 (Invariance de l'orientabilité [1]) Si une surface est orientable (resp. non-orientable), alors toute surface qui lui est homéomorphe est aussi orientable (resp. non-orientable).

A.2.2 Triangulations

Théorème A.38 (Lien entre 2-variété topologique et triangulation [1]) Toute surface (2-variété topologique) fermée est homéomorphe à un polyèdre (en tant que corps d'une triangulation).

Théorème A.39 (Triangulation d'une surface fermée [1]) Une triangulation K est une triangulation d'une surface fermée si et seulement si l'étoile de chacun des sommets de K est cyclique.

Corollaire A.40 Tout segment d'une triangulation K d'une surface fermée est le côté d'exactly deux triangles de K .

Théorème A.41 (Invariance de la caractéristique d'Euler [1]) Si K et K' sont des triangulations de deux surfaces homéomorphes, alors leurs caractéristiques d'Euler sont égales.

A.3 Classification des surfaces

A.3.1 Classification et invariants topologiques

L'étude de la topologie des surfaces (2-variétés topologiques) permet de classer simplement les surfaces suivant quelques invariants topologiques. Par exemple, Griffiths [52], par des moyens très intuitifs, montre que trois invariants topologiques suffisent pour classer les surfaces par classes d'équivalence homéomorphique : le nombre de bords de la surface β , son nombre d'orientabilité q (0, 1 ou 2), et sa caractéristique d'Euler χ . Dans notre cas, nous ne nous intéressons qu'aux surfaces fermées, donc $\beta = 0$. La classification précédente peut donc aussi être déduite à partir du Théorème A.35, du Théorème A.36 et du Théorème A.37, provenant d'Aleksandrov [1].

Nous ne manipulons que des surfaces que l'on peut plonger dans \mathbb{R}^3 . Le Théorème A.34 et le Théorème A.33 montrent que ces surfaces sont orientables. D'où $q = 0$. La caractéristique d'Euler est donc suffisante (mais nécessaire) pour classer les surfaces modélisées par notre modèle générique.

A.3.2 Caractéristique d'Euler des surfaces triangulées

Soit $\Sigma = (S, \otimes)$ une surface triangulée combinatoire fermée, $s(\Sigma) = \text{Card}(\Sigma_0)$ son nombre de sommets, $a(\Sigma) = \text{Card}(\Sigma_1)$ son nombre d'arêtes, $f(\Sigma) = \text{Card}(\Sigma_2)$ son nombre de faces. Pour les 2-variétés combinatoires, la *caractéristique d'Euler* est définie par :

$$\chi(\Sigma) = s(\Sigma) - a(\Sigma) + f(\Sigma) \quad (\text{A.1})$$

On dit que $\chi(\Sigma)$ est un invariant topologique car il ne dépend que de la topologie de Σ . Pour toute surface Σ' semblable à Σ , on a $\chi(\Sigma') = \chi(\Sigma)$. La caractéristique d'Euler est indépendante de tout pavage d'une surface, et, en particulier, de tout raffinement de la surface. La caractéristique d'Euler peut être étendue à toutes les dimensions, on l'appelle alors la *caractéristique d'Euler-Poincaré*.

Le théorème suivant lie la caractéristique d'Euler au genre d'une surface :

Théorème A.42 (formule d'Euler [56]) Soit M une 2-variété combinatoire sans bord avec N composantes connexes. Soient s le nombre de sommets de M , a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces. Si G est le genre de M (son nombre total de anses ou de trous), alors M vérifie la formule suivante : $\chi(M) = s - a + f = 2(N - G)$.

\Rightarrow En dimension 3, pour les polyèdres simples [56], on l'appelle la formule d'Euler.

\Rightarrow Poincaré a étendu cette formule à toutes les dimensions.

\Rightarrow Cette formule est aussi liée à la théorie des champs [133].

Pour les surfaces formées de triangles, on a de plus la relation $2a(\Sigma) = 3f(\Sigma)$. Il est donc très simple de calculer la caractéristique d'Euler et de déduire le genre de la surface en comptant le nombre de composantes connexes définies par la relation \oplus sur les sommets Σ_0 de Σ .

La caractéristique d'Euler nous servira aussi à valider les opérateurs topologiques nécessaires à des modèles hautement déformables (voir Section 5.3).

A.4 Homotopie

Définition A.43 (Applications homotopes — homotopie) Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X vers un espace Y . L'application f_0 est *homotope* à l'application f_1 s'il existe une application continue du produit $X \times I$ dans Y , I intervalle fermé entre 0 et 1, telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$.

On dit que F est une *homotopie* de f_0 à f_1 .

Définition A.44 (Type d'homotopie) Deux espaces X et Y ont *même type d'homotopie* s'il existe une application continue f de X dans Y et une application continue g de Y dans X telles que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux applications identiques de X et Y .

Définition A.45 (Espace contractile) Un espace X est *contractile* s'il a même type d'homotopie qu'un point.

Définition A.46 (Applications homotopes relativement à un sous-espace) Soit A un sous-espace d'un espace X , et soient f_0 et f_1 deux applications continues de X dans un espace Y égales sur A . L'application f_0 est *homotope relativement à A* à l'application f_1 s'il existe une homotopie F de f_0 à f_1 telle que $F(x, t) = f_0(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \in I$.

Définition A.47 (Rétracte — rétraction) Un sous-espace Y de X est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$. On dit alors que r est une *rétraction* de X sur Y .

Définition A.48 (Rétracte par déformation) Un sous-espace Y d'un espace X est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une rétraction r de X sur Y homotope relativement à Y à l'application identique de X .

Annexe B

Singularités lors d'évolution de surfaces

Notre modèle déformable fait évoluer l'ensemble de ses sommets de façon continue par rapport aux temps (i.e., si on réduit le pas de temps, le déplacement des sommets est réduit proportionnellement). La surface combinatoire triangulée fermée Σ est envoyée dans \mathbb{R}^3 par une géométrie $f^{(t)}$, fonction du temps dans un intervalle fermé en 0 et ouvert à droite.

