

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par **Monsieur François de VIELLEVILLE**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Sous la direction de :

M. Jean-Pierre BRAQUELAIRE, Professeur

M. Jacques-Olivier LACHAUD, Maître de conférence habilité

Analyse des parties linéaires des objets discrets et estimateurs de caractéristiques géométriques

Soutenue publiquement le : 6 Juillet 2007

Après avis de :

M. Jean-Marc Chassery DR 1 CNRS LIS ENSIEG Grenoble
M. Rémy Malgouyres Professeur LAIC IUT Clermont-Ferrand

Devant la Commission d'examen formée de :

M. Éric Andrès	Professeur	Laboratoire SIC, Poitiers	Président
Mme. Jenny Benois-Pineau	Professeur	LaBRI, Univ. Bx 1	Examinateur
M. Jean-Pierre Braquelaire	Professeur	LaBRI, Univ. Bx 1	Directeur
M. Jean-Marc Chassery	DR 1 CNRS	LIS, ENSIEG Grenoble	Rapporteur
M. David Cœurjolly	CR 2 CNRS	Laboratoire LIRIS, Lyon	Examinateur
M. Rémy Malgouyres	Professeur	LAIC, IUT Clermont-Ferrand	Rapporteur
M. Jacques-Olivier Lachaud	MdC Habilité	LaBRI, Univ. Bx 1	Directeur

Résumé

Analyse des parties linéaires des objets discrets et estimateurs de caractéristiques géométriques.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la géométrie discrète et étudie plus particulièrement le comportement des parties linéaires discrètes sur les discrétisés de formes euclidiennes en dimension deux. Pour analyser précisément ce comportement nous utiliserons de façon complémentaire l'approche issue de la *géométrie arithmétique* et une description combinatoire des mots de Christoffel basée sur les fractions continues. Nous montrerons ainsi de nombreux liens entre la convexité (des formes euclidiennes et des formes discrètes) et une classe de parties linéaires : les segments maximaux.

Sur un polygone convexe discret, la nature de ces relations s'exprimera principalement par des contraintes sur les longueurs et le nombre de ses arêtes. En asymptotique sur les discrétisés de formes euclidiennes, ces relations seront exprimées en fonction du pas de la grille. Ces résultats permettront l'étude du comportement asymptotique d'estimateurs géométriques locaux discrets, notamment la convergence multi-grille d'un estimateur de tangente basé sur les segments maximaux. L'estimation de la tangente sur tous les points de la courbe discrète est en temps linéaire grâce à des algorithmes optimaux et incrémentaux issus de la *géométrie arithmétique*.

Mots-clés : géométrie discrète, estimateurs de tangente, segments maximaux, segments discrets, convergence multi-grille

Analysis of linear parts of digital objects and estimators of geometric characteristics.

This Ph.D. thesis is rooted in digital geometry and tackle especially the behaviour of digital linear parts on the digitizations of shapes on the euclidean plane. To analyse precisely this behaviour we will combine both the approach based on *arithmetic geometry* and a description of Christoffel words based on simple continued fractions. Thus we will show many links between the convexity (for both euclidean shapes and digital shapes) and a particular sub-class of digital linear parts : the maximal segments.

On a convex digital polygon, the nature of these links is mainly explained with constraints on the number and lengths of its edges. On the digitization of euclidean shapes, these constraints are formulated as a functional of the grid step. These results allow the study of the asymptotic behaviour of some digital geometric estimators, in particular the multi-grid convergence of a digital tangent estimator based on maximal segments. The computation of the whole set of values on the border on the digitized shape is linear thanks to incremental and optimal algorithms based on *arithmetic geometry*.

Key words : digital geometry, tangent estimators, maximal segments, digital segments, multi-grid convergence

Table des matières

Résumé	i
Notations	1
Introduction	5
1 Géométrie discrète, estimation de paramètres et convergence	9
1.1 Du réel au discret	10
1.1.1 Espace discret	10
1.1.2 Le processus de discrétisation	13
1.1.3 Propriétés de formes discrétisés	14
1.2 Topologie et géométrie discrète	18
1.2.1 Topologie générale	19
1.2.2 Topologie discrète	19
1.2.3 Géométrie discrète	24
1.3 Estimation de caractéristiques géométriques	25
1.3.1 Méthode naïve : différences finies	26
1.3.2 Méthodes paramétrées	27
1.3.3 Méthodes sans paramètre	28
1.3.4 Le problème de l'estimation	29
1.4 Convergence multi-grille	30
1.4.1 Cas des méthodes paramétrées	31
1.4.2 Quantités globales	31
1.4.3 Quantités locales	33
1.5 Conclusion du chapitre	34
2 Parties linéaires à une courbe discrète	37
2.1 Droites discrètes et segments discrets	38
2.1.1 Définitions historiques	38
2.1.2 Vision Géométrie Arithmétique	41
2.1.3 Description Combinatoire	44
2.2 Reconnaissance des segments discrets	48
2.2.1 Pré-image	48
2.2.2 Algorithme DR_1995	49
2.3 Propriétés des motifs et de l'algorithme DR_1995	58
2.3.1 Propriétés des motifs	58
2.3.2 Liens avec l'arbre de Stern-Brocot	62
2.4 Classes de segments discrets	65
2.4.1 Définitions et reconnaissance	66
2.4.2 Propriétés remarquables des segments maximaux	69
2.5 Conclusion du chapitre	73

3	Parties linéaires sur les discrétisés de formes lisses et convexes.	77
3.1	Segments discrets et courbes convexes	78
3.1.1	Convexité discrète et configuration locale	78
3.1.2	Segments sur polygones convexes discrets	82
3.2	Segments maximaux et PCD	87
3.2.1	Relations cardinales	88
3.2.2	Relations de longueurs	95
3.3	Comportement en asymptotique	99
3.4	Comportements des paramètres décrivant les arêtes	105
3.5	Conclusion du chapitre	107
4	Conséquences du comportement des parties linéaires	109
4.1	Estimateur discret de tangente	110
4.1.1	Construction d'un nouvel estimateur discret de tangente	111
4.1.2	Comparaison expérimentale	113
4.1.3	Preuve de convergence multi-grille	114
4.2	Autres estimateurs discrets	120
4.2.1	Estimation de la position	120
4.2.2	Estimation de l'angle moyen	120
4.2.3	Estimation de la courbure	121
4.3	Estimateurs continus	122
4.3.1	Estimateur de tangente par filtre médian	123
4.3.2	Approximation par une parabole	123
4.4	Conclusion	125
5	Conclusion et perspectives	127
5.1	Synthèse	128
5.2	La question des autres estimateurs et des parties quadratiques	129
5.3	La question de la dimension trois	129
5.4	La question des autres discrétisations	130
5.5	La question des autres pavages	130

Notations

Notations mathématiques standard :

$\lfloor x \rfloor$: partie entière de x
 $|x|$: valeur absolue de x
 $a \equiv b [c]$: signifie “ a égal b modulo c ”
 \neg : “non” logique.
 \wedge : “et” logique.
 \exists : quantificateur existentiel.
 \forall : quantificateur universel.
 $\overrightarrow{AB} \equiv \mathbf{AB}$: vecteur de A vers B
 $(x, y) \equiv (x, y)$: point de coordonnées x, y ou vecteur de composantes x, y
 x_A, y_A : coordonnées du point A .
 $[AB]$: segment euclidien joignant les points A et B .
 $\|\cdot\|_n$: norme n de Minkowski
 $\mathcal{O}(f)$: notation “grand O” (majoration)
 $\Omega(f)$: notation “grand Oméga” (minoration)
 $\Theta(f) \equiv \mathcal{O}(f)$ et $\Omega(f)$: notation “grand Tau”
 $f * g$: convolution de f par g
 $g \circ f, g(f)$: composition de f par g .
 $(f)^2$: fonction f au carré.
 $f^n, \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois } f}$: composition de f n fois.
 \mathcal{C}^n : continuité d’ordre n
 \emptyset : ensemble vide
 $\text{Card}(\cdot), |\cdot|$: cardinal d’un ensemble.
 \mathcal{X} : sous-ensemble du plan euclidien
 \mathcal{P} : plan euclidien
 \mathcal{J} : courbe fermée simple dans \mathbb{R}^2
 \cdot^c : complémentaire d’un ensemble dans \mathbb{R}^2
 $\text{int}(\cdot)$: intérieur d’un ensemble
 $\text{bd}(\cdot)$: bord topologique d’un ensemble
 $\text{conv}(\cdot)$: enveloppe convexe d’un ensemble dans \mathbb{R}^2

Chapitre 1 : Géométrie discrète, estimation de paramètres et convergence

p : point discret
 \mathcal{E} : ensemble fini de points discrets
 P : plan discret $\equiv Z^2$
 q : cellule carrée associée à un point discret (2-cellule)
 \mathcal{Q} : pavage engendré par l’ensemble des cellules carrées
 \mathcal{R}_k : relation de k -adjacence
 $\text{DigG}(\cdot)$: discrétisation de Gauss

$Dig_{\mathcal{C}}(\cdot)$: discrétisation par sous-ensemble carré
 $Dig_{\cap}(\cdot)$: discrétisation par intersection
 $Dig_{\nu}(\cdot)$: discrétisation par aire de valeur ν
 $DigJ^{-}(\cdot)$: discrétisation intérieure de Jordan
 $DigJ^{+}(\cdot)$: discrétisation extérieure de Jordan
 $DigG_h(\cdot)$: discrétisation de Gauss pour le pas de grille h
 $Dig(h, \cdot)$: discrétisation par cellules carrés pour le pas de grille h
 Γ : polygone convexe discret
 \mathbb{F}_c^3 : famille d'ensembles euclidiens convexes de bords \mathcal{C}^3 de courbure strictement positive
 $\mathcal{P}(\cdot)$: ensemble des parties d'un ensemble
 $\overline{\mathcal{E}}$: complémentaire discret
 $\Delta(\mathcal{E})$: bord discret d'un objet discret
 $\Delta_h(\mathcal{X})$: bord discret du discrétisé de Gauss pour le pas de grille h d'un ensemble euclidien
 \mathcal{C}_i : i -ème point discret d'une courbe discrète
 $\mathcal{C}_{i,j}$: suite des points discrets d'une courbe discrètes entre les points d'indices i et j
 \mathcal{C} : courbe continue
 $\dot{\mathcal{C}}(t)$: vecteur dérivé au point $\mathcal{C}(t)$
 $\ddot{\mathcal{C}}(t)$: vecteur dérivé seconde au point $\mathcal{C}(t)$
 $\tau(t)$: vecteur tangent unitaire
 $\phi(t)$: orientation de la tangente au point $\mathcal{C}(t)$
 $\kappa(t)$: courbure au point $\mathcal{C}(t)$
 \mathcal{C}_i : courbe discrète
 $\hat{\mathcal{C}}_i \equiv \dot{\mathcal{C}}(i)$: estimation du vecteur dérivé au point d'indice i
 $\hat{\hat{\mathcal{C}}}_i \equiv \ddot{\mathcal{C}}(i)$: estimation du vecteur dérivé seconde au point d'indice i
 $G_{\sigma}(t)$: filtre gaussien d'écart type σ
 \mathcal{G} : descripteur géométrique euclidien
 $\hat{\mathcal{G}}$: estimateur discret du descripteur \mathcal{G}
 $\mathcal{V}_h(A)$: ensemble des points discrets de $DigG_h(S)$ à distance h de A
 \mathbb{F} : famille de forme euclidienne

Chapitre 2 : Parties linéaires à une courbe discrète

$\gamma_{\alpha,\beta}$: demi-droite du plan euclidien de pente α passant par le point $(0, \beta)$
 $I_{\alpha,\beta}$: discrétisation de $\gamma_{\alpha,\beta}$ par GIQ
 $i_{\alpha,\beta}(n)$: $n + 1$ -ième lettre du mot représentant $I_{\alpha,\beta}$
 $bi_{\alpha,\beta}$: mot bi-infini représentant la droite du plan euclidien de pente α passant par le point $(0, \beta)$
 $D_{a,b,\mu}$: droite arithmétique
 $r_D(A)$: reste du point A par rapport à la droite discrète D
 $r_D^+(A)$: reste relatif du point A par rapport à la droite discrète D
 U : point d'appui supérieur d'une droite discrète ou d'un segment discret
 U_l, U_r : point d'appui supérieur le plus à gauche, le plus à droite dans un segment discret
 L : point d'appui inférieur d'une droite discrète ou d'un segment discret
 L_l, L_r : point d'appui inférieur le plus à gauche, le plus à droite dans un segment discret.
 U' : point d'appui supérieur faiblement extérieur à droite discrète.
 L' : point d'appui inférieur faiblement extérieur à droite discrète.
 δ : nombre de motifs d'un segment discret.
 δ : nombre de motifs-renversés d'un segment discret.

$z_n = [u_0, u_1, \dots, u_n]$: fraction continue $u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{u_n}}}$

p_k, q_k : numérateur et dénominateur de $z_k = [u_0, u_1, \dots, u_k]$

$E(\cdot)$: fonction de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans l'ensemble des motifs des droites du premier octant.

DR_1995 : algorithme de Debled-Renesson et Réveillès pour la reconnaissance de segments de droites.

$A \leftarrow x$: assignation, la nouvelle valeur de la variable A est x .

$S(i, j)$: prédicat " $C_{i,j}$ est un segment standard".

$D(i, j)$: caractéristiques du segment standard $C_{i,j}$ reconnues par l'algorithme **DR_1995**.

$v \preceq_s w$: prédicat " v est un facteur droit de w ".

$v' \prec_s w$: prédicat " v' est un facteur droit strict de w ".

$r_n(p)$: reste d'ordre n de p pour un segment standard.

$F(\cdot)$: fonction de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans les mots de Freeman qui associe à une pente le chemin entre un point d'appui supérieur et le point d'appui inférieur qui le suit pour segment standard du premier octant.

L : déplacement vers le fils gauche sur l'arbre de Stern-Brocot.

R : déplacement vers le fils droit sur l'arbre de Stern-Brocot.

$R^0 L^{u_1} \dots L^{u_{2i-1}} R^{u_{2i}}$: succession de déplacements à partir du noeud $\frac{1}{2}$ sur l'arbre de Stern-Brocot.

F : fonction qui à C_i associe le point C_j tel que $S(i, j)$ et $\neg S(i, j + 1)$.

B : la fonction qui à C_i associe le point C_k tel que $S(k, i)$ et $\neg S(k - 1, i)$.

MS_i : i -ème segment maximal d'une courbe discrète fermée.

m, n : premier et dernier point d'un segment maximal.

$\mathcal{L}^1(MS)$: longueur discrète d'un segment maximal.

$|MS|, Card(MS)$: cardinal d'un segment maximal comme ensemble de point discrets.

$\mathcal{P}(k)$: faisceau de segment maximaux passant par le point C_k .

CP : partie commune entre deux segments maximaux consécutifs.

ST : tangente symétrique.

ET : tangente étendue.

HT : demi-tangente.

FTT : tangente de Feschet-Tougne.

N : nombre de points discrets constituant une courbe discrète.

M : nombre de segments maximaux sur une courbe discrète.

Chapitre 3 : Parties linéaires sur les discrétisés de formes lisses et convexes

θ_i : angle formé par le i -ème segment maximal et l'axe des abscisses.

S : forme convexe euclidienne.

Γ : polygone convexe discret

PCD : polygone convexe discret.

V_i : i -ème sommet d'un polygone convexe discret.

ULU : classe des segments maximaux contenant au moins deux points d'appui supérieurs.

LUL : classe des segments maximaux contenant exactement un point d'appui supérieur.

n_{ULU} : nombre de segments maximaux dans la classe ULU .

n_{LUL}^{pair} : nombre de segments maximaux dans la classe LUL dont la pente est de profondeur paire.

n_{LUL}^{impair} : nombre de segments maximaux dans la classe LUL dont la pente est de profondeur impaire.

$n_{MS}(\Gamma)$: nombre de segments maximaux sur le bord de Γ .

$n_e(\Gamma)$: nombre d'arêtes sur le bord de Γ .

$Per(\Gamma)$: périmètre du PCD Γ calculé avec \mathcal{L}^1 .

Chapitre 4 : Conséquences du comportement des parties linéaires

$\hat{\theta}(k)$: estimation de l'angle de la tangente au point d'indice k .

∂S : bord de la forme euclidienne S .

$\hat{\theta}^{conv}$: estimateur discret de l'orientation de la tangente à un CDP comme la direction de l'arête contenant le point d'intérêt.

$\theta(S, x)$: direction de la tangente au point x de ∂S .

$\text{bd} \cdot$: bord topologique euclidien.

$\hat{\theta}^{\text{MS}}$: classe d'estimateurs de l'orientation de la tangente basés sur les segments maximaux.

Δ_{MS}^{\ominus} : différence d'angle moyenne entre segments maximaux consécutifs.

Δ_{EDGE}^{\ominus} : différence d'angle moyenne entre arêtes consécutives.

Introduction

Le développement de l'électronique dans les sociétés industrielles où règnent les conditions modernes de production a permis aux images de prendre une place prépondérante dans de nombreux domaines. Utilisées en tant que modes de représentation des données capturées par les appareils d'acquisition, elles deviennent ainsi une forme de stockage privilégiée apparaissant naturelle pour sa visualisation par les utilisateurs. Leur taille, leur nombre et leur précision vont toujours croissant. Les facteurs contribuant à ce phénomène sont autant sociétaux que technologiques. D'une part, les images permettent une représentation fidèle du monde qui nous entoure, d'autre part, la miniaturisation des composants permet d'augmenter la précision des capteurs et la capacité des mémoires ; augmentant ainsi la qualité de la représentation du monde. Le traitement et l'analyse des images, devenus corollaires de leur production, ne peuvent être assurés informatiquement que par des algorithmes eux aussi de plus en plus performants, à la fois du point de vue de leur vitesse d'exécution, de leur consommation mémoire, de leurs précision et de leur robustesse. Nécessaires partout où les images sont produites, transmises et utilisées, leurs domaines d'application couvrent un large spectre : la compression de données, la constitution et la recherche dans des bases de données, l'imagerie médicale, la reconnaissance de formes ou le contrôle de processus industriels. Cependant le tri, l'organisation, la structuration, la segmentation, la visualisation et l'interprétation de ces images nécessitent l'extraction d'une partie des informations qu'elles contiennent. Au plus bas niveau les données sont de natures topologiques, géométriques, fréquentielles ou encore colorimétriques. L'ensemble des méthodes qui en réalisent l'extraction constitue une partie de l'analyse d'image. Nous serons ici intéressés plus précisément par l'extraction de caractéristiques géométriques en analyse de formes.