Supposons qu'il existe un temps τ pour lequel $f^{(\tau)}$ n'est plus un plongement de Σ dans \mathbb{R}^3 (voir Proposition A.24), mais que, $\forall \epsilon > 0$, $f^{(\tau-\epsilon)}$ est un plongement de Σ dans \mathbb{R}^3 . D'un point de vue géométrique, des morceaux de la surface se sont progressivement rapprochés les uns des autres. En τ , ils occupent le même lieu de \mathbb{R}^3 .

Le complexe $\overline{\Sigma^{f^{(\tau)}}}$ n'est donc pas une triangulation (dans \mathbb{R}^3). Certains de ses éléments ne sont pas deux à deux disjoints. Si K est un complexe arbitraire d'un espace topologique X , on note $\mathfrak{S}(K)$ l'ensemble des éléments de X qui appartiennent à au moins deux éléments du complexe K . Un élément de $\mathfrak{S}(K)$ est appelé une *singularité de K* . Au temps $t = \tau$, le complexe $\overline{\Sigma^{f^{(t)}}}$ définit un ensemble de singularités $\mathfrak{S}(\overline{\Sigma^{f^{(t)}}})$ non vide.

Nous nous restreignons au cas où cet ensemble est discret (les singularités sont isolées dans \mathbb{R}^3). Cela n'est pas trop restrictif dans la mesure où notre modèle n'effectue que de petits déplacements et où il est discrétisé dans l'espace et dans le temps pour des raisons évidentes d'implémentation. S'il existe des singularités de $\overline{\Sigma^{f^{(\tau)}}}$ qui appartiennent à des triangles ou des segments de ce complexe, on subdivise la surface Σ sur ces triangles et segments de telle façon à ce que ces singularités n'appartiennent qu'à des points du complexe. *Ainsi, l'examen des singularités se réduit à l'examen des sommets qui convergent vers le même lieu.*

On observe donc la forme de la partie de la surface Σ qui converge vers le même lieu. Soit x un élément de $\mathfrak{S}(\overline{\Sigma^{f^{(t)}}})$. On note S_x les points de Σ dont leur image par la géométrie $f^{(\tau)}$ est x . On a clairement, si $U \in S_x$,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} f^{(t)}(U) = x.$$

Soit Ψ_x le complexe simplicial abstrait construit sur les sommets S_x et les informations combinatoires de Σ : il comprend les sommets S_x de Σ , les arêtes de Σ définies sur ces sommets et représentées par la paire de sommets correspondante, les faces de Σ définies

sur ces sommets et représentées par le triplet (non-ordonné) de sommets correspondant. Lorsque $t < \tau$, le complexe abstrait Ψ_x avec la géométrie $f^{(t)}$ représente une triangulation (dans \mathbb{R}^3). Cette triangulation est un sous-complexe de $\overline{\Sigma^{f^{(t)}}}$ qui n'est pas réduit à un seul point. Cette triangulation n'est pas une triangulation d'une surface fermée dans le cas général. Elle représente la sous-partie de $\overline{\Sigma^{f^{(t)}}}$ qui s'effondre au point x lorsque t tend vers τ . Ses caractéristiques définissent différentes classes de singularités auxquelles on associera différents opérateurs topologiques. C'est pourquoi on l'appellera l'*origine de la singularité* x . On note K_x un complexe canonique de Ψ_x construit à l'aide d'une application g .

1. Supposons que Ψ_x (ou K_x) n'a qu'une composante connexe. Différents cas se présentent :

- (a) si K_x est la triangulation d'une surface fermée connexe, alors toute une composante connexe de Σ converge en un même point. On parle alors de *singularité fermée*. Si la surface fermée est homéomorphe à la sphère de dimension 2, alors x est une *singularité sphérique*. Le cas pratique est un tétraèdre dont les sommets se rapprochent les uns des autres. Il est naturel alors de supposer que la composante connexe correspondante de Σ doit être supprimée à l'instant τ .
- (b) si K_x est la triangulation d'une surface à bord, alors on extrait la topologie de K_x . Sur les bords, on va enlever progressivement les faces, arêtes et sommets « inutiles ». Le processus est une répétition jusqu'à convergence des actions suivantes :
 - i. si $\{U, V, W\}$ est une face de Ψ_x avec $\{U, V\}$ (mettons) arête du bord de Ψ_x , alors on supprime l'arête $\{U, V\}$ et la face $\{U, V, W\}$ de K_x ;
 - ii. si $\{U, V\}$ est une arête de Ψ_x telle que U n'est le sommet que de cette arête (ni d'une autre face), alors on supprime le sommet U et l'arête $\{U, V\}$ de Ψ_x ;

Soit Ψ'_x un complexe abstrait obtenu par ce processus (il n'est pas indépendant de l'ordre dans lequel sont effectués les opérations (1(b)i) et (1(b)ii)) et K'_x son complexe canonique associé (par g). On peut montrer que le corps de K'_x est un rétracte par déformation du corps de K_x . Le corps de K'_x est connexe ; l'ensemble Ψ'_x ne contient aucune facette, et comporte un certain nombre de boucles q . On peut encore réduire Ψ'_x en itérant l'opération suivante sur Ψ'_x :

- iii. si $\{U, V\}$ est une arête de Ψ'_x , $U \neq V$, alors on supprime le sommet U et l'arête $\{U, V\}$ de Ψ'_x et toutes les occurrences de U dans Ψ'_x sont remplacées par V .