Les algorithmes réalisant ces tâches, exprimés principalement à l'aide du formalisme mathématique du continu, se heurtent à deux problèmes. Tout d'abord la structure spatiale des images est une donnée discrète. Ensuite la mise en œuvre sur machine des algorithmes, réalisant la traduction des étapes des calculs mathématiques, met en jeu des objets informatiques comme s'ils étaient purement mathématiques. Ainsi les résultats des passages à la limite, définis et exprimables mathématiquement, ne peuvent être utilisés facilement en pratique. Aussi la solution la plus couramment appliquée est de plonger les données discrètes dans un espace continu et de combler l'information manquante par des modèles choisis *a priori*. Les modèles retenus pour cette opération sont ceux dont le comportement est facilement et efficacement calculable sur machine (polynômes de degrés finis, gaussienne, systèmes linéaires, etc.). Cette méthodologie soulève deux problèmes. Tout d'abord, retranscrire les données discrètes dans le monde continu nécessite souvent des paramètres supplémentaires pour lesquels les valeurs optimales de ces paramètres ne sont généralement pas connues et ce, malgré le choix *explicite* du modèle continu pour la retranscription des données. Ensuite, le biais introduit par le modèle continu choisi pour la retranscription des données conduit à l'extraction des caractéristiques du modèle choisi, plutôt que celles des objets initiaux, imparfaitement capturés par les processus d'acquisitions.

Une autre approche observe que la structure et la précision des images est cohérente avec les calculs réalisables sur machine pour ces structures et à ces précisions. Cette famille de méthodes opère sur les images en tant qu'*objets discrets*. Ainsi les théorèmes et les propriétés issus de la théorie des nombres et de l'arithmétique entière sont utilisés conjointement avec la structure discrète de

ces images, et ce afin de se rapprocher des caractéristiques supposées de l'objet initial de leur étude. Cet axe de réflexion constitue un paradigme à l'interface des mathématiques et de l'informatique appelé *géométrie discrète*. Cette thèse s'intéresse à l'étude des parties linéaires des objets discrets en dimension deux dans le cadre de la *géométrie discrète*. Cette étude nous conduira à identifier une sous classe des parties linéaires, appelée les *segments maximaux*, comme étant représentative de certaines propriétés de la forme euclidienne, supposée sous-jacente aux objets discrets. Parmi ces propriétés, celle de la convexité permettra la formulation de contraintes explicitant le comportement des segments maximaux sur les discrétisés des formes euclidiennes lisses et convexes. De cette étude est née une base théorique pour prouver la convergence multi-grille d'estimateurs locaux opérant sur les bords des objets discrets, représentés par des contours 4-connexes. La convergence multi-grille permet d'assurer que plus la précision des images est grande plus les caractéristiques extraites tendent vers celles que notre objet d'étude initial est supposé posséder : des caractéristiques euclidiennes.

Organisation du manuscrit :

Ce manuscrit est décomposé en trois parties : la première (Chapitres 1 et 2) est une introduction générale aux notions classiques de géométrie discrète, qui présente aussi quelques éléments pour comparer des estimateurs puis se resserre sur la présentation des droites et segments discrets. La seconde (Chapitre 3) constitue une étude précise du lien entre les segments maximaux et la convexité discrète ainsi qu'une étude du comportement asymptotique des segments maximaux. Enfin, la dernière partie (Chapitre 4) est une étude sur certains estimateurs discrets et continus. Les résultats théoriques s'appuient principalement sur les résultats de la deuxième partie.

Plus précisément, nous rappelons les notions de base concernant l'espace discret, notamment les relations entre les objets les plus simples. Ces notions nous amènent ensuite à étudier comment transférer une forme euclidienne dans le monde discret. Ce processus de *discrétisation* possède plusieurs propriétés qui nous seront nécessaires pour la deuxième partie. L'étude de ce processus nous conduit aussi à nous demander si certaines propriétés usuelles d'un objet euclidien sont transmises à son discrétisé et, le cas échéant, sous quelles conditions. La question de l'éventuelle préservation de la convexité lors du processus de discrétisation sera particulièrement étudiée.

Cette thèse se focalisant sur les estimateurs géométriques locaux, la notion de bord discret est rappelée ainsi que les équivalents discrets du théorème de Jordan. Nous présentons ensuite certaines grandes familles d'estimateurs utilisées en analyse d'image. Cette présentation pose le problème de l'évaluation des estimateurs et propose des critères *objectifs* pour les comparer. Les estimateurs géométriques les plus utilisés sont presque toujours dépendants d'un paramètre extérieur : la *fenêtre de calcul*. Intuitivement, ce paramètre définit la taille du voisinage qui est utilisée par l'algorithme pour déterminer la quantité géométrique recherchée. Il est ainsi clair que les méthodes nécessitant un paramètre pour la taille de la fenêtre de calcul fixent d'emblée l'ensemble des géométries locales sur lesquelles elles opèrent. Cette restriction induit directement la non-convergence multi-grille de ces estimateurs. Parmi les méthodes sans paramètre, les estimateurs basés sur les segments de droites discrètes semblent posséder un potentiel intéressant : l'adaptation automatique à la géométrie locale de la forme. Ce choix nous impose de présenter ces objets que sont les droites et les segments discrets et de détailler leurs propriétés. Outre les différentes classes de segments discrets, leur reconnaissance par des algorithmes optimaux est aussi présentée. Leurs propriétés intrinsèques sont étudiées en combinant la géométrie arithmétique et une description combinatoire basée sur les fractions continues. Ainsi nous disposons des outils nécessaires pour étudier en profondeur les relations entre les segments maximaux et la convexité.

Dans la deuxième partie, nous examinons dans un premier temps les segments discrets sur

le bord de discrétisés de formes convexes. Nous cherchons plus précisément des propriétés sur les configurations locales des segments maximaux sur ces bords. Nous caractérisons, à l'aide des points extrémaux des segments maximaux, des contraintes sur la position de la courbe réelle sous-jacente à ces configurations locales, qui sont en fait représentatives de la convexité. Dans un deuxième temps, nous étudions les configurations des segments maximaux sur les polygones convexes discrets (PCD) dont les sommets sont à coordonnées entières. Nous verrons ainsi les relations profondes entre les arêtes des PCD et les segments maximaux. Le travail obtenu en conjuguant la géométrie arithmétique et la description combinatoire se révèle indispensable dans l'établissement de ces liens. Ces relations sont telles que les longueurs des segments maximaux sont exprimables à partir de la longueur des arêtes. De plus, le nombre des segments maximaux se majore par une constante multipliée par le nombre d'arêtes. Ces résultats sont généralisés en asymptotique en étudiant les discrétisés des formes lisses et convexes et s'expriment en fonction du pas de la grille. Ceci est possible grâce à un théorème de Balog et Bárány reliant les discrétisés de formes convexes et les sommets de l'enveloppe convexe. Nous obtenons ainsi le comportement asymptotique de la moyenne de la longueur des segments maximaux, qui est l'un des résultats principaux de cette thèse et qui est vérifié en pratique. Les comportements extrêmes sont aussi explicités, là encore exprimés en fonction du pas de la grille. Ainsi nous sommes en mesure d'asseoir sur une base formelle la comparaison d'estimateurs géométriques locaux et de prouver la convergence multi-grille de certains estimateurs.

Enfin, la dernière partie étudie comparativement des estimateurs de tangente discrète existants. Les critères préconisés dans la première partie sont utilisés, permettant de dégager clairement l'estimateur λ -MST comme le meilleur parmi les estimateurs de tangente basés sur la reconnaissance de segments de droites. Nous ajoutons les preuves de convergence multi-grille pour cet estimateur et ce grâce au travail réalisé dans la deuxième partie. Nous abordons aussi la convergence d'un estimateur de position et donnons quelques pistes concernant l'estimation de la courbure. Il nous semble d'ailleurs difficile de construire un estimateur de courbure convergent basé uniquement sur une fenêtre donnée par les parties linéaires discrètes. Une brève comparaison de l'estimateur λ -MST avec deux estimateurs de tangente n'étant pas basés sur les parties linéaires vient conforter nos intuitions : un fort potentiel pour les estimateurs discrets issus de la géométrie discrète.

Au terme de ce mémoire nous concluons en rappelant les principaux résultats de ces études et proposerons quelques pistes de recherches qui permettraient de mettre en perspective les travaux présentés.

Chapitre 1

Géométrie discrète, estimation de paramètres et convergence

“Elle est subversive en ce qu’elle conteste le règne absolu du continu en géométrie. Elle est en cours de développement pour elle-même et pour l’imagerie informatique”.

J.FRANÇON

Ce chapitre a pour but d'introduire le problème de l'évaluation d'un estimateur géométrique. La formulation d'un tel problème met en jeu plusieurs notions mathématiques. Tout d'abord une formalisation de l'espace de travail (topologique, géométrique) qui est utilisé sur ordinateur. Ensuite comment modéliser le passage d'un objet "réel" (souvent considéré comme euclidien pour sa topologie et sa géométrie) sur ordinateur et comment simuler cette transformation (passage du monde "continu" au monde "discret") ? Une fois l'objet discrétisé, possède-t-il encore ses propriétés ? D'une façon générale quels sont les équivalents discrets des propriétés usuelles du monde continu (topologiques ou géométriques) ? Quel est le bord d'une forme discrète et comment la définir ? Ensuite comment calculer les quantités géométriques locales classiques dans le monde discret et sur quels critères faut-il décider de la pertinence du calcul ? Existe-t-il des critères objectifs, et sont-ils exprimables formellement ?

Les notions nécessaires à la compréhension de ces questions seront données dans ce chapitre ainsi que certains éléments de réponses. Le chapitre se présente comme suit :

- La section 1 abordera le problème de la discrétisation. Nous présenterons en particulier la discrétisation de Gauss et certaines de ses propriétés sur les formes lisses et convexes du plan euclidien.
- La section 2 traitera brièvement de quelques problèmes usuels de topologie. Le bord d'une forme discrète sera défini.
- La section 3 présentera les méthodes les plus usuelles pour l'estimation de paramètres géométriques ainsi que les critères retenus pour leur comparaison.
- La section 4 s'attachera à formaliser un critère objectif pour comparer les estimateurs locaux : la convergence multi-grille.

1.1 Du réel au discret

Nous commencerons par rappeler les notions décrivant l'espace discret des images numériques dans lequel nous travaillerons. Nous présenterons aussi comment passer d'un objet euclidien à un objet discret, c'est-à-dire comment faire le processus de discrétisation et quelques définitions classiques sur les objets discrets.

1.1.1 Espace discret

L'espace de travail considéré est un pavage régulier de dimension deux dans lequel les éléments sont des cellules à coordonnées entières. Malgré l'existence d'autre types de pavages [CM91] nous considérerons uniquement le pavage carré (voir Figure 1.1.1), plus adapté aux images et matériels existant dans le domaine de la vision par ordinateur.

Cet espace permet de constituer des images binaires et est parfaitement adapté pour décrire les relations géométriques entretenues par les éléments de l'image ou des parties de ces images numériques.

Ce pavage peut être associé à \mathbb{Z}^2 (en mettant en bijection les éléments de \mathbb{Z}^2 et le centre de chaque cellule). Pour un espace de dimension n le pavage considéré est formé de cubes de dimension n (des n -cubes), l'espace associé étant \mathbb{Z}^n . Le centre de gravité de chaque cellule donne les coordonnées géométriques du point discret associé à chaque élément du pavage, cet élément est appelé *point discret* et ses coordonnées sont entières. Une collection de points discrets forme un "objet" discret, et les questions concernant les "voisinages" des éléments des "objets" discrets se posent alors. En deux dimensions les notions de voisinages correspondent à des adjacences par les côtés ou les sommets des cellules.

D'une façon générale un ensemble fini de points discrets (ou une suite finie de points distincts) sera noté \mathcal{E} et un point discret sera noté p , la cellule carrée représentant le point discret sera notée q . Le plan discret sera noté P , le pavage décrit par l'ensemble des cellules sera noté \mathcal{Q} et le plan euclidien sera noté \mathcal{P} . Ces cellules sont aussi appelées 2-cellules, leur côtés sont des 1-cellules et leurs sommets sont des 0-cellules comme illustré sur la Figure 1.1.2.

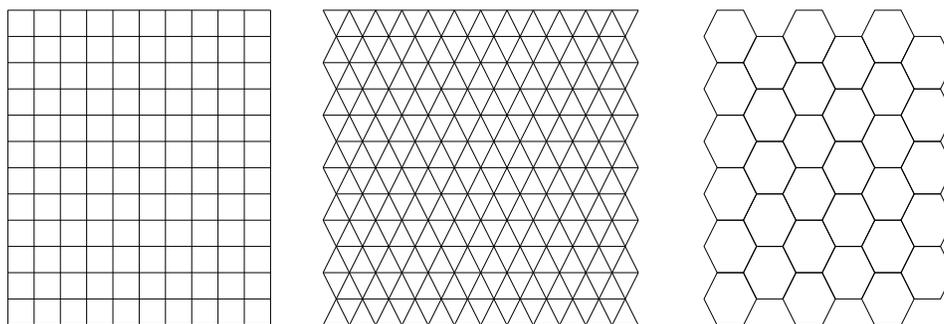


FIG. 1.1.1 – Trois pavages réguliers possibles en dimension deux. De gauche à droite : carré, triangulaire, hexagonal.

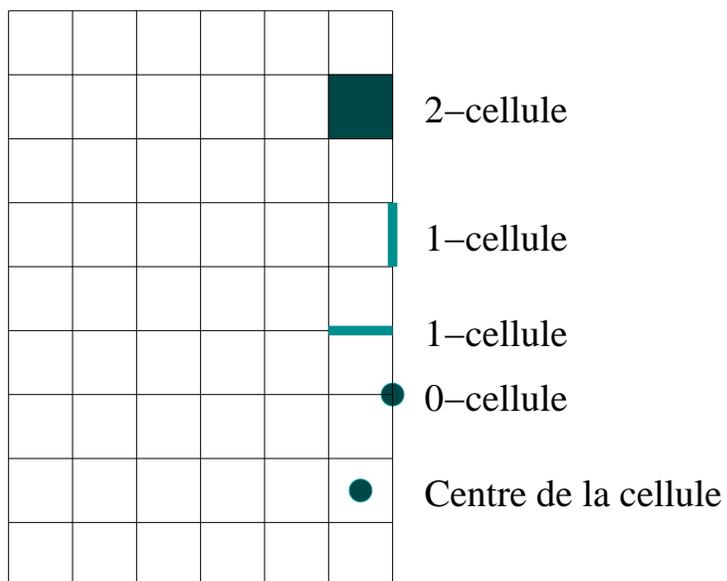


FIG. 1.1.2 – Grille orthogonale régulière dans le plan avec les différents types de cellule.

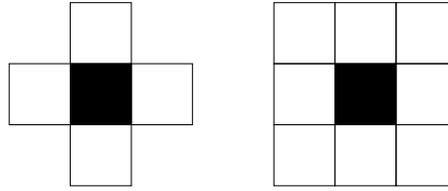


FIG. 1.1.3 – Un point du plan discret en noir avec ses 4-voisins (gauche) et ses 8-voisins (droite) en blanc.

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées de deux points discrets p et p' dans notre espace en deux dimensions.

Définition 1.1.1

Deux cellules q et q' distinctes sont dites 1-adjacentes si et seulement si leur intersection est une 1-cellule. Deux points du plan discret distincts, p et p' , sont 4-adjacents ssi $|x - x'| + |y - y'| = 1$.

Définition 1.1.2

Deux cellules q et q' distinctes sont dites 0-adjacentes si et seulement si leur intersection contient une 0-cellule. Deux points du plan discret, p et p' , sont 8-adjacents ssi $\max(|x - x'|, |y - y'|) = 1$.

Ces deux définitions sont illustrées sur la Figure 1.1.3. Le graphe de 4-adjacence des éléments de P constitue un maillage.

Dans les espaces discrets de dimension n , les relations d'adjacence se généralisent sans difficultés : on considère que deux points sont $O(r)$ -voisins si leurs coordonnées diffèrent de 1 sur au plus r coordonnées, les autres étant égales.

Ces relations d'adjacences permettent de définir des objets discrets particuliers. Tout d'abord il est possible de définir un "chemin" liant une suite de point discrets. Cette notion de chemin se veut un équivalent discret simple pour une courbe ouverte.

Définition 1.1.3

Si \mathcal{E} est une suite finie de points discrets $(p_i)_{0 \leq i \leq n}$ et \mathcal{R}_k une relation de k -adjacence alors \mathcal{E} est un k -chemin si pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, $p_i \mathcal{R}_k p_{i+1}$.

De la même façon on peut définir un objet discret défini par une relation de k -adjacence.

Définition 1.1.4

Si \mathcal{E} est un ensemble de points discrets et \mathcal{R}_k une relation de k -adjacence alors \mathcal{E} est un k -objet si pour tout couple p, p' de \mathcal{E} il existe un k -chemin dans \mathcal{E} reliant p et p' .

Pour un objet discret, séparer ses k -objets maximaux (au sens de l'inclusion) revient à identifier ses composantes k -connexes.

Ces objets discrets représentent le plus souvent des régions des images numériques, obtenues par des processus d'acquisition. On peut par exemple modéliser le comportement des capteurs en considérant qu'ils effectuent un moyennage de l'information lumineuse reçue sur l'aire constituant leur surface photosensible et en négligeant le bruit.

On peut aussi générer directement des objets discrets à partir d'objets issus du monde mathématique, en particulier des espaces euclidiens, on utilise alors un processus de *discrétisation*.

Un processus de discrétisation transforme un ensemble de points du plan euclidien en un ensemble de points du plan discret. Il existe de nombreuses méthodes de discrétisation (certaines s'expriment d'une façon générale en fonction de la géométrie des cellules constituant le plan discret). Quelques propriétés des processus de discrétisation seront discutés par la suite. La Figure 1.1.4 illustre quelques discrétisations usuelles.

Dans ce mémoire, nous considérerons principalement la discrétisation dite "de Gauss" en raison de l'historique des travaux sur la convergence d'estimations géométriques. Nous présentons aussi

les discrétisations par aire, en rappelant que l'on peut considérer un point discret p comme une cellule carré q de côté 1 dont le centre de gravité est p . Dans ces définitions, nous considérerons que \mathcal{X} est un sous-ensemble de points du plan euclidien.

Définition 1.1.5

On appelle *discrétisation de Gauss* de \mathcal{X} et l'on note $DigG(\mathcal{X})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{X} \cap \mathbb{Z}^2$.

L'ensemble obtenu par la discrétisation de Gauss est un ensemble de points de \mathbb{Z}^2 , les définitions suivantes donnent des ensembles de cellules.

Définition 1.1.6

On appelle *discrétisation par sous-ensemble carré* et l'on note $Dig_{\subseteq}(\mathcal{X})$ l'ensemble des éléments de $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}}(q \subseteq \mathcal{X})$.

Définition 1.1.7

On appelle *discrétisation par intersection* et l'on note $Dig_{\cap}(\mathcal{X})$ l'ensemble des éléments de $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}}(q \cap \mathcal{X} \neq \emptyset)$.

Définition 1.1.8

On appelle *discrétisation par aire* ν et l'on note $Dig_{\nu}(\mathcal{X})$ l'ensemble des éléments de $\bigcup_{q \in \mathcal{Q}}(\text{aire}(q \cap \mathcal{X}) \geq \nu)$.

Ces définitions sont aussi connues sous d'autres noms (cf [KR04a]) :

Définition 1.1.9

Soit \mathcal{X} un sous ensemble de \mathbb{R}^2 . $DigJ^{-}(\mathcal{X})$ est l'union des 2-cellules complètement contenues dans \mathcal{X} . $DigJ^{+}(\mathcal{X})$ est l'union des 2-cellules dont l'intersection avec \mathcal{X} est non-vide. $DigJ^{-}(\mathcal{X})$ est appelée *discrétisation intérieure de Jordan* et $DigJ^{+}(\mathcal{X})$ est appelée *discrétisation extérieure de Jordan*.

$DigJ^{-}(\mathcal{X})$ correspondant à la discrétisation par sous-ensemble carré et $DigJ^{+}(\mathcal{X})$ à la discrétisation par intersection. On remarquera que $Dig_{\subseteq}(\mathcal{X}) \subseteq Dig_{\nu}(\mathcal{X}) \subseteq Dig_{\cap}(\mathcal{X})$ et $Dig_{\subseteq}(\mathcal{X}) \subseteq DigG(\mathcal{X}) \subseteq Dig_{\cap}(\mathcal{X})$. Il existe encore beaucoup d'autres façons de discrétiser un objet euclidien, notamment les courbes ou les arcs en considérant la distance euclidienne aux points de la maille induite par le pavage, GIQ par exemple, dont nous donnons la définition pour des raisons historiques :

Définition 1.1.10

La *discrétisation par intersection de la grille d'une courbe plane* est l'ensemble des points du plan discret qui sont les plus proches (pour la distance euclidienne) des points d'intersection de la courbe avec les lignes de la grille.

Il est à noter que aucune de ces discrétisations n'est invariante par translation, c'est-à-dire que un même objet euclidien translaté à différents endroits du plan peut donner des discrétisés ayant une géométrie différente.

1.1.2 Le processus de discrétisation

La remarque précédente est à rapprocher de celle-ci : un objet réel peut avoir des discrétisations à des résolutions différentes. Par exemple, sans changer le processus de discrétisation, il suffit de discrétiser le dilaté de l'objet euclidien. Sinon il suffit de considérer une autre grille régulière et de faire la discrétisation de l'objet euclidien par rapport à cette dernière grille.

Ainsi la notion même de résolution, c'est-à-dire la taille d'un objet, est en fait liée à la grille choisie pour discrétiser l'objet réel. Considérons une forme réelle dans le plan euclidien et superposons une grille discrète régulière (dont les axes ont mêmes directions et mêmes orientations que le plan euclidien) dont la différence de pas vaut h , c'est à dire que la distance entre deux éléments 4-connexes vaut h , comme illustré sur la Figure 1.1.5. La résolution de la forme discrétisée sur

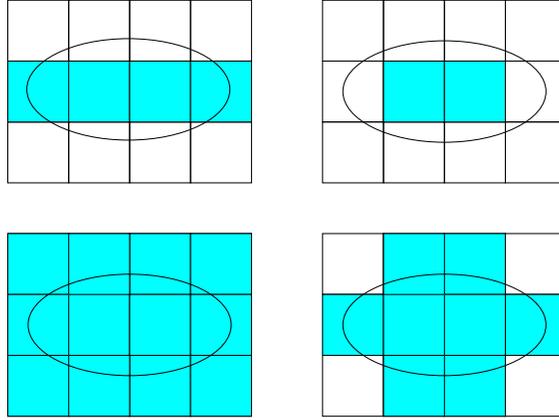


FIG. 1.1.4 – De gauche à droite et de haut en bas : discrétisation de Gauss, par sous-ensemble carré, par intersection et par aire ($\nu = \frac{1}{6}$) d'une ellipse.

cette nouvelle grille discrète est alors considérée comme l'inverse de ce pas h , intuitivement cette quantité est bien liée à la taille de l'objet en pixels. On pourra remarquer qu'il revient au même de dilater la forme par un coefficient $r = \frac{1}{h}$ et de prendre sa discrétisation pour un pas unitaire. Nous sommes donc amenés à considérer non plus une discrétisation mais une discrétisation à une échelle donnée :

Définition 1.1.11

On appelle *discrétisation de Gauss de résolution $\frac{1}{h}$ de \mathcal{X}* et l'on note $DigG_h(\mathcal{X})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{X} \cap (h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z})$.

Cette notion de discrétisé pour le pas de grille h peut bien sûr être appliquée aux précédentes discrétisations. Latecki, Conrad et Gross ([LCG98]) se proposent de noter $Dig(h, \mathcal{X})$ la discrétisation d'un ensemble \mathcal{X} sur une grille discrète dont les cellules sont des carrés (une cellule carrée est noté q) de diamètre h et considèrent les cas où trois propriétés importantes sont vérifiées :

Propriété 1.1.12

Si un carré q de \mathcal{Q} est contenu dans \mathcal{X} , alors $q \in Dig(h, \mathcal{X})$.

Propriété 1.1.13

Si un carré q de \mathcal{Q} est disjoint de \mathcal{X} , alors $q \notin Dig(h, \mathcal{X})$.

Propriété 1.1.14

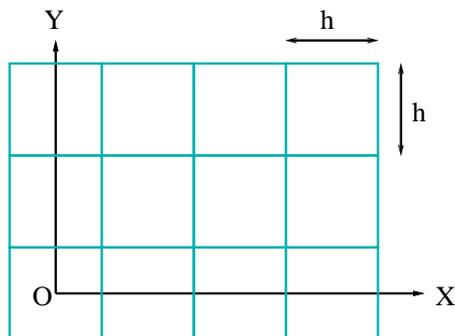
Si un carré q de \mathcal{Q} est dans $Dig(h, \mathcal{X})$ et que $aire(\mathcal{X} \cap q) \leq aire(\mathcal{X} \cap q')$ pour un carré q' de \mathcal{Q} , alors $q' \in Dig(h, \mathcal{X})$.

On remarquera que les discrétisations présentées en Déf. 1.1.6, Déf. 1.1.7 et Déf. 1.1.8 vérifient ces trois propriétés, contrairement à la discrétisation de Gauss (Déf. 1.1.5).

La résolution des objets discrets semble liée à la notion d'approximation, on sera en particulier intéressé par le comportement de la forme discrétisée lorsque le pas de la grille tend vers zéro afin d'observer si les propriétés (convexité, connexité, topologie par exemple) se transmettent ou se conservent.

1.1.3 Propriétés de formes discrétisés

Un discrétisé étant toujours moins riche que l'objet euclidien dont il provient, est-ce que ses propriétés sont conservés d'un espace à l'autre? Plus précisément existe-t-il une résolution à partir

FIG. 1.1.5 – Plan euclidien et grille discrète de pas h superposé.

de laquelle les objets euclidiens¹ et leurs discrétisés ont des propriétés communes? En particulier, les objets discrétisés sont-ils toujours d'un seul tenant et plus généralement gardent-ils la même topologie? Cette question a été abordée par Latecki, Conrad et Gross [LCG98] et ils montrent que :

Théorème 1.1.15

Pour tout sous ensemble A , \mathcal{C}^2 du plan (fermeture d'un ensemble ouvert dont le bord peut être donné comme une union finie de courbes disjointes \mathcal{C}^2) il existe toujours une résolution h à partir de laquelle A et $Dig(h, A)$ ont même topologie.

Par la suite nous considérerons que $bd(\mathcal{X})$ est le bord topologique de \mathcal{X} , que \mathcal{X}^c est son complémentaire et que $int(\mathcal{X})$ est son intérieur. Latecki *et. al.* s'appuient sur la définition d'ensemble $par(r)$ -réguliers pour démontrer le théorème précédent :

Définition 1.1.16

Pour \mathcal{X} étant un sous-ensemble du plan euclidien de bord (topologique) compact, on dira que :

- \mathcal{X} est $par(r, +)$ -régulier si il existe une boule extérieure osculatoire de rayon r en tout point du bord de \mathcal{X} .
- \mathcal{X} est $par(r, -)$ -régulier si il existe une boule intérieure osculatoire de rayon r en tout point du bord de \mathcal{X} .
- \mathcal{X} est $par(r)$ -régulier si il est $par(r, +)$ -régulier et $par(r, -)$ -régulier.

Une boule osculatoire intérieure de rayon r en un point x notée $iob(r, x)$ de $bd(\mathcal{X})$ vérifie $bd(\mathcal{X}) \cap bd(iob(r, x)) = \{x\}$ et $iob(r, x) \subseteq int(\mathcal{X}) \cup \{x\}$. Similairement, une boule osculatoire extérieure de rayon r en un point x notée $oob(r, x)$ de $bd(\mathcal{X})$ vérifie $bd(\mathcal{X}) \cap bd(oob(r, x)) = \{x\}$ et $oob(r, x) \subseteq \mathcal{X}^c \cup \{x\}$. Ainsi d'après ces définitions un cercle de rayon r n'est pas $par(r)$ -régulier.

Ils montrent aussi que pour tout ensemble A , \mathcal{C}^2 il existe u tel que A soit $par(u)$ -régulier, et ils concluent à l'aide du Théorème 5 de [LCG98].

On remarque que certains sous-ensembles simples du plan pourtant convexes, ne gardent pas leurs topologie lorsque l'on passe dans le monde discret (voir Figure 1.1.6).

Bien que de nature purement topologique ce résultat a des implications très fortes pour les discrétisés, en particulier certaines configurations de points discrets sont exclues :

Théorème 1.1.17

Soit A un ensemble $par(r)$ -régulier, alors la configuration spatiale des points de la Figure 1.1.7 et sa rotation à 90 degrés ne peuvent être présents dans $Dig(r, A)$.

Grossièrement, il s'en suit que $Dig(r, A)$ est 4-connexe et de complémentaire 4-connexe, le terme consacré étant *bien-composé* [LLR95]. Malheureusement, la discrétisation de Gauss ne vérifie pas

¹Ou plus vraisemblablement certains sous-ensembles du plan ayant des propriétés remarquables.

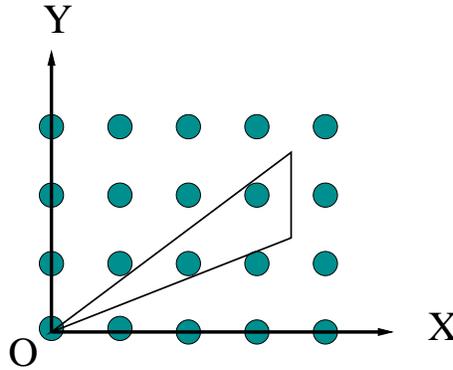


FIG. 1.1.6 – Convexe de \mathbb{R}^2 dont la discrétisation de Gauss est toujours déconnectée quel que soit le pas de discrétisation $h \leq 1$.

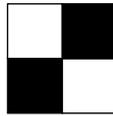


FIG. 1.1.7 – Cette configuration spatiale des points et sa rotation à 90 degrés ne peuvent être présentes dans $Dig(r, A)$ sous les conditions du Théorème 1.1.17.

la Propriété 1.1.14 et ces puissants théorèmes ne peuvent pas être utilisés. Cependant on peut facilement montrer le lemme suivant sur la base de considérations similaires :

Lemme 1.1.18

Soit \mathcal{X} un ensemble convexe du plan de bord C^3 de courbure strictement positive, il existe alors h_S telle que pour tout $h \leq h_S$, $DigG_h(\mathcal{X})$ soit 4-connexe.

Preuve:

En utilisant [LCG98], il existe $u_{\mathcal{X}}$ tel que \mathcal{X} soit $par(u_{\mathcal{X}})$ -régulier. Tout ensemble $par(r)$ -régulier est aussi $par(r')$ -régulier pour $r' \leq r$ d'après leur définition.

Supposons maintenant que $u_{\mathcal{X}} \geq h$, et que $DigG_h(\mathcal{X})$ ait plusieurs composantes connexes. Chacune de ces composantes contient des points discrets situés juste au bord de l'objet discret (c'est à dire un point dont l'un des 4-voisins n'est pas un point de $DigG_h(\mathcal{X})$), sinon \mathcal{X} ne serait convexe.

Considérons maintenant que $h_S = \frac{u_{\mathcal{X}}}{8}$ et observons $DigG_h(\mathcal{X})$ avec $h \leq h_S$; la $par(u_{\mathcal{X}})$ -régularité implique les boules osculatoires intérieures et extérieures sont au moins de diamètre $8h$ le long du bord de \mathcal{X} , de telles boules contiennent toujours un carré de quatre cellules, les boules osculatoires intérieures se déplaçant continûment le long de $bd(\mathcal{X})$, le chemin 4-connexe défini par leur discrétisation $\left(DigG_h \left(\bigcup_{x \in bd(\mathcal{X})} iob(h, x) \right) \right)$ contient tous les points discret au bord de \mathcal{X} , il relie par conséquent toutes les composantes 4-connexes de $DigG_h(\mathcal{X})$ et $DigG_h(\mathcal{X})$ est 4-connexe. \square

De la même façon, une propriété simple comme la convexité est-elle garantie passée une certaine résolution? Et comment définir une convexité discrète? Rappelons tout d'abord la définition euclidienne de la convexité :

Définition 1.1.19

Un ensemble \mathcal{X} est dit convexe si et seulement si tout segment euclidien tracé entre deux points

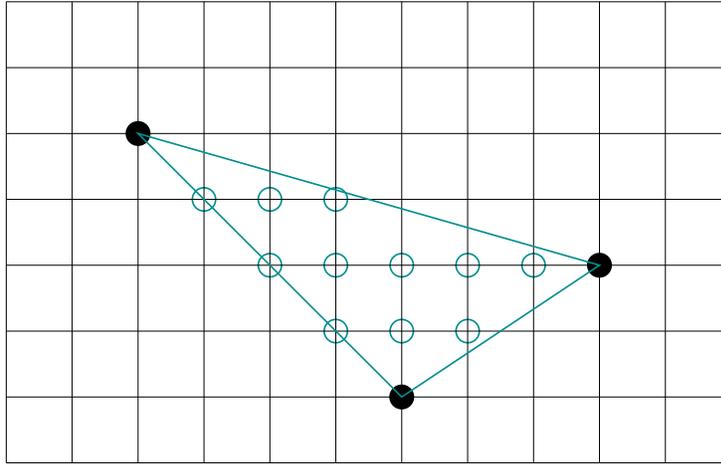


FIG. 1.1.8 – Points discrets triangulaires à un triplet de points. Les trois points en noir représentent le triplet, en blanc les points dits triangulaires. L'ensemble obtenu (points blancs et points noirs) est 8-connexe.

appartenant à \mathcal{X} est contenu dans \mathcal{X} .

Voss propose une définition de la convexité discrète, basée sur la définition de points dit *triangulaires* à un triplet de point ([Vos93]) :

Définition 1.1.20

Soit un triplet de points discrets non-collinéaires (p_1, p_2, p_3) . Les coordonnées de tout point $p = (x, y)$ s'expriment comme :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1), \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1), \\ \lambda &= \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}, \\ \mu &= \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

p est dit triangulaire par rapport à (p_1, p_2, p_3) si $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu \leq 1$.

Définition 1.1.21

Un ensemble \mathcal{E} est dit convexe si pour n'importe quel triplet (p_1, p_2, p_3) de points de \mathcal{E} , tout point p triangulaire à (p_1, p_2, p_3) est dans \mathcal{E} .

Cette définition a cependant le désavantage de considérer comme convexe des ensembles 8-connexes (voir Figure 1.1.8). Nous verrons pourquoi ceci est gênant lorsque nous considérerons les bords discrets des objets.

On remarque que pour tout triplet les valeurs limites sur λ et μ correspondent aux points euclidiens du bord de son enveloppe convexe. Nous notons $\text{conv}(\mathcal{X})$ l'enveloppe convexe de \mathcal{X} et observons que $\text{conv}(\mathcal{E})$ est dans le cas général un sous ensemble de \mathcal{P} . Remarquons que les ensembles convexes ont une propriété remarquable vis-à-vis de la discrétisation de Gauss :

Lemme 1.1.22

Soit \mathcal{X} un ensemble convexe du plan euclidien, alors $\text{DigG}(\mathcal{X}) = \text{DigG}(\text{conv}(\text{DigG}(\mathcal{X})))$.