Le complexe abstrait obtenu, noté $^*\Psi_x$, est constitué d'un sommet et d'un ensemble de boucles sur ce sommet. En revanche, ce complexe est *indépendant* de l'ordre des opérations (1(b)i), (1(b)ii) et (1(b)iii). Il a aussi q boucles (au sens arêtes $\{U, U\}$). Suivant q , la singularité peut prendre les formes suivantes :

- Si $q = 0$, alors le complexe associé à la singularité x est un morceau de surface homotope à un point. C'est donc une partie de la surface qui se rétracte en un point, et la singularité est alors dite *ponctuelle*. En pratique, des sommets

voisins les uns des autres se sont rapprochés. On peut alors fusionner ces sommets ensemble pour éliminer la singularité.

- Si $q = 1$, alors le complexe associé à la singularité x est un morceau de surface homotope au cercle unité. Cette partie de surface peut être schématisé par un tuyau qui se resserre autour de son axe. On dit alors que x est une *singularité annulaire*. D’après l’Annexe C, il est naturel de chercher à séparer la surface en deux autour de ce « cercle ».
 - Si $q > 1$, alors le complexe associé à la singularité x est un morceau de surface homotope à un ensemble de q cercles unités qui ont un seul point commun. Ce morceau de surface est un ensemble de tuyau qui se resserrent autour de leur point de confluence. On décompose la singularité en un ensemble de q singularités annulaires que l’on traitera une à une.
2. Si Ψ_x (ou K_x) a plusieurs composantes connexes, $\Psi_x^1, \dots, \Psi_x^k$, il est difficile d’inférer de cette singularité un comportement logique quant à l’évolution future de la surface (voir Figure B.1). En conséquence, notre approche est d’observer la topologie de chacun des Ψ_x^i conformément au point (1), puis, si le complexe abstrait $^*\Psi_x^i$ a au moins une boucle, d’éliminer les singularités sphériques ou annulaires de ces composantes. On collecte ensuite toutes les composantes Ψ_x^j dont le complexe abstrait $^*\Psi_x^j$ est réduit à un point. Si il en existe au moins deux, on dit que la singularité est *non connexe*. Dans ce cas, les composantes seront traitées deux par deux. Elles signifient que des parties de la surface localement non connectées occupent le même lieu. D’après l’Annexe C, il est naturel de chercher à fusionner ces deux parties en créant un « tuyau » entre ces deux morceaux de surface pour éliminer la singularité. Les autres composantes sont fusionnées similairement à cette partie de la surface.

La Figure B.1 illustre un traitement possible d’une singularité dont l’origine n’est pas connexe et possède trois composantes, dont une des composantes est une singularité annulaire. En pratique, des singularités aussi complexes sont extrêmement peu probables, voire irréalisables dans l’espace \mathbb{R}^3 , notamment parce que notre modèle est une δ -géométrie qui contraint les positions des sommets. Ainsi, toute singularité non « élémentaire » sera décomposée en un ensemble de singularités « élémentaires » (singularités annulaires, sphériques, ponctuelles ou non-connexes), traitées individuellement.

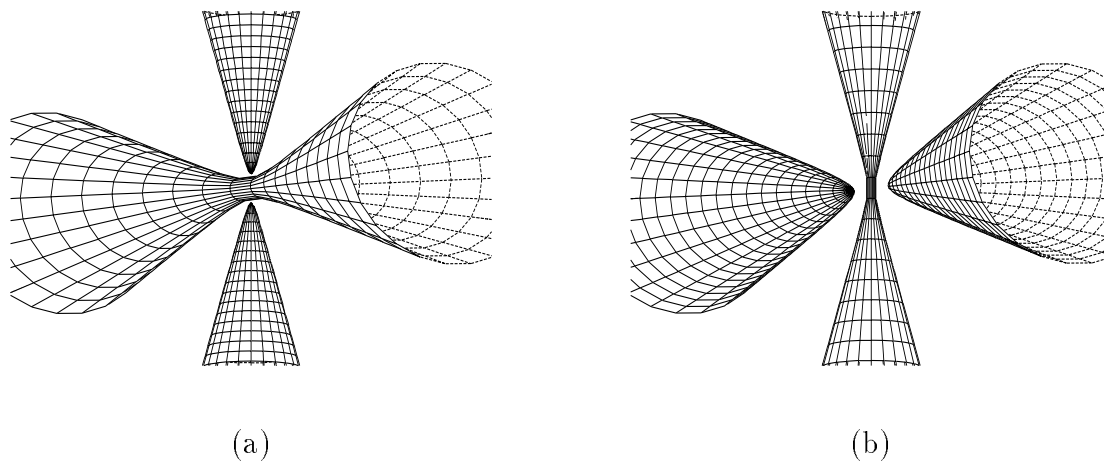


FIG. B.1 – *Singularité dont l'origine a trois composantes connexes : (a) avant la singularité ; (b) une évolution envisageable de la singularité.*

Annexe C

Justification analytique des transformations topologiques

Afin d'expliciter les choix effectués pour les transformations non-Euleriennes de la Section 5.3, nous montrons l'analogie entre les transformations axiales ou annulaires et les transformations d'une quadrique paramétrée. Dans cette section, on suppose que la surface triangulée peut s'exprimer localement sous une forme implicite, $h(x, y, z) = 0$, où h est de classe C^∞ sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , $(0, 0, 0) \in \Omega$. On suppose de plus que h est symétrique autour des plans xy , yz et zy . On peut développer h à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 h(x, y, z) = & h(0, 0, 0) + \frac{\partial h}{\partial x}x + \frac{\partial h}{\partial y}y + \frac{\partial h}{\partial z}z + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \frac{y^2}{2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \frac{z^2}{2} \\
 & + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}xz + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}yz + \dots
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

On suppose que les dérivées secondes suivant les trois axes ne sont pas nulles. Par symétrie, et en notant $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$, $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$, et $w = f(0, 0, 0)$, on obtient en ne conservant que les termes jusqu'à l'ordre 2 :

$$h(x, y, z) \simeq w + \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \tag{C.2}$$

Notre surface est donc représentée localement par une quadrique. Suivant le signe de a , b et c , et suivant la valeur de w , la quadrique pourra être un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône.

On note $\Psi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^∞ définie par $\Psi(x, y, z, r) = h(x, y, z) - r$. La surface $h(x, y, z) = 0$ est le niveau $r = 0$ de l'hypersurface $\Psi(x, y, z, r) = 0$.

- Si a , b et c sont tous trois positifs (ou tous trois négatifs), $h(x, y, z)$ est soit un ellipsoïde, soit un point, soit l'ensemble vide, suivant la valeur $w = h(0, 0, 0)$.

On remarque que toute variation de w correspond à la même variation sur le niveau r de l'hypersurface $\Psi(x, y, z, r) = 0$. Si on considère l'ensemble des niveaux r de $\Psi = 0$, alors on balaie l'ensemble des valeurs de h en $(0, 0, 0)$. Le passage *continu* d'un ellipsoïde à un point puis à l'ensemble vide correspond exactement aux *accidents sphériques* ou

aux *dégénérescences*. Notre opération associée T_{-2}^0 induit le même effet sur la surface. L'*apparition de matière* correspond aussi à ce processus, mais en balayant les niveaux de l'hypersurface en sens inverse.

- Si un ou deux des a , b ou c sont négatifs (les autres positifs), on se ramène au cas où seulement c est négatif (par des changements de repère).

Là-encore, il suffit de considérer l'ensemble des niveaux de l'hypersurface $\Psi = 0$ pour examiner l'ensemble des surfaces définies par $h = 0$ pour des valeurs en $(0, 0, 0)$ variables. Suivant le niveau, on passe *continûment* d'un hyperboloïde à deux nappes (pour les niveaux $r > w$), puis à un cône (niveau $r = w$), et enfin à un hyperboloïde à deux nappes (pour les niveaux $r < w$) (voir Figure C.1). Notre opération non-Eulerienne associée T_{-2} traduit le même comportement. L'opération non-Eulerienne réciproque T_{+2} reflète le processus inverse.

Nos opérations non-Euleriennes de transformations de la surface peuvent donc être vues comme l'évolution d'un niveau sur une hyper-surface définie par une fonction implicite de degré 4. La Figure C.2 donne une représentation bidimensionnelle de l'évolution d'un objet (ici, une courbe) en tant que niveau sur une hyper-surface (i.e., une surface en dimension 3). Cette analogie est très instructive, puisqu'elle montre pourquoi il n'existe qu'*une* opération non-Eulerienne pour les courbes de \mathbb{R}^2 . L'inverse est en effet identique (passage de l'hyperbole à l'hyperbole). Les opérations non-Euleriennes sont plus complexes sur les surfaces, puisqu'il existe deux sortes d'hyperboloïde. On peut prédire que le nombre d'opérations topologiques différentes croît avec la dimension de l'hyper-surface.

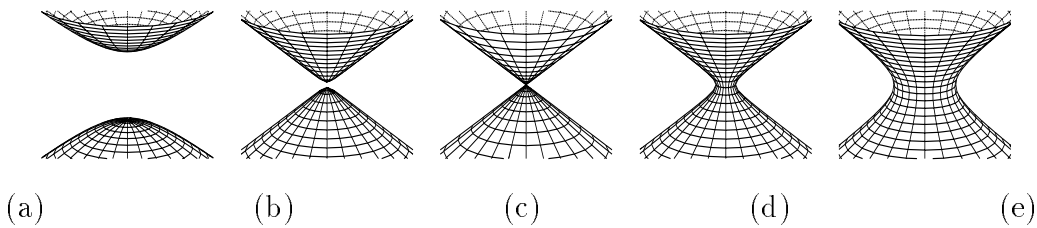
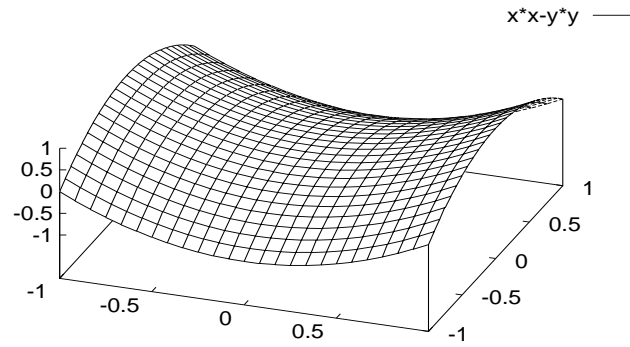
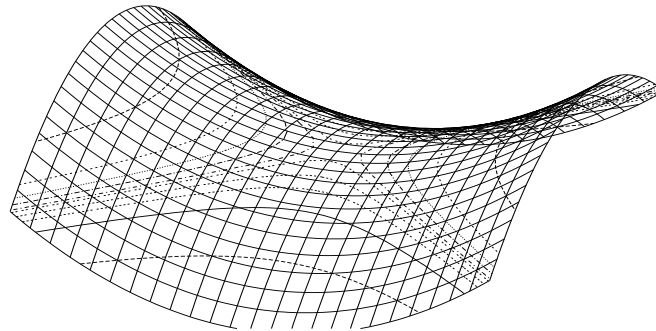


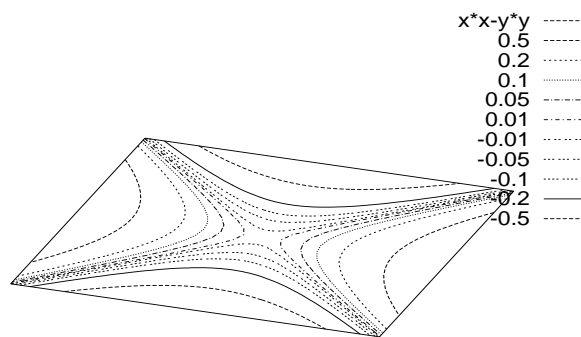
FIG. C.1 – *Evolution d'un hyperboloïde à deux nappes (a-b) vers un cône puis vers un hyperboloïde à une nappe (d-e).*