Preuve:

Nous montrons tout d'abord que $DigG(\mathcal{X}) \subseteq DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X})))$:

$$\begin{aligned} DigG(\mathcal{X}) &\subseteq \text{conv}(DigG(\mathcal{X})) \\ DigG(DigG(\mathcal{X})) &\subseteq DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X}))) \\ DigG(\mathcal{X}) &\subseteq DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X}))) \end{aligned}$$

Puis, tout élément de $DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X})))$ étant aussi dans $DigG(\mathcal{X})$, remarquons que :

$$DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X}))) \subset \text{conv}(DigG(\mathcal{X})) \subset \mathcal{X},$$

il vient alors :

$$DigG(\text{conv}(DigG(\mathcal{X}))) \subset DigG(\mathcal{X}).$$

□

Cependant cette propriété ne suffit pas à garantir la 4-connexité, (voir la Figure 1.1.6), on peut cependant définir un polygone convexe discret en prenant garde à ses composantes connexes :

Définition 1.1.23 (Polygone convexe discret (PCD))

Un polygone convexe discret (PCD) Γ est un sous-ensemble du plan discret non vide avec une seule composante 4-connexe égal à la discrétisation de son enveloppe convexe, i.e $\Gamma = DigG(\text{conv}(\Gamma))$. Ses sommets $(V_i)_{i=1..e}$ forment le sous-ensemble minimal pour lequel $\Gamma = DigG(\text{conv}(V_1, \dots, V_e))$.

Nous considérerons la définition suivante pour la convexité discrète :

Définition 1.1.24 (Convexité discrète)

Un ensemble \mathcal{E} est dit convexe si et seulement si c'est un PCD.

Par construction le complémentaire d'un PCD est 4-connexe, les PCD sont par conséquent des objets bien composés. Par la suite nous serons amenés à considérer les bords de discrétisés d'ensembles convexes du plan de bord \mathcal{C}^3 de courbure strictement positive, nous noterons cette famille de formes \mathbb{F}_c^3 . Une bonne propriété de ces ensembles est que leurs discrétisés sont des PCD au-delà d'une certaine résolution.

Lemme 1.1.25

Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{F}_c^3$, il existe alors h_S telle que pour tout $h \leq h_S$, $DigG_h(\mathcal{X})$ soit un PCD.

Preuve:

D'après le Lemme 1.1.18 il existe h_C tel que pour tout h inférieur ou égal à h_C , $DigG_h(\mathcal{X})$ soit 4-connexe. En utilisant le Lemme 1.1.22, $DigG_h(S) = DigG_h(\text{conv}(DigG(\mathcal{X})))$. $DigG_h(\mathcal{X})$ est donc par définition un PCD. □

Nous avons vu que certains sous ensembles du plan euclidien gardaient leur topologie par la discrétisation, mais qu'en est-il de la topologie de l'espace discret ?

1.2 Topologie et géométrie discrète

Nous présentons ici quelques notions simples de topologie permettant de définir les bords des objets discrets sur la grille discrète. Fondamental pour la définition des fonctions continues dans les mathématiques classiques, la recherche en topologie discrète s'est plutôt focalisée sur des équivalents discrets du théorème de Jordan.

1.2.1 Topologie générale

Nous rappelons ici la définition classique d'un espace topologique, ainsi que d'autres définitions de topologie générale. X désigne un ensemble et \mathcal{O} est une partie de $\mathcal{P}(X)$, autrement dit une famille de sous-ensembles de X .

Définition 1.2.1

On dit que (X, \mathcal{O}) est un espace topologique si \mathcal{O} vérifie :

- $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.
- Une intersection finie d'éléments de \mathcal{O} est encore un élément de \mathcal{O} .
- Une union quelconque d'éléments de \mathcal{O} est encore un élément de \mathcal{O} .

Un élément de \mathcal{O} est appelé ouvert.

Cette définition est malheureusement peu utile dans le monde discret, à moins de considérer une topologie triviale où tous les éléments sont ouverts ou fermés. Néanmoins d'autres objets topologiques nous seront utiles par la suite pour définir proprement les bords des objets discrets :

Un espace topologique est dit *séparable* s'il vérifie l'axiome suivant :

Définition 1.2.2

Pour tout couple d'éléments distincts de X , il existe un ouvert de \mathcal{O} contenant un seul d'entre eux.

Définition 1.2.3

Un complexe cellulaire abstrait $C = (E, B, \dim)$ est un ensemble E d'éléments abstraits muni d'une relation binaire antisymétrique, irreflexive et transitive $B \subset E \times E$ appelée relation de bord et d'une fonction de E dans \mathbb{Z}_+ telle que $\dim(e') < \dim(e'')$ pour tout couple (e', e'') en relation par B .

Mais avant d'utiliser ces définitions, et de voir en quoi elles sont nécessaires pour la définition de la topologie dans le monde discret, introduisons les équivalents discrets du théorème de Jordan.

1.2.2 Topologie discrète

Le plan \mathbb{Z}^2 n'étant pas muni d'une topologie *a priori*, les recherches concernant la topologie des images digitales se sont d'abord concentrées sur le graphe d'adjacence, c'est seulement plus tard que les complexes cellulaires ont été employés.

La séparation de l'intérieur et de l'extérieur d'un objet est une des propriétés classiques que l'on voudrait bien pouvoir transférer dans le monde discret, notamment pour définir le bord d'un objet discret.

Théorème 1.2.4

Si \mathcal{J} est une courbe fermée simple dans \mathbb{R}^2 , alors le théorème de Jordan (aussi appelé théorème de Jordan-Brouwer dans le cas général en dimension n) stipule que $\mathbb{R}^2 - \mathcal{J}$ a deux composantes (une "intérieure" et une "extérieure"), \mathcal{J} étant le bord de chacune d'entre elles.

Le premier problème consiste à définir l'équivalent d'une courbe fermée simple. On commence par restreindre la notion de k -chemin pour cause de considérations topologiques :

Définition 1.2.5

Si \mathcal{E} est un ensemble de points discrets et \mathcal{R}_k une relation de k -adjacence alors \mathcal{E} est un k -arc si tout élément p de \mathcal{E} a exactement deux k -voisins dans \mathcal{E} à l'exception de deux éléments appelés extrémités de l'arc qui n'ont qu'un seul voisin.

Lorsque le k -arc est fermé, il est appelé k -courbe :

Définition 1.2.6

Si \mathcal{E} est un ensemble de points discrets et \mathcal{R}_k une relation de k -adjacence alors \mathcal{E} est une k -courbe si tout élément p de \mathcal{E} a exactement deux k -voisins dans \mathcal{E} .

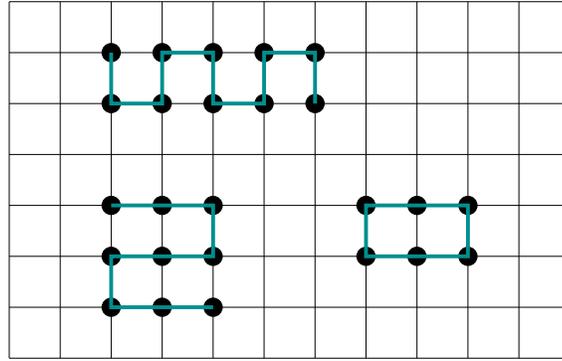


FIG. 1.2.1 – Exemple de 4-chemins n'étant pas des 4-arcs, certains points ayant plus de deux 4-voisins.

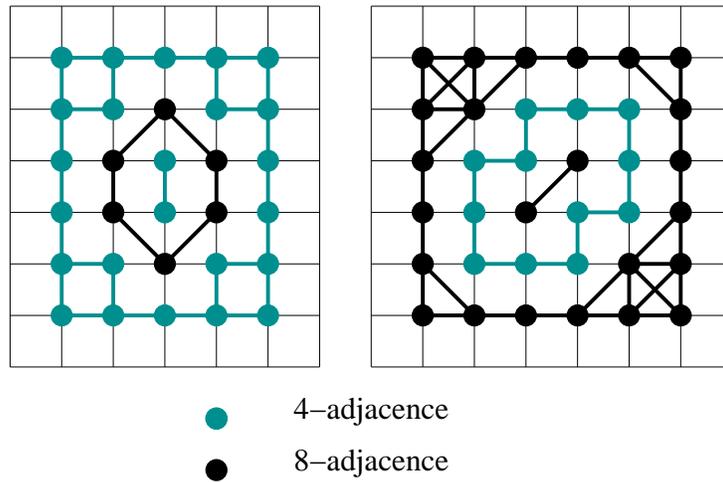


FIG. 1.2.2 – À gauche une 8-courbe sépare son complémentaire en deux composantes 4-connexes. À droite une 4-courbe sépare son complémentaire en deux composantes 8-connexes.

Notons que tout k -arc est un k -chemin, la réciproque étant bien sûr fautive comme le confirment les exemples de la Figure 1.2.1. En effet, un ensemble de points discrets est un k -arc (k -courbe) s'il existe une seule façon de construire une suite de points k -connexe passant par tous les points de l'ensemble.

Intuitivement l'objet et son complémentaire devraient utiliser les mêmes relations d'adjacence, cependant il existe des cas où certains ensembles se retrouvent déconnectés mais séparent leur complémentaire en deux composantes (voir Figure 1.2.2, 4-adjacence à gauche). Une première solution consiste à considérer que l'objet et le fond n'ont pas les mêmes connexités. Le théorème de Jordan en version discrète donnerait (en considérant que l'analogie d'une courbe simple fermée de \mathbb{R}^2 est une k -courbe) :

Théorème 1.2.7

Le complémentaire de tout 4-arc (resp. 8-arc) est 8-connexe (resp. 4-connexe). Le complémentaire de toute 4-courbe (resp. 8-courbe) non réduite à 4 points a deux composantes 8-connexes (resp. 4-connexes) dont l'une est bornée et l'autre non.

La Figure 1.2.2 donne une illustration du théorème.

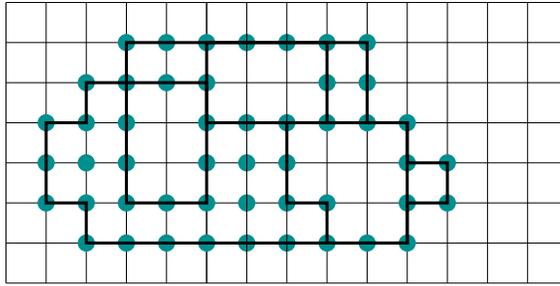


FIG. 1.2.3 – Problème possible pour la définition du bord en tant que points du plan discret. En gris les points de l’objet, les traits représentent le bord.

Ce théorème pose un problème d’homogénéité entre le fond de l’image et l’objet considéré, bien que la caractéristique d’Euler soit calculable localement, il impose de séparer l’objet de son fond. Pour certains objets discrets les problèmes de 4-connexité et de 8-connexité n’existent pas :

Définition 1.2.8

\mathcal{E} est faiblement bien-composé si n’importe quelle composante 8-connexe de \mathcal{E} est 4-connexe.

Définition 1.2.9

\mathcal{E} est bien composé si \mathcal{E} et $\bar{\mathcal{E}}$ sont faiblement bien composés.

Ces objets permettent d’énoncer un théorème de Jordan plus simple :

Théorème 1.2.10 (Théorème de Jordan ([LLR95]))

Le complémentaire d’une k -courbe simple fermée bien composé a exactement deux composantes connexes.

L’objet étant bien composé, les composantes 4-connexe et 8-connexes sont équivalentes et le Théorème 1.2.7 conclut. Ainsi que le précisent les auteurs dans [LLR95], le nombre d’Euler associé est toujours localement calculable. Maintenant que l’on a un équivalent discret d’une courbe simple fermée, il reste à définir comment l’obtenir à partir d’un objet discret.

Le bord est un ensemble de points du plan discret

Étant donné un objet discret, on considère que son bord est constitué des points les plus “proches” des points extérieurs. Dans le cas d’un objet bien composé, chaque composante 4-connexe du “bord” est alors une 4-courbe, et l’on applique le théorème précédent pour séparer l’intérieur de l’extérieur. Cependant on peut trouver des objets discrets pour lesquels les composantes 4-connexes du bord s’intersectent (voir Figure 1.2.3).

D’autre part, cette définition impose de considérer deux types de bords, l’un intérieur et l’autre extérieur. Chose plutôt contre-intuitive au vue de la définition euclidienne qui définit le même ensemble pour la frontière de \mathcal{X} dans \mathcal{P} et de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{X}$ dans \mathcal{P} :

Définition 1.2.11

Le bord d’un ensemble \mathcal{X} dans \mathcal{P} est l’ensemble de tous les éléments e de \mathcal{P} tel que tout voisinage de e intersecte à la fois \mathcal{X} et son complément $\mathcal{P} \setminus \mathcal{X}$.

Le problème majeur vient du fait que le graphe d’adjacences ne suffit pas à définir une topologie au sens mathématique du terme (sauf si l’on considère que tous les éléments de l’espace sont des ouverts, mais la topologie ainsi définie est triviale). Par conséquent il est nécessaire de définir proprement les ensembles ouverts et fermés de \mathbb{Z}^2 avant de chercher à définir des équivalents du théorème de Jordan.

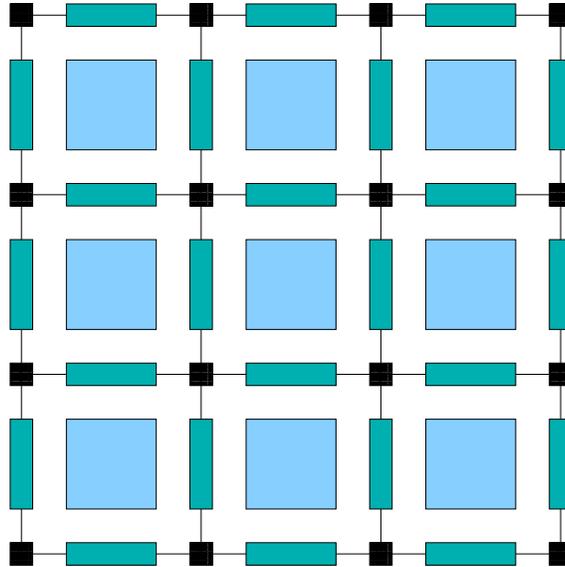


FIG. 1.2.4 – Décomposition de cellules carrées en leurs éléments de dimensions inférieures. En gris clair les 2-cellules, en gris foncé les 1-cellules, en noir les 0-cellules.

Approche par complexes cellulaires

Les complexes cellulaires sont une branche de la topologie générale initié par Whitehead (voir par exemple [Whi49a, Whi49b]). Ces objets n'ont été que tardivement utilisés pour définir les surfaces et bords des objets dans les images numériques. Parmi ceux qui ont utilisé ces objets pour résoudre les problèmes liés aux approches par graphe d'adjacences on peut citer Kovalevsky ([Kov89]). Le point important est ici que l'on puisse construire une topologie au sens mathématique du terme ² en éclatant \mathbb{Z}^n dans \mathbb{R}^n . Une fois cette topologie construite, on peut appliquer les définitions classiques issues des mathématiques.

L'un des théorèmes importants montrés par Kovalevsky ([Kov89]) affirme que tout espace topologique fini ayant la propriété de séparation est isomorphe à un complexe cellulaire abstrait. Une conséquence de ce théorème est que la recherche de structures topologiques finies différentes des complexes cellulaires est vaine.

Pour le cas 2D, on procède comme suit (voir la figure Figure 1.2.4) :

- un *pixel* (2-cellule) représente la cellule carrée privée de ses côtés et est un élément de dimension 2, considéré comme un ouvert de \mathbb{R}^2 ,
- un *lignel* (1-cellule) représente un côté de la cellule carrée sans ses extrémités, c'est un élément de dimension 1, ces éléments sont ouverts d'un côté (selon une dimension) et fermée de l'autre,
- enfin un *pointel* (0-cellule) représente un sommet d'une cellule carrée, et c'est un élément de dimension 0.

Ainsi un objet discret bien composé donné seulement par les coordonnées de ses points sera considéré comme la réunion des 2-cellules de même coordonnées que les points, ainsi que leur 1 et 0-cellules attenantes. On extrait alors le bord comme indiqué sur la figure Figure 1.2.5. Il ne s'agit que de la définition classique (voir la Déf. 1.2.11). Plongé dans \mathbb{R}^2 il s'agit bien d'une courbe fermée simple séparant son complémentaire en deux composants.

On remarquera que les bords de ce type sont aussi obtenus lorsque l'on considère des approches par contour inter-pixel. Le bord est une suite de points dans $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$, qui forment un 4-chemin dans cet espace. On considérera par la suite que le bord d'un objet bien composé dans

² \mathbb{Z}^n n'a pas de topologie *a priori*.

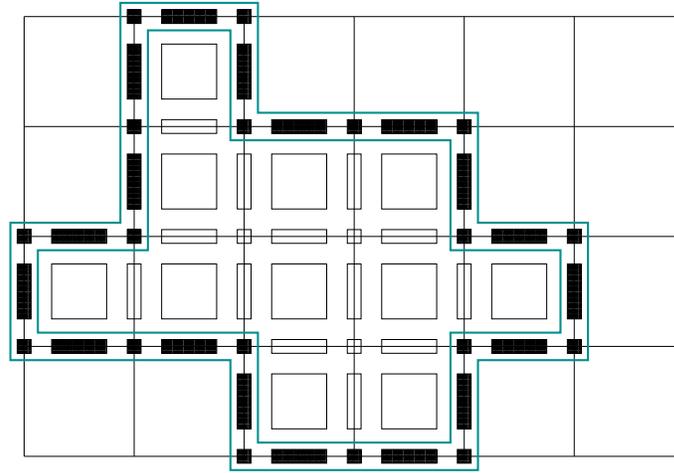


FIG. 1.2.5 – Ensemble des 0-cellules et des 1-cellules associées au bord d'un objet bien composé en dimension deux.