(a)



(b)



(c)

FIG. C.2 – *Interprétation bidimensionnelle d'une courbe en tant que niveau d'une surface. La surface est un parabolôide hyperbolique. Suivant le niveau sur la surface, le contour est une hyperbole, deux droites sécantes, ou de nouveau une hyperbole (mais tournée d'un quart de tour).*

Bibliographie

- [1] P.S. Aleksandrov. *Combinatorial Topology*. Graylock Press, Rochester, New York, USA, 1960.
- [2] P.S. Aleksandrov. *Elementary concepts of topology*. Dover Publications Inc., New York, NY, 1961.
- [3] M.-E. Algorri and F. Schmitt. Surface Reconstruction from Unstructured 3D Data. *Computer Graphics forum*, 15(1):47–60, 1996.
- [4] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R.C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(9):855–867, 1990.
- [5] E. Artzy, G. Frieder, and G.T. Herman. The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, 15:1–24, 1981.
- [6] E.A. Ashton, K.J. Parker, M.J. Berg, and C.W. Chen. A Novel Volumetric Feature Extraction Technique with Applications to MR Images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(4):365–371, August 1997.
- [7] E. Bainville. Reconstruction d’objets tridimensionnels à partir de silhouettes. Master’s thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, June 1992.
- [8] C.L. Bajaj and I. Ihm. Smoothing polyhedra using implicit algebraic splines. *Computer Graphics (SIGGRAPH’92 Proceedings), Chicago, Illinois*, 26(2):79–88, 1992.
- [9] E. Bardinet, L. D. Cohen, and N. Ayache. Fitting 3D Data Using Superquadrics and Free-Form Deformations. In *Proc. of 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 79–83, Jerusalem, Israel, October 1994.
- [10] E. Bardinet, L. D. Cohen, and N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Medical Image Analysis*, 1(2):129–149, 1996.
- [11] B. Bascle. *Contributions et applications des modèles déformables en vision par ordinateur*. PhD thesis, Université de Nice, Sophia Antipolis, France, July 1994.
- [12] M.-O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, February 1991.

- [13] E. Bittar. *Modèles déformables surfaciques, implicites et volumiques, pour l'imagerie médicale*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998.
- [14] H. Borouchaki and P.J. Frey. Maillage géométrique de surfaces. Partie I : enrichissement. Research Report 3236, INRIA, Rocquencourt, France, August 1997.
- [15] A. Bottino, W. Nuij, and K. van Overveld. How to shrinkwrap through a critical point: an algorithm for the adaptive triangulation of iso-surfaces with arbitrary topology. In J.C. Hart and K. van Overveld, editors, *Proc. of 2nd int. work. on Implicit Surfaces*, pages 53–72, Eindhoven, The Netherlands, October 1996.
- [16] P. J. Burt. Fast filter transforms for image processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 16:20–51, January 1981.
- [17] P. J. Burt and E. H. Adelson. The Laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. on Communications*, 31:532–540, April 1983.
- [18] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.
- [19] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66, 1993.
- [20] A. Chakraborty, L.H. Staib, and J.S. Duncan. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(6):859–870, December 1996.
- [21] K.-S. Cheng, J.-S. Lin, and C.-W. Mao. The application of competitive Hopfield neural network to medical image segmentation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(4):560–567, August 1996.
- [22] A. Chéhikian. Algorithmes optimaux pour la génération de pyramides passes-bas et laplaciennes. *Traitement du Signal*, 9:297–308, January 1992.
- [23] J.-H. Chuang and W.-C. Lee. Efficient Generation of Isosurfaces in Volume Rendering. *Computer & Graphics*, 19(6):805–813, 1995.
- [24] H.E. Cline, C.R. Crawford, W.E. Lorensen, S. Ludke, and B.C. Teeter. Two algorithms for the three-dimensional reconstruction of tomograms. *Medical Physics*, 15(3):320–327, May 1988.
- [25] J.-P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1995.
- [26] L.D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.
- [27] L.D. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1131–1147, November 1993.

- [28] T.F. Cootes, A. Hill, C.J. Taylor, and J. Haslam. The Use of Active Shape Models For Locating Structures in Medical Images. In H.H. Barrett and A.F. Gmitro, editors, *Proc. of Information Processing in Medical Imaging*, volume 687 of *Lecture Notes in Computer Science*, Flagstaff, Arizona, USA, June 1993. Springer-Verlag.
- [29] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, volume 1. Interscience Publishers Inc., New York, NY, 1953.
- [30] H. Delingette. Simplex Meshes: a General Representation for 3D Shape Reconstruction. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, Seattle WA, USA, 1994.
- [31] H. Delingette. Simplex Meshes: a General Representation for 3D Shape Reconstruction. Research Report 2214, INRIA, Sophia Antipolis, France, March 1994.
- [32] H. Delingette. General Object Reconstruction based on Simplex Meshes. Research Report 3111, INRIA, Sophia Antipolis, France, February 1997.
- [33] R. Deriche. Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, pages 167–187, 1987.
- [34] M. Desbrun. *Modélisation et animation de matériaux hautement déformables en synthèse d'images*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, December 1997.
- [35] M. Desbrun and M.-P. Gascuel. Peau implicite active pour l'habillage de modèles très déformables. In *Proc. of Journées de l'Association Française d'Informatique Graphique (AFIG'97)*, Rennes, France, dec 1997.
- [36] X. Descombes. *Champs Markoviens en analyse d'images*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Evry, France, December 1993.
- [37] A. Doncescu. *Ondelettes et synthèse d'images*. PhD thesis, Université de La Rochelle, La Rochelle, France, 1997.
- [38] R. Drebin, L. Carpenter, and P. Hanrahan. Volume rendering. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88 Proceedings)*, 22(4):65–74, 1988.
- [39] M.J. Dürst. Additionnal References to Marching Cubes. *Computer Graphics*, 22(2):72–73, April 1988.
- [40] Y. Elomary. *Modèles déformables et multirésolution pour la détection de contours en traitement d'images*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, October 1994.
- [41] H. Elter. *Etude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, September 1994.