\mathbb{Z}^2 est celui obtenu par la décomposition cellulaire.

Ainsi nos bords vérifieront :

- tout élément du bord a un prédécesseur et un successeur,
- ces éléments sont 4-connexes deux-à-deux,
- le bord ne présente pas d'auto-intersections.

Codage du bord et notations

Si l'on considère les deux connexités usuelles en 2D, on peut facilement décrire le bord d'un objet discret fini comme un mot fini sur un alphabet de quatre ou huit lettres, ces lettres étant appelées codes de Freeman [Fre70]. Chaque lettre correspond à l'un des déplacements possibles selon la connexité choisie. Dans le cas de la 4-connexité, les lettres seront considérées comme suit :

- 0 : déplacement vers la droite,
- 1 : déplacement vers le haut,
- 2 : déplacement vers la gauche,
- 3 : déplacement vers le bas

Le codage du bord est alors facile comme le montre la Figure 1.2.6 et très compact. De plus certaines propriétés sont calculables à partir du mot ainsi formé. Par exemple on identifie facilement les déplacements par octant (correspondant à des suites faites d'au plus deux lettres différentes de un modulo quatre), le nombre de lettres donne le nombre de points du contour, les permutations du système d'axes se font facilement par permutations des lettres.

Nous pouvons maintenant compléter nos notations :

- Une 4-courbe discrète (étant le bord d'un objet) sera notée C .
- Le bord d'un objet discret \mathcal{E} sera noté $\Delta(\mathcal{E})$.
- Par abus de notation le bord du discrétisé de \mathcal{X} à la résolution h sera noté $\Delta_h(\mathcal{X})$.
- Les points de la courbe discrète seront numérotés de façon croissante, étant donné une orientation, de 0 à N .
- Le point de la courbe discrète d'index i sera noté C_i .³
- La suite de points de la courbe discrète d'indices i à j ($j \geq i$) sera noté $C_{i,j}$.

³Ceci donne une paramétrisation pour l'abscisse curviligne triviale de la courbe.

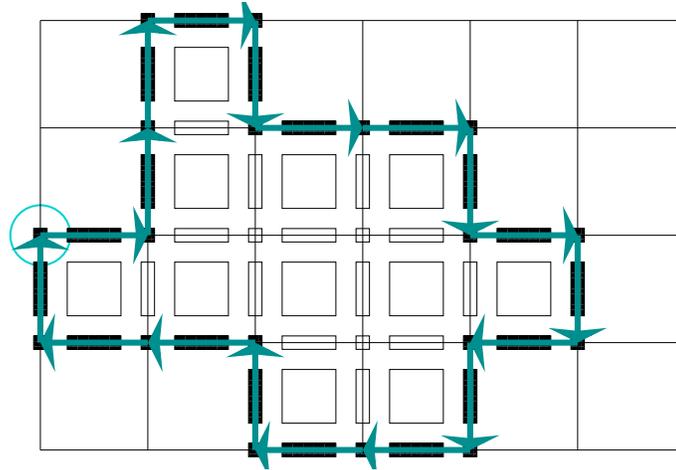


FIG. 1.2.6 – Bord d’un objet exprimé selon le code de Freeman à partir du point entouré : 011030030323221221.

1.2.3 Géométrie discrète

La définition d’une *géométrie discrète* à proprement parler est très problématique, et pourrait être abordée de plusieurs façons : d’une façon axiomatique (à la Hilbert) ou par l’étude des isométries dans cet espace (à la Klein) ou encore en étudiant les propriétés géométriques des objets ou de certaines fonctions, notamment les produits scalaires.

Bien que les éléments les plus simples soient clairement définis : point discret et droite discrète (en considérant qu’une droite discrète est la discrétisation d’une droite euclidienne), plusieurs problèmes se posent. Par exemple comment définir un angle dans le monde discret entre une droite de pente rationnelle et une de pente irrationnelle ? Que dire des droites discrètes dont l’intersection contient autant de points que l’on veut ? De même, comment définir un triangle, et plus généralement comment définir des objets géométriques classiques (médiatrices ou médianes par exemple) ?

La définition formelle d’une *géométrie discrète* se heurte ainsi à un problème majeur : les propriétés fondamentales (les axiomes) de la géométrie euclidienne ne sont pas respectés. Par conséquent la construction d’un espace géométrique euclidien discret est impossible. Et pourtant on voudrait travailler sur les objets discrets en utilisant les notions classiques de la géométrie euclidienne.

Pour les isométries, E. Andrès ([And92]) étudia les rotations par cercle discret en gardant une mesure euclidienne, malgré de bons résultats pour certains angles (dont la tangente est rationnelle), la rotation “sans perte” ne semble pas encore possible, la caractérisation par les isométries est donc compromise.

Enfin les mesures que l’on peut effectuer sur un objet discret sont délicates puisque définir un objet par des caractéristiques analytiques (intégrale, courbure, normale, dérivée) supposerait que l’on ait défini ces quantités au préalable et qu’elles forment un tout cohérent. Bien sûr il existe des définitions pour certaines de ces quantités (courbure, tangente, normale) mais lesquelles choisir et sont elles mathématiquement pertinentes et cohérentes entre elles ? Comment s’assurer que ce soient les “bonnes définitions” pour formuler ces objets ?

Étant dans l’impossibilité de construire une axiomatique de cette géométrie, ne disposant pas des fonctions classiques pour caractériser cet espace géométrique et n’ayant pas non plus les outils de plus haut niveau issus de l’analyse, cette *géométrie discrète* cherche pour l’instant à trouver des équivalents d’objets connus dont les traits sont représentatifs des propriétés classiques.

Nous avons déjà vu ce qu’était un PCD, qu’une droite discrète est la discrétisation d’une droite

euclidienne, un demi-plan discret est aussi la discrétisation d'un demi-plan euclidien, il existe aussi des définitions de cercles issus de discrétisations.

Malheureusement la discrétisation ne permet pas toujours de passer facilement d'une expression analytique (pour l'objet euclidien) à une autre expression analytique (pour l'objet discret). En particulier les courbes exprimées à partir d'intégrales ou de dérivés semblent hors de portée. En revanche des pistes sérieuses pour certaines courbes exprimées par des expressions polynômiales à coefficients rationnels sont envisageables, en particulier celles de paraboles discrètes ont été très récemment proposées ([IDR06]).

Le problème de la définition de la *géométrie discrète* est difficile et se résume aujourd'hui à un choix : faut-il définir les équivalents des propriétés euclidiennes dans l'espace discret ou doit-on définir les équivalents d'objets euclidiens ayant des propriétés particulières qui les transporteraient ?

La deuxième solution semble plus facile surtout lorsque l'on possède une expression arithmétique de l'objet discret. Intuitivement plus les expressions sont proches des formulations euclidiennes plus les propriétés sont similaires (à condition de considérer les objets pour des résolutions suffisamment grandes).

Nous présentons brièvement des définitions d'objets discrets qui vérifient une formulation arithmétique très proche de celles des objets euclidiens dont ils sont les "équivalents" et dont ils semblent posséder les propriétés ou du moins certaines caractéristiques fondamentales.

Définition 1.2.12 (Droite de pente rationnelle⁴)

On appelle droite discrète standard de caractéristiques (a, b, μ) , avec $(a, b, \mu) \in \mathbb{Z}^3$ et a et b premiers entre eux, l'ensemble des points du plan discrets de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$\mu \leq ax - by < \mu + |a| + |b|$$

Définition 1.2.13 (Cercle arithmétique([And92]))

On appelle cercle discret 4-connexe de rayon r centré en l'origine, l'ensemble des points du plan discret de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$2r^2 \leq x^2 + y^2 < 2(r + 1)^2$$

Définition 1.2.14 (Parabole discrète droite([IDR06]))

On appelle parabole discrète standard de caractéristiques $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'ensemble des points du plan discrets de coordonnées (x, y) vérifiant :

$$\frac{|2ax + b| + 1}{2} < ax^2 + bx + c - y < -\frac{|2ax + b| + 1}{2}$$

1.3 Estimation de caractéristiques géométriques

Cette section se concentre sur l'introduction au problème de l'estimation de caractéristiques géométriques. Rappelons que l'on parle d'estimation parce que l'on ne cherche pas la quantité géométrique de la courbe discrète, mais celle de la courbe euclidienne sous-jacente. Cette courbe étant inconnue, il est nécessaire de supposer qu'elle possède certaines propriétés (continuité, dérivabilité, convexité, etc). Par conséquent l'évaluation de la quantité géométrique sur la courbe discrète n'est qu'une approximation de la valeur recherchée.

Les quantités géométriques envisagées se séparent en deux grandes familles : les quantités globales et les quantités locales :

- Les quantités globales nécessitent de connaître toute la courbe pour les calculer, les plus connues sont le périmètre, l'aire ou encore les moments.
- Les quantités locales sont déterminées sur un voisinage du point considéré, en continu ces valeurs sont déterminées par passage à la limite lorsque l'on connaît une paramétrisation du graphe représentant la courbe.

Dans ce mémoire nous serons amenés à considérer des estimateurs pour des quantités géométriques locales, c'est-à-dire des estimateurs évaluant une quantité géométrique à partir d'un voisinage du point de la courbe considérée.

Commençons par rappeler les définitions des quantités continues les plus courantes.

On considère généralement que la courbe continue \mathcal{C} est paramétrée $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t))$, $x(t)$ et $y(t)$ étant les fonctions de position en coordonnées cartésiennes. Souvent on utilise l'abscisse curviligne comme paramétrisation (notée avec un s). Le vecteur dérivé de la courbe au point $\mathcal{C}(t)$ est notée $\dot{\mathcal{C}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, le vecteur dérivé seconde est notée $\ddot{\mathcal{C}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$.

Si le vecteur dérivé ne s'annule pas, on définit le vecteur tangent unitaire comme :

$$\tau(t) = \frac{\dot{\mathcal{C}}(t)}{\|\dot{\mathcal{C}}(t)\|_2}.$$

On définit aussi l'orientation ϕ de la tangente au point $\mathcal{C}(t)$ comme $\tan(\phi(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$. L'orientation est alors obtenue comme l'arc tangente du rapport $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, sa dérivée s'exprime alors comme $\dot{\phi} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

On note κ la courbure en un point. Aux points où la dérivée seconde existe et ne s'annule pas on a :

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

On peut aussi calculer la courbure en cherchant le plus grand cercle inscrit, son rayon étant alors l'inverse de la courbure.

La longueur entre deux points sur la courbe vaut l'intégrale de la norme $\|\cdot\|_2$ du vecteur dérivé le long de la courbe entre ces deux points.

Les méthodes qui seront présentées ci-après sont des estimateurs, par conséquent les quantités géométriques ne sont que des approximations et nous utiliserons un "chapeau" ($\hat{\cdot}$) pour bien les différencier. Rappelons enfin ici que les courbes étudiées dans l'espace discret sont 4-connexes.

Soit C la courbe discrète, son abscisse curviligne est induite par les indices des points, numérotés de façon croissante en parcourant la courbe discrète selon une orientation, la courbe a N points, $C_i = (x(i), y(i))$ donne les coordonnées cartésiennes du i ème point de la courbe. On considère que $\hat{C}_i = (\hat{x}(i), \hat{y}(i))$ est le vecteur dérivé au point i , le vecteur dérivée seconde s'écrit : $\hat{\hat{C}}_i = (\hat{\hat{x}}(i), \hat{\hat{y}}(i))$.

1.3.1 Méthode naïve : différences finies

Cette méthode est citée pour des raisons historiques et aussi par ce qu'elle apparaît intuitive et est encore utile dans certains cas (notamment pour des signaux monodimensionnels).

On considère que le vecteur dérivé est donné par :

$$\hat{C}(i) = \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2} = \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} \right).$$

Cette méthode est inadaptée aux courbes discrètes 4-connexes puisqu'elle ne donne que 8 valeurs possibles pour la dérivée et 8 pour l'orientation du vecteur tangent. Elle est cependant utilisée pour faire des résolutions numériques d'équations aux dérivées partielles. On la retrouve même utilisée pour faire une estimation rapide de l'orientation de la tangente.

Le vecteur de la dérivée seconde donne :

$$\hat{\hat{C}}(i) = \frac{C_{i+2} + C_{i-2} - 2C_i}{4}.$$

soit un calcul de courbure donnant :

$$\hat{\kappa}(i) = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{i+2} + y_{i-2} - 2y_i) - (y_{i+1} - y_{i-1})(x_{i+2} + x_{i-2} - 2x_i)}{4(((x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2))^{\frac{3}{2}}}$$

1.3.2 Méthodes paramétrées

Nous présenterons ici les méthodes les plus classiques dépendants de paramètres de réglages. Leur nombre est souvent réduit à un seul paramètre, ce dernier représentant la taille de la fenêtre de calcul utilisée pour extraire l'information. Ces méthodes ont tendance à utiliser une vision signal du problème et les nombres utilisés sont des réels. Bien sur ces méthodes ont différents comportements et différentes utilisations : reconstruction de courbes, approximations, interpolations, etc. Dans tout les cas les paramètres introduits ajoutent une très forte information *a priori* sur l'objet euclidien sous-jacent.

Convolution par une gaussienne

Les méthodes basées sur les différences finies étant très sensibles au bruit, on peut convoluer les coordonnées des points par une Gaussienne pour reconstruire une courbe continue \mathcal{C}^∞ par morceaux et plus "lisse".

On rappelle qu'un filtre Gaussien d'écart type σ noté G_σ vaut :

$$G_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

On calcule ensuite les coordonnées de la façon suivante :

$$\hat{X}(t) = x(t) * G_\sigma(t) \quad \hat{Y}(t) = y(t) * G_\sigma(t)$$

Avec $x(t) = x(\lfloor t \rfloor)$ et $y(t) = y(\lfloor t \rfloor)$.

Différences finies sur convolution

C'est une combinaison des deux précédentes méthodes. On utilise la méthode des différences finies qui peut alors dépendre d'un autre paramètre de taille δ puisque la courbe reconstruite par la Gaussienne est continue :

$$\hat{\hat{X}}(t) = \frac{\hat{X}(t + \delta) - \hat{X}(t - \delta)}{2\delta} \quad \hat{\hat{Y}}(t) = \frac{\hat{Y}(t + \delta) - \hat{Y}(t - \delta)}{2\delta}$$

$$\hat{\hat{\hat{X}}}(t) = \frac{\hat{X}(t + 2\delta) + \hat{X}(t - 2\delta) - 2\hat{X}(t)}{4\delta} \quad \hat{\hat{\hat{Y}}}(t) = \frac{\hat{Y}(t + 2\delta) + \hat{Y}(t - 2\delta) - 2\hat{Y}(t)}{4\delta}$$

Dérivée de gaussienne

L'estimation des coordonnées par convolution de gaussienne est en fait une *reconstruction* de la courbe. En effet, on considère que la courbe sous-jacente est la courbe reconstruite par la Gaussienne (dépendant du paramètre σ), ce qui revient à introduire une très forte information à priori. Plutôt que d'utiliser les différences finies, on peut dériver directement la courbe reconstruite. Les dérivées sont alors calculées en dérivant le noyau Gaussien (on dérive la paramétrisation de la courbe de façon analytique en fait) :

$$\hat{\hat{X}}(t) = x(t) * \dot{G}_\sigma(t) \quad \hat{\hat{Y}}(t) = y(t) * \dot{G}_\sigma(t)$$

$$\hat{\hat{\hat{X}}}(t) = x(t) * \ddot{G}_\sigma(t) \quad \hat{\hat{\hat{Y}}}(t) = y(t) * \ddot{G}_\sigma(t)$$

Remarquons que en pratique on utilise souvent un coefficient devant le filtre Gaussien pour éviter de trop réduire la courbe considérée.

Splines

Ces courbes peuvent traverser les points de la courbe discrète en les interpolant ⁵ ou plus généralement passer au plus près (approximation), les points sont alors considérés comme points de contrôles. Il résulte de cette reconstruction une courbe de classe \mathcal{C}^n par morceaux, qui est une Spline de degré n . Il existe une grande variété de courbes de ce type : courbes de Bézier, B-Spline, NURBS, etc. Ces méthodes sont plutôt utilisées en CAO pour créer des formes (volumes, surfaces) plutôt que pour extraire des paramètres géométriques.

Erreur aux moindres carrés

Au lieu de simplement utiliser les points de la courbe comme points de contrôles, on peut chercher à trouver un polynôme de degré fixe ⁶ dont les coefficients minimisent le carré de la différence entre la fonction polynomiale considérée et les valeurs que l'on veut approcher. On utiliserait alors un développement de Taylor pour calculer la différence entre la fonction d'approximation et les coordonnées des points de la courbe, voir [CP05] pour le cas général.

Filtrage des valeurs par filtre médian

Ces méthodes sont particulièrement utilisées pour traiter des données bruitées, choisissant la donnée médiane parmi l'ensemble considéré. Par exemple pour estimer l'orientation de la tangente, Matas et al. ([MSK95]) prennent l'angle médian parmi l'orientation de $2M$ vecteurs formés sur un voisinage de taille $2M$ autour du point C_i . Ces vecteurs sont : $\overrightarrow{C_{i-M}C_i}, \overrightarrow{C_{i-M+1}C_i}, \dots, \overrightarrow{C_{i-1}C_i}, \overrightarrow{C_iC_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{C_iC_{i+M}}$.

1.3.3 Méthodes sans paramètre

Ces méthodes ne nécessitent pas d'information *a priori* et ne sont pas réglables. Ainsi beaucoup de méthodes estimant des caractéristiques globales de la courbe n'ont pas besoin de paramètre (la fenêtre de calcul représente toute la courbe). Bien sûr fixer le paramètre de la fenêtre de calcul n'est pas une option raisonnable pour les estimateurs locaux : l'estimateur doit pouvoir *adapter* sa fenêtre de calcul à la géométrie locale de la forme. Certaines méthodes basées sur la reconnaissance de segments de droites sont particulièrement intéressantes de ce point de vue là.

Tangente, normale et courbure : estimateurs locaux On utilise ici la reconnaissance de segments de droites discrètes⁷ pour obtenir la fenêtre de calcul. Par exemple Feschet *et. al.* [FT99] proposent une estimation de l'angle de la tangente, Coeurjolly *et. al.* [CT01] proposent une estimation de la courbure et de la normale là encore basée sur les segments de droites discrète. Un estimateur de longueur peut être dérivé à partir de l'intégration des normales estimées [CK04].

Aire, périmètre, moments : estimateurs globaux On peut estimer l'aire d'un objet discret en comptant simplement le nombre de points constituant son intérieur, bien que cette méthode semble naïve, elle possède des propriétés intéressantes comme l'indique Klette dans [KR04a]. L'estimation du périmètre peut être faite par polygonalisation. Klette propose dans [TAO01] d'utiliser le polygone de longueur minimale entre $DigJ^-(\mathcal{X})$ et $DigJ^+(\mathcal{X})$. La reformulation discrète des moments continus (on remplace l'intégrale par une somme) permet de définir des estimations de ces moments voir [KZ06] par exemple.

⁵On utilise généralement un sous échantillonnage dans ce cas.

⁶On préfère utiliser des polynômes de degré faible à cause du phénomène de Runge.

⁷Nous reviendrons beaucoup plus en détails sur ces définitions dans les prochains chapitres.

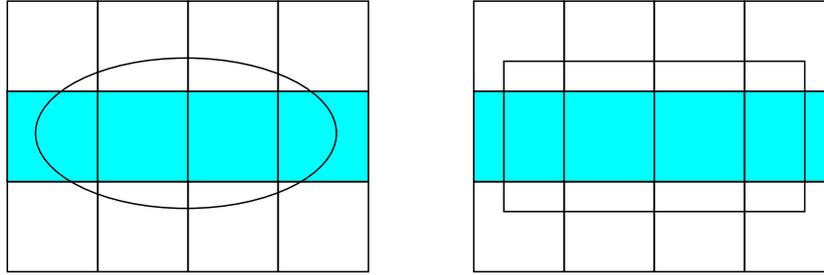


FIG. 1.3.1 – Discretisation de Gauss de formes réelles donnant la même discrétisation.

1.3.4 Le problème de l'estimation

L'analyse géométrique des objets discrets, et surtout les critères permettant de déterminer si les algorithmes employés fournissent de bons résultats sont sujets à un grave problème : il existe une infinité de formes donnant la même discrétisation (voir illustration sur la Figure 1.3.1).

Par conséquent lorsque l'on essaie de mesurer l'erreur d'un estimateur, le choix de la forme réelle de référence comme vérité terrain est problématique. En effet, quelles contraintes cette courbe doit-elle refléter ? Doit-elle appartenir à une famille particulière de courbes ? Ce choix ne peut pas être fait de façon *objective*, puisque l'on pourrait toujours trouver des familles de courbes pour lesquelles un estimateur serait meilleur qu'un autre. Rappelons aussi que certains estimateurs font un choix délibéré quant à la forme sous-jacente qu'ils cherchent à approcher. Tous les estimateurs opérant une reconstruction continue de la courbe sont dans ce cas. Les splines par exemple reconstruisent la courbe sous-jacente comme une fonction polynomiale d'ordre n par morceaux, introduisant beaucoup d'information *a priori*. Ces choix arbitraires ne sont pas justifiés dans l'absolu et introduisent un biais dans l'évaluation. Cette information rajoutée *a priori* implique que l'estimateur a de bien meilleurs comportements pour certaines familles de formes que pour d'autres.

Il est donc légitime de se demander quelle est la pertinence mathématique d'un estimateur et surtout s'il existe des critères *objectifs* pour l'évaluer. Énumérons un certain nombre de critères permettant de mesurer la pertinence des estimateurs locaux ou globaux :

- **identification de parties caractéristiques**

Les parties planes, fortement courbées ou les angles droits doivent être reconnaissables facilement et avoir un comportement "naturel" sur ces parties (variation brusque de la tangente au voisinage d'un coin).

- **adaptabilité à la géométrie locale de la forme**

La fenêtre de calcul utilisée pour extraire la quantité géométrique doit varier avec la géométrie locale de la forme (la taille de cette fenêtre est liée à la courbure locale de la courbe sous-jacente), plus la résolution est grande plus cette région doit être importante afin de capturer les détails de la géométrie.

- **respect de la géométrie de la forme**

L'estimation sur le contour discret ne doit pas introduire de fausses caractéristiques au moins pour les traits les plus communs : convexité, points d'inflexion, points de rebroussement, discontinuités.

- **isotropie**

Les courbes discrètes sur lesquelles nous travaillons ne sont pas dans un espace isotrope, en effet la 4-connexité impose de privilégier certaines directions sur la grille. Par conséquent il est important de mesurer si les erreurs d'un estimateur local sont plus importantes selon certaines directions de l'espace. Pour mesurer ce type d'erreur on observera le comportement de l'estimateur sur des discrétisés de cercles.

- **temps de calcul**

Il s'agit d'une contrainte pratique qui peut être due aux besoins de l'application (contraintes

temps réel) ou de la nature des objets à traiter (images très grandes). Les estimateurs précis étant en général coûteux, le ratio précision/coût doit être envisagé pour les algorithmes surlinéaires.

– **convergence multi-grille**

Cette propriété implique que l'estimateur converge vers la valeur euclidienne à l'infini, en conséquence passées certaines résolutions l'estimation sera très proche de la valeur attendue et reflétera bien les traits de la courbe sous jacente. Cette propriété est démontrée par une preuve mathématique qui doit prendre en compte le processus de discrétisation utilisé, l'algorithme associé à l'estimateur et une classe de formes euclidiennes. Lorsque cette propriété est vérifiée, elle donne un critère objectif de choix.

– **vitesse de convergence**

C'est une propriété très importante pour les estimateurs convergents puisque cela détermine leur utilité à basses échelles. Déterminer la vitesse de convergence d'un ou plusieurs estimateurs peut être utile pour déterminer la convergence ou la vitesse de convergence d'autres d'estimateurs. On peut ainsi penser à un estimateur de tangente utilisant un estimateur de position.

Intuitivement, si un estimateur est pertinent il doit donner une valeur proche de la valeur attendue (i.e. la valeur euclidienne recherchée) et ce d'autant plus que la forme discrète est proche de la forme euclidienne. Ainsi l'un des critères objectifs pour un estimateur est sa convergence asymptotique vers la valeur euclidienne qu'il approche lorsque la forme discrète se rapproche de la forme euclidienne. Intuitivement, on se rend bien compte qu'à faible résolution, les détails et les propriétés des formes n'apparaissent pas (détails de nature topologiques ou géométriques), en revanche plus la résolution est grande et plus le discrétisé respecte la géométrie et la topologie de la forme. De plus si l'on peut construire une "géométrie discrète" cohérente, les opérateurs différentiels devraient appartenir à la classe des estimateurs convergents.

1.4 Convergence multi-grille

Le problème de la convergence asymptotique revient à un problème d'approximation : on cherche à approcher une certaine quantité à partir d'une méthode itérative qui converge vers la quantité cherchée à l'infini. La quantité peut être un nombre, l'exemple souvent repris est celui de l'estimation de π à l'aide de polygones réguliers à n cotés : connaissant le périmètre des polygones englobants le cercle on en déduit une approximation du périmètre du cercle et ainsi une approximation de π . Cette estimation converge lorsque n tend vers l'infini.

Appliqué à l'estimation de paramètres il s'agit de regarder comment se comporte une certaine fonction sur les formes discrètes lorsque la résolution devient de plus en plus grande. Ici on considérera que les formes discrètes sont les discrétisés d'une forme réelle appartenant à une certaine famille de formes du plan euclidien.

Soit $S \subset X_{\mathcal{G}}$ une forme euclidienne sur laquelle le descripteur géométrique \mathcal{G} est défini. À ce stade le descripteur peut simplement être une quantité globale de la courbe ou une quantité locale en un point choisi. Un descripteur géométrique sur une forme est défini comme une fonction de l'ensemble des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Un estimateur discret de ce descripteur sera noté $\hat{\mathcal{G}}$, il travaille sur les discrétisés de ces formes, il est donc d'après nos définitions de discrétisation défini comme une fonction des sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 (à un facteur d'échelle près) à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On cherche donc les propriétés de la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\mathcal{G}}(DigG_h(S))$$

En particulier on souhaite que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\mathcal{G}}(\text{Dig}G_h(S)) = \mathcal{G}(S)$$

1.4.1 Cas des méthodes paramétrées

La convergence asymptotique pour ces méthodes semble impossible. En effet la taille du voisinage de calcul est fixée. Ce réglage est très important et introduit un biais sur les formes sous-jacentes considérées. La supposition qui est faite est que l'information pertinente à extraire se trouve dans ce voisinage, les informations superflues (informations géométriques pour un autre voisinage) doivent être filtrées par le procédé de calcul utilisé.

Une conséquence de cela est que le voisinage de calcul ne tient pas compte de la géométrie de la courbe, autrement dit le voisinage considéré ne contient pas toujours l'information pertinente ou ne peut pas la filtrer. L'information pour le calcul n'étant pas toujours la bonne, il est raisonnable de penser de la valeur fournie n'a presque aucun sens mathématique. En particulier on peut se retrouver dans des cas où un estimateur de tangente créerait de faux points d'inflexions. Il s'en suivrait que les propriétés issues de l'analyse de la courbe ne correspondraient pas à celles attendues. Par conséquent, ces estimateurs ne respectent pas les propriétés des formes.

Enfin remarquons qu'étant donné une taille de voisinage fixe, l'image de l'estimateur est de taille finie. Une des conséquences est que la convergence asymptotique n'est pas réalisable. En effet quelle que soit la taille du voisinage, le nombre de valeurs possibles est majoré quel que soit le point considéré⁸. En conséquence, la taille de la fenêtre est toujours un facteur limitant à la précision de l'estimateur :

Lemme 1.4.1

Tout estimateur déterministe utilisant une taille de voisinage fixe (en terme de nombre de points) comme support de calcul donne un nombre fini de valeurs.

Preuve:

Un chemin 4-connexe constitué de k points s'écrit comme l'un des 4^k mots de longueur k écrit en code de Freeman. □

Dans le cas des estimateurs de longueurs utilisant une taille de voisinage fixe, leur non-convergence multi-grille est démontrée dans [TD03] pour l'estimation de la longueur de segments euclidiens. Il serait en revanche intéressant de déterminer l'évolution des paramètres de ces estimateurs qui garantirait leur convergence asymptotique et de mesurer leur vitesse de convergence en fonction de ce paramètre.

1.4.2 Quantités globales

On s'intéresse ici à des quantités nécessitant la connaissance de toute la forme (tout son bord ou son intérieur). Ces estimateurs ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années et le problème de leur convergence peut se formaliser comme suit (cf [KZ06, TAO01, KR04a, CT01, Coe02, CK04]) :

Définition 1.4.2

Un estimateur $\hat{\mathcal{G}}$ est multi-grille convergent pour une famille de formes \mathbb{F} et pour un processus de discrétisation Dig , si et seulement si pour toute forme $S \in \mathbb{F}$, il existe un pas de grille $h_S > 0$ tel que la valeur estimée $\hat{\mathcal{G}}(\text{Dig}_h(S))$ est définie pour tout pas de grille inférieur à h_S et :

$$|\hat{\mathcal{G}}(\text{Dig}_h(S)) - \mathcal{G}(S)| \leq \epsilon(h)$$

⁸Lorsque la résolution grandit, le voisinage d'un point discret converge vers la discrétisation d'un demi-plan. Passé une certaine résolution les mots de Freeman possibles sont des facteurs (de taille fixe) du mot (en codes de Freeman) formant le bord du demi-plan.

où $\epsilon(\cdot)$ est une fonction définie de \mathbb{R}_*^+ dans \mathbb{R} tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro. Cette fonction indique la vitesse de convergence de l'estimateur.

Le modèle de discrétisation utilisé le plus souvent dans la littérature est la discrétisation de Gauss (Déf. 1.1.11). Les résultats sur la convergence de quantités globales sont assez nombreux, Klette ([KR04a]) dresse un état des lieux assez complet. Nous rappelons quelques résultats :

Aire

Le descripteur géométrique est ici l'aire, noté \mathcal{A} . On considère l'estimateur $\hat{\mathcal{A}}$, calculé en comptant le nombre de 2-cellules constituant $DigG_h(S)$, multiplié par h^2 .

Théorème 1.4.3 (Aire, Théorème 2.2 [KR04a])

Pour n'importe quelle forme plane convexe S et n'importe quel pas de grille $h > 0$, $|\hat{\mathcal{A}}(DigG_h(S)) - \mathcal{A}(S)| = \mathcal{O}(h)$.

Certaines formes particulières ont été très étudiées, notamment les *cercles centrés* (cercles dont le centre est à coordonnées entières) :

Théorème 1.4.4 (Théorème 2.3 [KR04a])

Soit D un disque centré, alors pour tout pas de grille $h > 0$, $|\hat{\mathcal{A}}(DigG_h(D)) - \mathcal{A}(D)| = \Omega\left(h^{\frac{3}{2}}\right)$.

La famille de forme \mathbb{F}_c^3 a reçu une attention particulière, comme le montre la borne supérieure suivante :

Théorème 1.4.5 (Théorème 2.4 [KR04a])

Soit $S \in \mathbb{F}_c^3$, alors pour tout pas de grille $h > 0$, $|\hat{\mathcal{A}}(DigG_h(S)) - \mathcal{A}(S)| = \mathcal{O}\left(h^{\frac{100}{73}} \left(\log \frac{1}{h}\right)^{\frac{315}{146}}\right)$.

Il est d'abord assez surprenant de constater qu'une méthode aussi naïve que le comptage des points de l'intérieur de la forme discrète suffise à donner une méthode convergente. Cependant l'aire de l'intérieur d'une forme est une quantité de dimension deux et la longueur de son bord est de dimension un, il n'est donc pas surprenant que le nombre de points à l'intérieur de la forme discrétisée (en fait on attribue une aire de valeur h^2 à chacun de ses points) grandisse suffisamment vite par rapport au nombre de points sur le bord pour que cette quantité converge. L'erreur estimée est au pire de l'ordre du nombre de points sur bord de la forme discrète, multipliée par h .

Périmètre

Les périmètres peuvent être estimés comme une quantité globale ou comme l'intégration d'une quantité locale. Théoriquement les deux méthodes devraient donner le même résultat si l'on dispose d'estimateurs cohérents. Commençons par rappeler les très mauvais résultats obtenus par mesure directe de la longueur comme intégration des longueurs élémentaires de pas sur un chemin de Freeman.

Par exemple la discrétisation de Gauss d'un demi plan de pente -1 passant par les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Si l'on attribue à chaque pas vertical et horizontal une mesure de longueur égale à h , alors la longueur du segment réel sur le bord du demi-plan est approchée par la somme des longueurs des pas unitaires le long du bord de sa discrétisation. Cette somme vaut toujours la même quantité pour des pas de grille du type $\frac{1}{N}$ avec N entier plus grand que 1. Bien entendu, elle ne converge pas vers la mesure euclidienne de cette longueur, comme illustré sur la Figure 1.4.1. On pourrait objecter que cette somme de longueurs élémentaires constitue une approximation de la distance basée sur la norme $\|\cdot\|_1$. Cependant la mesure d'un pas unitaire selon l'axe vertical ou horizontal est le même pour la norme $\|\cdot\|_1$ et la norme $\|\cdot\|_2$.

Plus généralement, Tajine et Daurat [TD03] ont mis en évidence qu'il n'existe aucune définition de longueur digitale utilisant des mesures locales non adaptatives (en particulier les distances de Chanfrein) et qui convergent vers la longueur euclidienne lorsque la résolution tend vers l'infini.

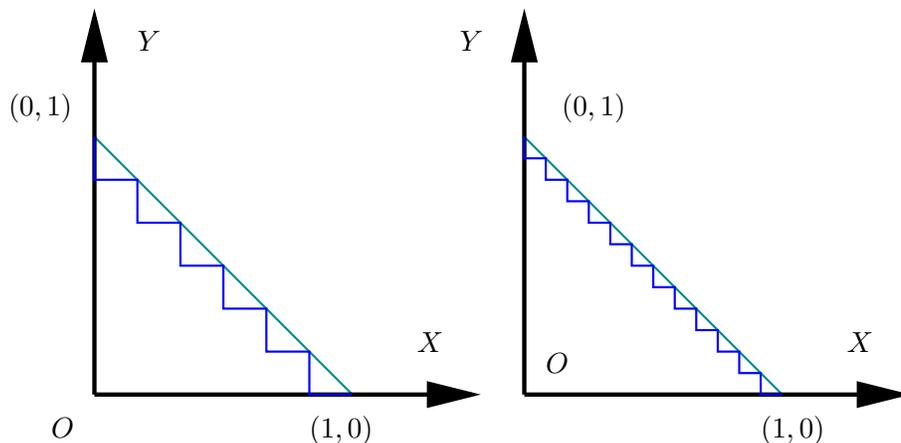


FIG. 1.4.1 – Discrétisations de Gauss d’un demi plan dans le premier quadrant. L’estimation de longueur de son bord (par intégration des longueurs élémentaires des pas horizontaux et verticaux le constituant) ne change pas avec la résolution.

Ceci a été montré sur un sous-ensemble particulier de courbes : les segments de \mathbb{R}^2 . Le processus de discrétisation retenu est celui qui identifie les segments réels à leur tracés sur une grille discrète en utilisant l’algorithme de Bresenham. Ce résultat laisse très peu d’espoir pour la convergence du périmètre par intégration de mesures locales sur une fenêtre bornée pour des formes quelconques. En revanche il serait peut-être possible d’exhiber une courbe telle que les erreurs d’estimations se compenseraient.