- [42] M. Fidrich. Iso-Surface Extraction in 4D with Applications Related to Scale Space. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–268, Lyon, France, 1996. Springer-Verlag.
- [43] N. Flasque, M. Desvignes, and M. Revenu. Coopération de modèles déformables pour l'imagerie cérébrale en 3 dimensions. In *Proc. of Seizième Colloque sur le Traitement du signal et des Images GRETSI*, pages 733–736, Grenoble, France, September 1997.
- [44] J. Françon. Discrete Combinatorial Surfaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 57(1):20–26, January 1995.
- [45] P.J. Frey and H. Borouchaki. Texel: triangulation de surfaces implicites. partie I: aspects théoriques. Research Report 3066, INRIA, Rocquencourt, France, December 1996.
- [46] P. Fua and C. Brechbühler. Imposing hard constraints on soft snakes. In *Proc. of 4th European Conference on Computer Vision (ECCV'96)*, volume 1065 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 495–506, Cambridge, UK, April 1996. Springer-Verlag, Berlin.
- [47] A. Van Gelder and J. Wilhelms. Topological Considerations in Isosurface Generation. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4):337–375, October 1994.
- [48] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, France, 1971.
- [49] D. Gordon and J.K. Udupa. Fast surface tracking in three-dimensional binary images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 45(2):196–241, February 1989.
- [50] S. Gottschalk, M.C. Lin, and D. Manocha. OBBTree: A Hierarchical Structure for Rapid Interference Detection. *Computer Graphics, Annual Conference Series (SIG-GRAPH'96 Proceedings, New Orleans, Louisiana)*, pages 171–180, 1996.
- [51] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round point. *Journal of Differential Geometry*, 26:285–314, 1987.
- [52] H.B. Griffiths. *Surfaces*. Cambridge University Press, 1976.
- [53] G.T. Herman. Discrete Multidimensional Jordan Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54(6):507–515, November 1992.
- [54] G.T. Herman. Oriented Surfaces in Digital Spaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 55(5):381–396, September 1993.
- [55] G.T. Herman and D. Webster. A topological proof of a surface tracking algorithm. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 23:162–177, 1983.
- [56] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, USA, 1956.

- [57] C.M. Hoffmann. *Geometric and Solid Modeling*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., San Mateo, California, USA, 1989.
- [58] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Mesh Optimization. *Computer Graphics, Annual Conference Series (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, pages 19–26, August 1993.
- [59] T.N. Jones and D.N. Metaxas. Segmentation Using Deformable Models with Affinity-Based Localization. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 53–62, Grenoble, France, March 1997. Springer-Verlag.
- [60] A.D. Kalvin, C.B. Cutting, B. Haddad, and M.E. Noz. Constructing Topologically Connected Surfaces for the Comprehensive Analysis of 3D Medical Structures. *Proc. of SPIE Medical Imaging V: Image Processing*, 1445:247–258, 1991.
- [61] T. Kapur, W.E.L. Grimson, W.M. Wells, III, and R. Kikinis. Segmentation of brain tissue from magnetic resonance images. *Medical Image Analysis*, 1(2):109–127, 1996.
- [62] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1987.
- [63] Y. Kenmochi, A. Imiya, and N.F. Ezquerria. Polyhedra Generation from Lattice Points. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 127–138, Lyon, France, 1996. Springer-Verlag.
- [64] T.Y. Kong and A.W. Roscoe. Continuous Analogs of Axiomatized Digital Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 29(1):60–86, January 1985.
- [65] T.Y. Kong and J.K. Udupa. A justification of a fast surface tracking algorithm. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 54(6):507–515, November 1992.
- [66] S. Kumar and D. Goldgof. A Robust Technique for the Estimation of the Deformable Hyperquadrics from Images. In *Proc. of 12th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 74–78, Jerusalem, Israel, October 1994.
- [67] J.-O. Lachaud. Topologically Defined Iso-surfaces. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 245–256, Lyon, France, 1996. Springer-Verlag.
- [68] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Digital Surfaces as a Basis for Building Iso-surfaces. In *5th IEEE International Conference on Image Processing*, Chicago, Illinois, USA, 1998. (accepted, to appear).
- [69] M.J. Laszlo. Fast generation and display of iso-surface wireframes. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 54(6):473–483, November 1992.
- [70] C.N. Lee, T. Poston, and A. Rosenfeld. Holes and Genus of 2D and 3D Digital Images. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 55(1):20–47, January 1993.

- [71] S. Lefschetz. *Applications of Algebraic Topology*. Springer, Berlin, New York, 1975.
- [72] F. Leitner. *Segmentation dynamique d'images 3D*. PhD thesis, Université J. Fourier, Grenoble, France, September 1993.
- [73] A. Lenoir, R. Malgouyres, and M. Revenu. Fast Computation of the Normal Vector Field of the Surface of a 3-D Discrete Object. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–268, Lyon, France, 1996. Springer-Verlag.
- [74] F. Leymarie and M.D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):617–634, June 1993.
- [75] P. Lienhardt. N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasimanifolds. *Int. Journal on Computational Geometry and Applications*, 4(3):275–324, 1994.
- [76] H.K. Liu. Two and three dimensional boundary detection. *Computer Graphics and Image Processing*, 6(2):123–134, April 1977.
- [77] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4):163–169, July 1987.
- [78] V. Lozano. *Contribution de l'analyse d'image couleur au traitement des images textile*. PhD thesis, Université Jean Monnet, Saint-Etienne, France, January 1998.
- [79] A. Luciani. *Un outil informatique de création d'images animées : modèles d'objets, langage, contrôle gestuel en temps réel*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1985.
- [80] D. MacDonald, K. Worsley, D. Avis, and A.C. Evans. 3D Mapping of Variability in Cortical Anatomy. In *Proc. of SPIE Visualization in Biomedical Computing*, volume 2359, pages 160–169, March 1994.
- [81] R. Malgouyres. *Une définition des surfaces de Z^3* . PhD thesis, Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand, France, February 1994.
- [82] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. In J-O. Eklundh, editor, *Proc. of 3rd European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, volume 800 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–13. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [83] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape Modelling with Front Propagation: A Level Set Approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2):158–174, February 1995.