1.4.3 Quantités locales

La convergence asymptotique pour les quantités locales est plus difficile à définir puisqu’il faut pouvoir relier un voisinage de la courbe discrète à un voisinage de la courbe continue. On pourrait utiliser la définition pour les quantités globales et montrer que pour toute suite de points sur les discrétisés tendant vers un point sur la courbe continue, les valeurs estimées convergent bien vers la valeur attendue ⁹.

On préfère cependant introduire la notion de voisinage discret à un point euclidien illustrée sur la Figure 2.1.1 :

Définition 1.4.6

Soit un point A sur le bord d’une forme euclidienne S . On appelle point discret associé à A à la résolution h , tout point discret du bord discret de $\text{Dig}_h(S)$ à distance h (pour la norme $\|\cdot\|_1$ du point de vue du plan euclidien) de A . On note cet ensemble de points $\mathcal{V}_h(A)$. Un point de cet ensemble sera noté $C_{\mathcal{V}_h(A)}$.

La convergence multi-grille pour les estimateurs locaux est alors définie comme suit :

Définition 1.4.7

Un estimateur local $\hat{\mathcal{G}}$ est multi-grille convergent pour une famille de forme \mathbb{F} et pour un processus de discrétisation Dig_h , si et seulement si pour toute forme $S \in \mathbb{F}$, pour tout point A de $\text{bd}(S)$ il existe un pas de grille $h_S > 0$ tel que les valeurs estimées $\hat{\mathcal{G}}(\text{Dig}_h(S), C_{\mathcal{V}_h(A)})$ sont définies pour tout élément de $\mathcal{V}_h(A)$ et pour tout pas de grille inférieur à h_S et :

$$|\hat{\mathcal{G}}(\text{Dig}_h(S), C_{\mathcal{V}_h(A)}) - \mathcal{G}(S)| \leq \epsilon(h, A)$$

⁹Cette définition a été présentée dans [LdV06]

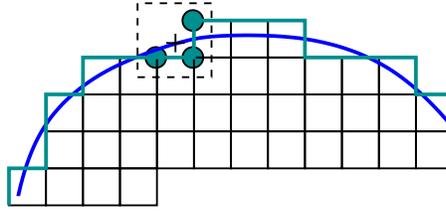


FIG. 1.4.2 – Bord d’une forme continue, son bord discret associé par discrétisation de Gauss, et les points discrets associés à un point de la courbe continue.

où $\epsilon(\cdot, \cdot)$ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^+ convergeant vers zéro lorsque h tend vers zéro. Cette fonction indique la vitesse de convergence locale de l’estimateur.

1.5 Conclusion du chapitre

A ce point de notre mémoire nous avons expliqué les défauts des estimateurs usuels utilisant des paramètres. Leur faiblesse vient du fait qu’ils ne peuvent prétendre à donner la valeur attendue pour de grandes résolutions. Ce critère objectif d’exclusion est la convergence asymptotique. Nous avons aussi fourni les définitions de convergence multi-grille pour deux grands types de quantités géométriques afin de donner un cadre formel à l’étude et la comparaison des estimateurs discrets pour de grandes résolutions.

L’un des problèmes majeurs reste encore de montrer que l’on peut construire des estimateurs locaux qui convergent asymptotiquement. Ceci repose sur la construction d’estimateurs sans paramètre s’adaptant à la géométrie locale de la forme et dont la fenêtre de calcul grandit avec la résolution.

La quantité la plus intuitive est celle qui correspond aux approximations d’ordre 1 sur la courbe, à savoir les parties linéaires des courbes. La suite de ce mémoire s’attachera à définir et étudier ces objets (Chapitre 2). Leurs caractéristiques sur des familles de courbes seront étudiées et nous en extrairons des propriétés remarquables pour en déduire leurs comportements asymptotiques (Chapitre 3) afin de pouvoir construire et évaluer les performances d’estimateurs locaux asymptotiquement convergents (Chapitre 4).

Chapitre 2

Parties linéaires à une courbe discrète

Ce chapitre a pour but de présenter les parties linéaires finies et infinies des courbes discrètes. Ces parties sont les équivalents discrets des droites et des segments euclidiens. Outre les définitions historiques l'on s'intéressera plus particulièrement à des aspects algorithmiques de leur reconnaissance, des outils pour mieux décrire ces objets et des propriétés pour mieux les caractériser. La littérature sur le sujet étant plutôt vaste, nous avons choisi de nous baser sur l'article de Klette et Rosenfeld en 2004 [KR04b], présentant une vue d'ensemble des définitions historiques concernant les parties linéaires discrètes. Pour les définitions plus techniques nous nous concentrons sur deux approches, celle issue de la thèse d'état de Réveillès [Ré91] qualifiée de *géométrie arithmétique* et une description combinatoire des mots de Christoffel basée sur les fractions continues formulée par Berstel. La combinaison de ces deux approches nous permettra de mieux décrire les parties linéaires finies et leur propriétés géométriques.

Le chapitre se présente comme suit :

- La section 1 présentera les aspects historiques ainsi que les deux approches développées dans ce mémoire.
- La section 2 se focalisera sur les aspects algorithmiques liés à la reconnaissance des parties linéaires finies. Une partie de ces travaux a été publiée dans [LVdV06, LVdV05].
- La section 3 s'attachera à démontrer certaines caractéristiques issues du rapprochement des deux approches développées sur les parties linéaires finies. Quelques caractéristiques énoncées ici figurent dans [dVLF05, FdVF07].
- La section 4 introduira les différentes classes de parties linéaires finies sur un contour discret ainsi que certaines de leur propriétés.

2.1 Droites discrètes et segments discrets

Les approches qui seront développées dans cette section sont d'une part celle due à Réveillès qui est basée sur la *géométrie arithmétique* et d'autre part celle issue de la description combinatoire des mots de Christoffel. La combinaison et l'utilisation complémentaire de ces deux approches se révélant très utile pour obtenir des propriétés géométriques sur les parties linéaires finies. Avant cela, nous présenterons brièvement les travaux précédents sur les caractérisations des droites et segments discrets.

2.1.1 Définitions historiques

Les communautés analyse d'images, reconnaissance de forme et combinatoire des mots ont utilisé plusieurs définitions des droites discrètes et des segments discrets au fur et à mesure que la connaissance de ces objets s'approfondissait. Ces nombreuses définitions sont dues à de multiples caractérisations équivalentes de ces objets ayant suscité un grand nombre de publications dès 1940 dans les trois communautés.¹ Parmi ces très nombreuses définitions nous présenterons celles révélant les profonds changements dans la compréhension de ces objets pour la communauté analyse d'image et la communauté de la combinatoire des mots.

La première définition est celle de la discrétisation d'une demi-droite de pente α , pour $0 \leq \alpha \leq 1$, passant par $(0, \beta)$ dans \mathbb{N}^2 en utilisant la discrétisation d'intersection de la grille (cf Définition 1.1.10). On donne l'ensemble des points du plan euclidien appartenant à une demi droite de pente α passant par le point $(0, \beta)$:

$$\gamma_{\alpha, \beta} = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \geq 0\}$$

L'ensemble de \mathbb{N}^2 image de $\gamma_{\alpha, \beta}$ par la discrétisation GIQ² est donné par :

$$I_{\alpha, \beta} = \{(n, I_n) \mid (n \geq 0) \text{ et } (I_n = \lfloor \alpha n + \beta + 0.5 \rfloor)\}$$

¹Klette et Rosenfeld recensent plus de quatre vingts articles dans [KR02].

²Les points de cet ensemble sont 8-connexes.

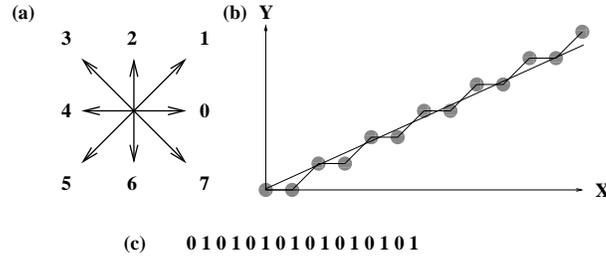


FIG. 2.1.1 – (a) Codes de Freeman; (b) portion du graphe de la demi-droite $\gamma_{\alpha,\beta}$, (en gris) sous-ensemble des points de $I_{\alpha,\beta}$; (c) un préfixe du mot infini défini par le chemin associé à $I_{\alpha,\beta}$ en code de Freeman.

Les déplacements entre les points du 8-chemin obtenus à partir de $I_{\alpha,\beta}$ écrits en code de Freeman forment un mot infini, ce mot est appelé *rayon discret* de pente α et de décalage β , le point de départ est $(0, \lfloor \beta + 0.5 \rfloor)$. Ses lettres peuvent être déduites des valeurs de I_n . Notons $i_{\alpha,\beta}$ le mot infini associé au 8-chemin obtenu à partir de $I_{\alpha,\beta}$ et $i_{\alpha,\beta}(n)$ sa $n + 1$ -ième lettre, les codes de Freeman valent alors :

$$i_{\alpha,\beta}(n) = I_{n+1} - I_n = \begin{cases} 0, & \text{si } I_n = I_{n+1} \\ 1, & \text{si } I_n = I_{n+1} - 1 \end{cases}, \text{ pour } n \geq 0$$

Une première caractérisation due à Brons en 1974 [Bro74] stipule que dans le cas où α est un nombre rationnel ce mot infini a la propriété d'être périodique,³ alors que si α est irrationnel le mot est apériodique, *i.e.* non-périodique. Ces mots apériodiques sont aussi qualifiés de *mots de Sturm*.

Le mot correspondant au chemin 4-connexe associé à la discrétisation de $\gamma_{\alpha,\beta}$ est obtenu simplement par substitution⁴ en appliquant la fonction suivante sur chaque lettre du mot infini associé à $I_{\alpha,\beta}$:

$$\varphi : \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 02 \end{array}$$

Le mot alors obtenu est un 4-rayon discret. Nous déduisons ainsi facilement une formalisation des segments de droites discrètes pour la 4-connexité et la 8-connexité :

Définition 2.1.1 *Def.5 de [KR02]*

Un segment de droite discrète (DSS pour Digital Straight Segment) est un facteur non vide d'un rayon discret et un 4-segment de droite discrète (4-DSS) est un facteur non vide d'un 4-rayon discret.

On remarque que pour un segment de droite discrète (resp. 4-segment de droite discrète) il existe une infinité de rayons discrets⁵ (resp. 4-rayon discret) dont il est facteur.

L'équivalent discret d'une droite est obtenu en étendant un rayon discret. En effet le mot infini $i_{\alpha,\beta}$ peut être étendu à un mot bi-infini, *i.e.* infini de chaque côté, représentant la discrétisation GIQ de la droite de pente α passant par $(0, \beta)$. Cet ensemble de points est un 8-chemin et peut s'écrire en code de Freeman. Soit $bi_{\alpha,\beta}$ ce mot bi-infini, ce mot définit alors une *droite discrète* de pente α et de décalage β . Remarquons que l'application de φ sur chaque lettre de $bi_{\alpha,\beta}$ donne naturellement une 4-droite discrète de même pente et de même décalage.

Les mots qui correspondent aux droites discrètes et aux rayons discrets de pentes irrationnelles sont des mots dits de *Sturm* et sont caractérisés par le nombre de facteurs d'une longueur donnée

³Si k est la période et $A = a_0 a_1 a_2 \dots$ alors pour tout n , $a_n = a_{n+k}$.

⁴ φ est un morphisme.

⁵De pentes rationnelles et irrationnelles.

(voir Lothaire [Lot87, Lot02]). Le langage constitué de tous les facteurs des mots de Sturm a été étudié en 1990 par Dulucq *et. al.* (voir [DGB90]) et donne la série génératrice de ce langage. Ces mots de Sturm sont caractérisés par le nombre de facteurs qui les composent : le nombre de facteurs de longueur n vaut $n + 1$. Une première implication est que étant donné un point sur le bord d'une forme euclidienne, le nombre de chemins différents de longueur n sur le bord du discrétisé n'est que de $n + 1$ passé une certaine résolution. En effet la discrétisation du voisinage d'un point du bord d'une forme euclidienne converge vers celle de sa tangente passé une certaine résolution. La pente de cette tangente étant presque partout de pente irrationnelle (densité de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{R}^2), son discrétisé définit un mot de Sturm.

La communauté analyse d'image a cependant préféré s'intéresser à d'autres caractérisations en vue de construire des algorithmes reconnaissant les segments de droites discrètes. Ces propriétés sont dites d'*auto-similarité* et Freeman en 1970 (voir [Fre70]) a énoncé les conditions nécessaires suivantes :

- (i) au plus deux types d'éléments peuvent être présents dans la séquence et ils ne peuvent différer que de une unité modulo huit⁶ ;
- (ii) l'un des types d'éléments apparaît toujours isolé ;
- (iii) les occurrences successives des éléments apparaissant seuls sont espacés le plus uniformément possible.

Ces propriétés sont cependant insuffisamment formelles pour caractériser complètement ces mots et c'est en 1982 que Wu [Wu82] formalisera complètement les critères de Freeman.

Dans [Tro93], Troesch donne une très bonne illustration de ces critères et propose un algorithme pour reconnaître les segments de droites discrètes basé sur une étude de l'algorithme d'Euclide.

Outre les caractéristiques d'auto-similarité, de nombreuses caractérisations géométriques ont été formulées pour les droites discrètes et les segments de droites discrètes. Ce type de caractérisation consiste souvent à donner une épaisseur maximale séparant deux droites parallèles (selon une certaine direction non collinéaire à celle des deux droites parallèles) contenant les points discrets. Par exemple :

Théorème 2.1.2 (Kovalevsky en 1990 [Kov90])

Un 4-chemin $u \in \{0, 2\}^$ est un 4-segment de droite discrète si et seulement si l'ensemble des points discrets associés à u est compris entre deux droites parallèles ayant une distance inférieure à $\sqrt{2}$ selon leur diagonale principale.*⁷

On trouve encore un autre type de caractérisation dépendant de ce que l'on appelle la *propriété de la corde* :

Définition 2.1.3 (Rosenfeld en 1974 [Ros74] et Déf.9.4 de [KR04a])

Un ensemble de point \mathcal{E} de \mathbb{Z}^2 vérifie la propriété de la corde si et seulement si pour tout couple de points distincts $(p, p') \in \mathcal{E}^2$ et n'importe quel point A sur le segment réel $[p, p']$ il existe un point discret $t \in \mathcal{E}$ tel que $\max(|A_x - t_x|, |A_y - t_y|) < 1$.

Cette propriété permet d'identifier les segments de droites discrètes :

Théorème 2.1.4 (Rosenfeld en 1974 [Ros74])

Un 8-chemin irréductible⁸ $u \in \{0, 1\}^$ est un segment de droite discrète si et seulement si les points discrets associés à ce 8-chemin vérifient la propriété de la corde.*

En revanche il existe une infinité de mots bi-infinis vérifiant la propriété de la corde et qui ne sont pas des droites discrètes. Par exemple le mot $1^\omega 01^\omega$ vérifie la propriété de la corde mais n'est pas une droite discrète.

⁶Le mot est écrit en code de Freeman pour la 8-connexité.

⁷La diagonale principale est une droite portée par le vecteur $(-1, 1)$ si la pente des deux droites parallèles est entre zéro et un.

⁸Qui ne représente plus un ensemble de points 8-connexes si l'on supprime l'un des points.

Enfin une autre caractérisation géométrique des droites discrètes et des 4-droites discrètes est due à Réveillès en 1991 dans sa thèse d'état ([Ré91]), cette définition et les notions associés sont l'objet de la prochaine section.

2.1.2 Vision Géométrie Arithmétique

Nous présentons maintenant la formalisation due à Réveillès des droites discrètes et des 4-droites discrètes. Cette formalisation se concentre sur les droites de pentes rationnelles dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette formalisation dite de *géométrie arithmétique* repose sur les propriétés des équations diophantiennes et consiste essentiellement à considérer l'ensemble des points discrets compris entre deux droites parallèles de pentes rationnelles. Les notions connexes de *reste* pour un point discret, de droites d'appui supérieures et inférieures seront aussi données. Commençons par les définitions des droites discrètes et des 4-droites discrètes en géométrie arithmétique :

Définition 2.1.5 [Ré91]

L'ensemble des points du plan discret vérifiant $\mu \leq ax - by < \mu + \max(|a|, |b|)$ avec a, b et μ entiers et avec a et b premiers entre eux est appelé droite naïve de pente rationnelle $\frac{a}{b}$ et de position μ .

Définition 2.1.6 [Ré91]

L'ensemble des points du plan discret vérifiant $\mu \leq ax - by < \mu + |a| + |b|$ avec a, b et μ entiers est appelé droite standard de pente rationnelle $\frac{a}{b}$ et de position μ .

Théorème 2.1.7 (Réveillès en 1991 [Ré91])

Pour toute droite discrète de pente rationnelle $\frac{a}{b}$ il existe un triplet (a, b, μ) tel que la droite naïve de pente $\frac{a}{b}$ et de décalage μ corresponde exactement à l'ensemble des points discret qui sont associés à la droite discrète. Réciproquement toute droite naïve est une droite discrète.

De même on a équivalence entre les 4-droites discrètes et les droites standards. Les caractérisations des 4-droites standards sont plus faciles à observer à partir de la formulation arithmétique. Ainsi pour les droites standards la distance euclidienne entre les deux droites limites euclidiennes vaut : $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on retrouve bien la caractérisation de Kovalevsky pour $a = b$. Les doubles inéquations Diophantiennes permettent aussi de définir des ensembles de points plus généraux appelés *droites épaisses* :

Définition 2.1.8 [Ré91]

L'ensemble des points du plan discret vérifiant $\mu \leq ax - by < \mu + c$ avec a, b et $c > |a| + |b|$ entiers est appelé droite épaisse de pente rationnelle $\frac{a}{b}$ et de position μ .

D'une façon générale on notera $D_{a,b,\mu}$ une droite naïve, standard ou épaisse si cela est sans ambiguïtés. Les doubles inéquations diophantiennes utilisées dans les définitions précédentes mettent en relation une quantité géométrique appelée *reste* et des entiers :

Définition 2.1.9

Étant donnée une droite arithmétique⁹ D de pente $\frac{a}{b}$, on appelle *reste* du point discret $A = (x, y)$ la quantité $ax - by$ notée $r_D(A)$.