- [84] T. McInerney and D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1):69–83, January 1995.
- [85] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Snakes. In *Proc. of Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, pages 92–101, Nice, France, 1995. Springer-Verlag.
- [86] T. McInerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis: a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2), March 1996.
- [87] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Surfaces. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 23–32, Grenoble, France, March 1997. Springer-Verlag.
- [88] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models: Overview, implementation and applications. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, pages 194–199, 1993.
- [89] D. Metaxas and I.A. Kakadiaris. Elastically Adaptive Deformable Models. In *Proc. of 4th European Conference on Computer Vision (ECCV'96)*, volume 1065 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 550–559, Cambridge, UK, April 1996. Springer-Verlag, Berlin.
- [90] S. Miguet and J-M. Nicod. An optimal parallel iso-surface extraction algorithm. In S. Miguet and A. Montanvert, editors, *Proc. of 4th International Workshop on Parallel Image Analysis (IWPIA'95)*, pages 65–78, Lyon, France, 1995.
- [91] S. Miguet, J-M. Nicod, and D. Sarrut. A Linear Algorithm for Constructing the Polygon Adjacency Relation in Iso-Surfaces of 3D Images. In *Proc. of 7th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1347 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 125–136, Montpellier, France, 1997. Springer-Verlag.
- [92] S. Miguet and L. Perroton. Discrete surfaces of 26-connected sets of voxels. In *Proc. of 5th Discrete Geometry for Computer Imagery*, Clermont-Ferrand, France, September 1995.
- [93] J.V. Miller, D.E. Breen, W.E. Lorensen, R.M. O'Barnes, and M.J. Wozny. Geometrically deformed models: A method for extracting closed geometric models from volume data. *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings)*, 25(4), July 1991.
- [94] H. Müller and M. Stark. Adaptive Generation of Surfaces in Volume Data. *The Visual Computer*, 9:182–199, 1993.
- [95] O. Monga and S. Benayoun. Using differential geometry in R4 to extract typical features in 3D density images. In *Proc. of 11th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 379–382, The Hague, The Netherlands, September 1992.

- [96] J. Montagnat and H. Delingette. Volumetric Medical Images Segmentation Using Shape Constrained Deformable Models. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–22, Grenoble, France, March 1997. Springer-Verlag.
- [97] A. Montanvert, P. Meer, and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Trans. on Pattern Analysis Machine Intelligence*, 13:307–316, April 1991.
- [98] J.-M. Morel and S. Solimini. *Variational methods in image segmentation*, volume 14 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.
- [99] D.G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in Three-Dimensional Digital Images. *Information and Control*, 51(3):227–247, December 1981.
- [100] C. Nastar and N. Ayache. Frequency-based nonrigid motion analysis: application to four dimensional medical images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(11):1067–1079, November 1996.
- [101] B.K. Natarajan. On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples. *The Visual Computer*, 11(1):52–62, 1994.
- [102] W. Neuenschwander, P. Fua, G. Székely, and O. Kübler. Velcro surfaces: Fast initialization of deformable models. *Computer Vision and Image Understanding*, 65(2):237–245, feb 1997.
- [103] G.M. Nielsen and B. Hamman. The Asymptotic Decider: Resolving the Ambiguity in Marching Cubes. In *Proc. of IEEE Visualization'91*, pages 83–90, San Diego, USA, 1991.
- [104] L. Nocera and J.C. Gee. Robust partial volume tissue classification of cerebral MRI scans. In K.M. Hanson, editor, *Proc. of SPIE Medical Imaging 1997: Image Processing*, Newport Beach, February 1997.
- [105] J.P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, Paris, France, 1987.
- [106] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [107] J. Park, D. Metaxas, and L. Axel. Analysis of left ventricular wall motion based on volumetric deformable models and MRI-SPAMM. *Medical Image Analysis*, 1(1):53–71, March 1996.
- [108] S. Peleg and O. Federbusch. Custom Made Pyramids. In V. Cantoni and S. Leviadi, editors, *Pyramidal Systems for Computer Vision*, volume F 25 of *NATO ASI Series*, pages 165–171. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1986.

- [109] A. Pentland and B. Horowitz. Recovery of nonrigid motion and structure. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):730–742, July 1991.
- [110] L. Perroton. A 26-connected object surface tracking algorithm. *Géométrie discrète en imagerie, fondements et applications*, 1:1–10, September 1993.
- [111] E. Promayon, P. Baconnier, and C. Puech. Physically-Based Deformations Constrained in Displacements and Volume. *Computer Graphics forum*, 15(3):155–164, 1996.
- [112] S. Röhl, A. Haase, and M. von Kienlin. Fast Generation of Leakproof Surfaces from Well-Defined Objects by a Modified Marching Cubes Algorithm. *Computer Graphics Forum*, 14(2):127–138, January 1995.
- [113] H.-C. Rodrian and H. Moock. Dynamic triangulation of animated skeleton-based implicit surfaces. In J.C. Hart and K. van Overveld, editors, *Proc. of 2nd int. work. on Implicit Surfaces*, pages 37–52, Eindhoven, The Netherlands, October 1996.
- [114] A. Rosenfeld, T.Y. Kong, and A.Y. Wu. Digital Surfaces. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(4):305–312, July 1991.
- [115] T. Sederberg and S. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *Computer Graphics (SIGGRAPH'86 Proceedings)*, 20(4):151–160, 1986.
- [116] J.A. Sethian. *Level Set Methods*, volume 3 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 1996.
- [117] R. Shu, C. Zhou, and M.S. Kankanhalli. Adaptive marching cubes. *The Visual Computer*, 11(4):202–217, 1995.
- [118] L.H. Staib and J.S. Duncan. Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11):1061–1075, November 1992.
- [119] L.H. Staib and J.S. Duncan. Model-based deformable surface finding for medical images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(5):720–731, October 1996.
- [120] G. Székely, A. Kelemen, C. Brechbühler, and G. Gerig. Segmentation of 2-D and 3-D objects from mri volume data using constrained elastic deformations of flexible fourier contour and surface models. *Medical Image Analysis*, 1(1):19–34, March 1996.
- [121] R. Szeliski. Bayesian modeling of uncertainty in low-level vision. *International Journal of Computer Vision*, 5:271–301, 1990.
- [122] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface Modeling with oriented Particle Systems. Technical Report 91/14, Digital Equipment Corporation, Cambridge Research Lab., December 1991.
- [123] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling with oriented particle systems. *Computer Graphics*, 26(2):185–194, July 1992.

- [124] H.D. Tagare. Deformable 2-D template matching using orthogonal curves. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(1):108–117, February 1997.
- [125] S. Tanimoto and T. Pavlidis. A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 4:104–119, June 1975.
- [126] H. Tek and B.B. Kimia. Volumetric segmentation of medical images by three-dimensional bubbles. *Computer Vision and Image Understanding*, 65(2):246–258, feb 1997.
- [127] D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4):413–424, 1986.
- [128] D. Terzopoulos and D. Metaxas. Dynamic 3D Models with local and global deformations: Deformable Superquadrics. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(7):703–714, July 1991.
- [129] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH'87), Anaheim, CA, July, 1987*, 21(4):205–214, 1987.
- [130] D. Terzopoulos and R. Szeliski. Tracking with Kalman snakes. In A. Blake and A. Yuille, editors, *Active Vision*, pages 3–20. MIT Press, Cambridge, MA, 1992.
- [131] D. Terzopoulos and A. Witkin. Physically based models with rigid and deformable components. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 8(6):41–51, November 1988.
- [132] J.-P. Thirion and A. Gourdon. The 3D Marching Lines Algorithm. *Graphical Models and Image Processing*, 58(6):503–509, November 1996.
- [133] W.P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1997.
- [134] A. Tikhonov and V. Arsénine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Editions MIR, Moscou, URSS, 1976. Traduction française.
- [135] J.K. Udupa. Multidimensional Digital Boundaries. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(4):311–323, July 1994.
- [136] J.K. Udupa and V.G. Ajjanagadde. Boundary and Object labelling in three-dimensional images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 51:355–369, 1990.
- [137] J.K. Udupa, H.M. Hung, and K.S. Chuang. Surface and Volume Rendering in Three-dimensional Imaging: A Comparison. *Journal of Digital Imaging*, 4(3):159–168, August 1991.
- [138] M. Vasilescu and D. Terzopoulos. Adaptive meshes and shells: Irregular triangulation, discontinuities and hierarchical subdivision. In *Proc. of Conf. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'92)*, pages 829–832, Urbana, IL, June 1992. IEEE Computer Society Press.

- [139] P. Volino and N.M. Thalmann. Efficient self-collision detection on smoothly discretized surface animations using geometrical shape regularity. In M. Dæhlen and L. Kjeldahl, editors, *Proc. of Eurographics'94*. Blackwell Publishers, 1994.
- [140] J. Weickert. Multiscale texture enhancement. In V. Hlaváč and R. Šára, editors, *Proc. of Computer analysis of images and patterns (CAIP'95)*, Prague, Czech Republic, volume 970 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–237. Springer, Berlin, 1995.
- [141] W. Welch and A. Witkin. Free-form shape design using triangulated surfaces. *Computer Graphics, Annual Conference Series (SIGGRAPH'94 Proceedings) Orlando, Florida, USA*, pages 247–256, 1994.
- [142] W.M. Wells, III, W.E.L. Grimson, R. Kikinis, and F.A. Jolesz. Adaptive segmentation of MRI data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(4):429–442, August 1996.
- [143] R.T. Whitaker. Volumetric deformable models: active blobs. In R.A. Robb, editor, *Proc. Third Conf. on Visualization in Biomedical Computing (VBC'94)*, volume 2359 of *SPIE Proc.*, pages 122–134, Rochester, MN, October 1994. SPIE.
- [144] J. Wilhelms and A. Van Gelder. Octrees for Faster Isosurface Generation. *ACM Transactions on Graphics*, 11(3):201–227, July 1992.
- [145] G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data Structures for Soft Objects. *The Visual Computer*, 2(4):227–234, August 1986.
- [146] J.C. Xia, J. El-Sana, and A. Varshney. Adaptive Real-Time Level-of-Detail-Based Rendering for Polygonal Models. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 3(2):171–183, April 1997.
- [147] C. Xu, D.L. Pham, and J.L. Prince. Finding the brain cortex using fuzzy segmentation, isosurfaces, and deformable surface models. In J. Duncan and G. Gindi, editors, *Proc. of 15th Int. Conf. Information Processing in Medical Imaging (IPMI'97)*, Poultney, Vermont, USA, volume 1230 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, June 1997.
- [148] A. Yezzi, Jr., S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, and A. Tannenbaum. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(2):199–209, April 1997.
- [149] A.L. Yuille, P.W. Hallinan, and D.S. Cohen. Feature extraction from faces using deformable templates. *International Journal of Computer Vision*, 8(2):99–111, 1992.
- [150] C. Zhou, R. Shu, and M.S. Kankanhalli. Selectively Meshed Surface Representation. *Computer & Graphics*, 19(6):793–804, 1995.
- [151] S.C. Zhu and A. Yuille. Region competition: Unifying snakes, region growing, and bayes/mdl for multiband image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9):884–900, September 1996.