Ces définitions permettent de vérifier avec un calcul très simple si un point du plan appartient ou non à l'un des ensembles concernés : droite naïve, droite standard ou droite épaisse. En effet il suffit de calculer le *reste* de ce point pour savoir si il appartient à une droite naïve, standard ou épaisse dont on connaît les paramètres. De plus dans le cas des droites naïves et standard on peut générer très facilement l'ensemble des points concernés. En effet étant donnée une droite standard D de caractéristiques a, b, μ et un point $p \in D_{a,b,\mu}$ de coordonnées (x, y) il suffit d'ajouter ou de retrancher a ou b pour tester l'appartenance de l'un de ses 4-voisins comme indiqué sur le Table 2.1.1.

⁹C'est-à-dire une droite naïve, standard ou épaisse.

$r_D((x+1, y))$	$=$	$r_D(p) + a$
$r_D((x, y+1))$	$=$	$r_D(p) - b$
$r_D((x-1, y))$	$=$	$r_D(p) - a$
$r_D((x, y-1))$	$=$	$r_D(p) + b$

TAB. 2.1.1 – Restes des 4-voisins d'un point à une droite arithmétique de pente $\frac{a}{b}$.

On remarque que certains points discrets appartiennent aux droites euclidiennes délimitant l'ensemble des points discrets constituant une droite arithmétique. Ces points sont appelés *points d'appui supérieurs* ou *points d'appui inférieurs* et sont de préférence employés pour des droites naïves ou standards. Pour les droites standards ces points se définissent ainsi :

Définition 2.1.10

On appelle point d'appui supérieur tout point appartenant à la droite standard $D_{a,b,\mu}$ de reste μ , ces points sont situés sur la droite euclidienne d'équation $ax - by = \mu$. Cette droite est appelée droite d'appui supérieure.

De la même façon, on appelle point d'appui inférieur tout point appartenant à la droite standard $D_{a,b,\mu}$ de reste $\mu + |a| + |b| - 1$, ces points sont situés sur la droite euclidienne d'équation $ax - by = \mu + |a| + |b| - 1$. Cette droite est appelée droite d'appui inférieure.

Dans le cas des droites naïves, seuls les points d'appui inférieurs changent et ils sont de restes $\mu + \max(|a|, |b|) - 1$. Par conséquent la droite d'appui inférieure associée est d'équation $ax - by = \mu + \max\{|a|, |b|\} - 1$.

Les points d'appui supérieurs sont donc sur une même droite et deux points d'appui supérieurs consécutifs sont toujours à la même distance qui ne dépend que de a et b . En effet pour une droite arithmétique de caractéristiques (a, b, μ) chaque élément est obtenu par translation de vecteur $k(b, a)$ avec k entier relatif à partir d'un autre élément de même reste.¹⁰ Par conséquent, pour une droite standard, il suffit d'avoir $|a| + |b|$ points appartenant à $D_{a,b,\mu}$ de restes différents pour engendrer $D_{a,b,\mu}$ par translations de vecteur (b, a) . On peut ainsi étudier les restes des points discrets constituant une droite arithmétique par rapport au reste des points d'appui supérieurs, on définit alors un *reste relatif* :

Définition 2.1.11

Étant donnée une droite arithmétique D de caractéristiques (a, b, μ) , on appelle reste relatif du point discret $A = (x, y)$ la quantité $ax - by - \mu$ notée $r_D^+(A)$.

Compte tenu de la remarque précédente, l'ensemble des restes relatifs des points discrets contenus dans une droite naïve ou standard est donné par l'ensemble des restes relatifs des points discrets contenus entre deux points d'appui supérieurs consécutifs. Ces valeurs sont par définition comprises entre 0 et $|a| + |b| - 1$. Considérons que l'on indexe alors les points par le nombre de code de Freeman les séparant d'un point d'appui supérieur¹¹, sur deux points d'appui supérieurs consécutifs ces index varient de 0 à $|a| + |b|$ et il existe une corrélation simple entre l'index d'un point et son reste. En effet, observons sur la Table 2.1.2 comment se comportent ces valeurs entre deux points d'appui successifs sur la droite standard $D_{2,7,0}$.¹² Remarquons tout d'abord que les points d'index 5 et plus ont un reste valant 2 multiplié par leur index modulo 9.

D'une façon plus générale on observe que $ax - by \equiv a(x + y) [a + b]$. En effet, $a + b = pa + r$ avec $1 \leq r \leq a - 1$ puisque a et b sont premiers entre eux. Il suit $ax - by = ax - ((p-1)a + r)y = a(x + y) - y(pa + r)$ et comme $a + b = pa + r$, on obtient bien $ax - by \equiv a(x + y) [a + b]$.

¹⁰Puisque pour $k \in \mathbb{Z}$, $ax - by = a(x + kb) - b(y + ka)$

¹¹On remarque que cela revient à considérer la distance issue de la norme $|\cdot|_1$ entre un point et le point d'appui supérieur considéré.

¹²On obtiendrait les mêmes résultats en regardant les restes relatifs d'une droite standard de même pente ayant μ non égal à zéro.

Coordonnées du point	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(2,7)
Index du point	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste relatif	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
Code de Freeman	0	0	0	0	2	0	0	0	2	

TAB. 2.1.2 – Restes relatifs, indices et code de Freeman des points situés entre deux points d'appui supérieurs consécutifs (dont l'un est l'origine) de la droite standard de caractéristiques $(2, 7, 0)$.

Ceci est dû au fait que si a et b sont premiers entre eux, alors a et $a+b$ sont aussi premiers entre eux, par conséquent a engendre $(\mathbb{Z}/(a+b)\mathbb{Z}, +)$. Il n'est donc pas surprenant de pouvoir exprimer tout reste relatif comme un multiple de a modulo $a+b$.

Remarquons aussi que les points d'appui supérieurs et inférieurs alternent puisque tous les restes relatifs possibles sont atteints entre deux points d'appui supérieurs :

Lemme 2.1.12

Entre deux points d'appui supérieurs consécutifs se trouve toujours un et un seul point d'appui inférieur. Réciproquement entre deux points d'appui inférieurs consécutifs se trouve toujours un et un seul point d'appui supérieur.

Notons que la corrélation entre l'index d'un point, ses coordonnées et son reste nous permet d'obtenir une paramétrisation simple des droites standards :

$$D_{a,b,0} = \{(x(i), y(i)) \mid i \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(i) &= i - \left\lfloor \frac{ai}{a+b} \right\rfloor = i - \left(\frac{ai - r_{D_{a,b,0}}^+(x(i), y(i))}{a+b} \right) \\ y(i) &= \left\lfloor \frac{ai}{a+b} \right\rfloor = \frac{ai - r_{D_{a,b,0}}^+(x(i), y(i))}{a+b} \end{cases}$$

Il existe encore d'autres points ayant des caractéristiques remarquables qui sont appelés *points faiblement extérieurs* et dont nous donnons la définition pour les droites standards :

Définition 2.1.13

On appelle point faiblement extérieur à la droite standard $D_{a,b,\mu}$ tout point extérieur à la droite standard et de reste $\mu - 1$ ou $\mu + |a| + |b|$. Cet ensemble de points se sépare en les points supérieurs faiblement extérieurs et les points inférieurs faiblement extérieurs selon que leur reste vaut respectivement $\mu - 1$ ou $\mu + |a| + |b|$.

Dans le cas des droites naïves, seuls les restes des *points inférieurs faiblement extérieurs* changent et ils valent $\mu + \max(|a|, |b|)$.

Les points d'appui et les points faiblement extérieurs sont liés par une relation arithmétique très simple due à leurs restes comme illustré sur la Figure 2.1.2 :

Lemme 2.1.14

Étant donné une droite arithmétique $D_{a,b,\mu}$ dans le premier octant, les points d'appui et les points faiblement extérieurs sont liés comme suit :

- un point supérieur faiblement extérieur est le translaté d'un point d'appui inférieur par le vecteur $(-1, 1)$,
- un point inférieur faiblement extérieur est le translaté d'un point d'appui supérieur par le vecteur $(1, -1)$.

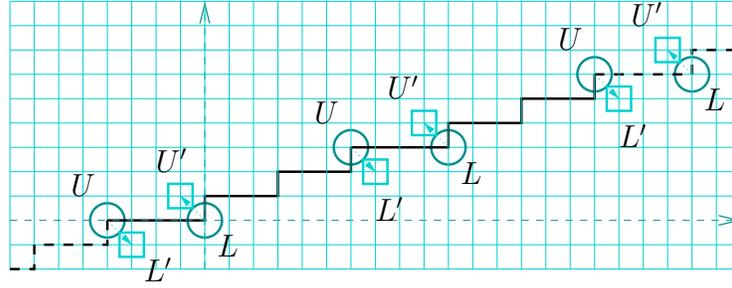


FIG. 2.1.2 – Positions des points faiblement extérieurs sur une droite standard de caractéristiques $(3, 10, 12)$. Les carrés représentent les points faiblement extérieurs : U' pour les supérieurs et L' pour les inférieurs. Les cercles représentent les points d'appui : U pour les supérieurs et L pour les inférieurs.

Preuve:

Il suffit de calculer les restes associés. □

Un segment standard étant un facteur d'une droite standard, il existe une infinité de droites standards possédant un facteur particulier. Néanmoins parmi toutes ces droites, l'on s'attache à une en particulier, celle qui minimise $a + b$ et μ .

Définition 2.1.15

Étant donné un segment standard S , on appelle droite standard de caractéristique minimale la droite standard minimisant $a + b$, μ et contenant S .

Les points faiblement extérieurs sont en fait les points discrets les plus proches de la droite arithmétique $D_{a,b,\mu}$ mais à l'extérieur de celle-ci, nous verrons plus tard leur importance dans l'algorithme de reconnaissance de segments discrets de Debled-Rennesson et Réveillès publié en 1995 [DRR95]. Pour cet algorithme, la partie des droites arithmétiques entre deux points d'appui supérieurs sera le *motif* principal caractérisant le segment reconnu et les coefficients (a, b, μ) seront déduits de cette partie. Ainsi avant de présenter cet algorithme, la section suivante s'attachera à décrire ces *motifs* plus en profondeur en fonction des caractéristiques a et b associées.

2.1.3 Description Combinatoire

Les mots Sturmien caractérisent les droites discrètes de pente irrationnelle et nous avons déjà vu qu'ils étaient aperiodiques. Les droites discrètes de pentes rationnelles $\frac{a}{b}$ forment quant à elles des mots bi-infinis périodiques. Comme vu précédemment, dans le cas des 4-droites discrètes ou des droites standards cette période vaut $a + b$. La section précédente a étudié les restes des points associés à cette période entre deux points d'appui supérieurs. Allons plus loin dans la description de cette partie des droites standards que nous appellerons *motif* :

Définition 2.1.16

Étant donné une droite standard $D_{a,b,\mu}$, nous appelons motif de caractéristiques (a, b) la succession des codes de Freeman entre deux points d'appui supérieurs consécutifs. La succession des codes de Freeman entre deux points d'appui inférieurs est appelée motif-renversé, ou encore miroir du motif.

Une première remarque est de constater que pour un motif de caractéristiques (a, b) , la droite de caractéristiques minimales est $D_{a,b,\mu}$ où μ est le reste du premier point du motif, c'est-à-dire un point d'appui supérieur de la droite.

Ce qui est ici appelé motif est appelé mot de Christoffel (*lower Christoffel word*) dans la communauté de la combinatoire des mots. La décomposition récursive de ces mots étant principalement

due à cette communauté. Pour l'expliquer de façon claire, nous devons d'abord introduire la définition des fractions continues. Pour cela nous commençons par l'observation suivante :

Si $[\cdot]$ désigne la partie entière, tout nombre réel α_0 s'écrit comme $\alpha_0 = [\alpha_0] + \alpha_0 - [\alpha_0]$ avec $0 \leq \alpha_0 - [\alpha_0] < 1$. Si α_0 n'est pas un entier alors $\alpha_0 - [\alpha_0]$ est différent de zéro et si l'on note $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - [\alpha_0]}$ on observe que α_1 est strictement plus grand que un. On peut alors à nouveau écrire α_1 comme $\alpha_1 = [\alpha_1] + \alpha_1 - [\alpha_1]$. Ce processus peut être itéré tant que α_i n'est pas un entier. Plus formellement on a :

Tout nombre rationnel $\frac{p}{q} = z$ admet un développement fini en *fraction continue* de la forme :

$$z = u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{u_n}}}$$

Dans le cas où z est compris entre 0 et 1 on a $u_0 = 0$. Cette écriture sera par la suite abrégée en $[u_0, u_1, \dots, u_n]$. Les u_i seront appelés *coefficients partiels* et la fraction continue formée des $k + 1$ coefficients partiels, c'est-à-dire $[u_0, u_1, \dots, u_k]$, sera appelée k -ième convergent de z et sera noté z_k . D'une façon générale la *réduite* d'un nombre est l'un de ses convergents. On appellera *profondeur* ou *complexité* de z le plus grand entier positif n tel que u_n soit différent de zéro. Remarquons que le k -ième convergent de z est un rationnel et qu'il est de profondeur k . Enfin nous noterons respectivement p_k et q_k le numérateur et le dénominateur du k -ième convergent. Puisque $[u_0, u_1, \dots, u_{n+1}] = [u_0, u_1, \dots, u_n, 1]$, nous considérerons toujours que le dernier coefficient partiel de la fraction continue d'un nombre rationnel est au moins égal à deux.¹³ Cependant lorsque nous considérerons les réduites d'une pente rationnelle, le nombre 1 pourra être le dernier coefficient partiel non nul.

Dans le cas des nombres irrationnels, le développement en fraction continue est infini mais a la propriété d'être ultimement périodique, *i.e.* périodique après un certain rang, pour les nombres quadratiques, *i.e.* solutions d'une équation de degré deux à coefficients entiers. Parmi les développements en fraction continue remarquables, celui du nombre d'or est tout à fait singulier puisque tous ses coefficients partiels valent 1 et que le k -ième convergent du nombre d'or vaut $\frac{F(k)}{F(k+1)}$ où F est la suite de Fibonacci.

Ceci illustre bien que les suites des p_k , q_k et des u_k sont profondément liées entre elles. Les relations de récurrences entre ces suites s'écrivent comme suit pour les nombres compris entre 0 et 1 exclus :¹⁴

$$\forall k \geq 1 \quad p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1} \quad (2.1.1)$$

$$p_0 = 0 \quad p_{-1} = 1 \quad \forall k \geq 1 \quad p_k = u_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (2.1.2)$$

$$q_0 = 1 \quad q_{-1} = 0 \quad \forall k \geq 1 \quad q_k = u_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (2.1.3)$$

$$z_0 < z_2 < \dots < z_{2i} < \dots < z < \dots < z_{2i+1} < \dots < z_3 < z_1 \quad (2.1.4)$$

Les u_i sont en fait les quotients issus de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} \frac{10}{23} &= \underbrace{0}_{u_0} + \frac{10}{23} \\ \frac{23}{10} &= \underbrace{2}_{u_1} + \frac{3}{10} \\ \frac{10}{3} &= \underbrace{3}_{u_2} + \frac{1}{3} \\ \frac{3}{1} &= \underbrace{3}_{u_3} \end{aligned}$$

¹³Sauf bien sûr pour les entiers naturels.

¹⁴Pour un nombre quelconque p_0 vaut u_0 , c'est-à-dire sa partie entière.

Les coefficients donnés par l'algorithme d'Euclide peuvent être utilisés pour trouver des nombres particuliers, appelés les *coefficients de Bezout* :

Définition 2.1.17

Soient a et b premiers entre eux avec $0 < a < b$, les coefficients de Bezout du couple (a, b) sont le plus petit¹⁵ couple d'entiers positifs (x, y) tels que $ax - by = 1$.

L'écriture en fraction continue permet de les obtenir directement :

Lemme 2.1.18

Les coefficients de Bezout relatifs au couple d'entiers (a, b) s'écrivent en fonction de la parité de la complexité de $\frac{a}{b}$, ainsi en notant $\frac{p_k}{q_k}$ le k -ième convergent de $\frac{a}{b}$:

$$\begin{aligned} (q_{2i}, p_{2i}) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i + 1 \\ (b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1}) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i \end{aligned}$$

Preuve:

D'après l'équation (2.1.1), on observe que si $z = \frac{a}{b}$ est de complexité impaire (disons $2i + 1$) alors $aq_{2i} - bp_{2i} = 1$, les solutions de l'équation homogène associée à $ax - by = 1$ étant de la forme (kb, ka) avec $k \in \mathbb{Z}$, le couple (q_{2i}, p_{2i}) est donc celui des coefficients entiers les plus petits. Dans le cas pair ou $z = \frac{a}{b}$ est de complexité paire (disons $2i$), on a $aq_{2i-1} - bp_{2i-1} = -1$, soit encore $a(b - q_{2i-1}) - b(a - p_{2i-1}) = 1$, par construction $(b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1})$ sont bien les coefficients de Bezout (voir Eq. (2.1.2) et Eq. (2.1.3)). \square

Remarquons aussi que l'équation Eq. (2.1.4) stipule que tous les convergents pairs d'un nombre sont des approximations par valeurs inférieures et que les convergents impairs sont des approximations par valeurs supérieures.

Enfin nous présentons les relations de récurrence permettant d'écrire les motifs de façon récursive, nous nous attacherons à la formule présentée par Berstel en 1990 [Ber90]. Pour cela nous introduisons une application notée E de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans $\{0, 2\}^*$. L'image d'un nombre, qui ici représentera une pente, $z = \frac{a}{b}$ sera le 4-chemin associé à la droite standard $D_{a,b,0}$ entre deux points d'appui supérieurs consécutifs écrits en code de Freeman. On définit cette application ainsi pour les premiers rangs :

$$E(z_0) = 0 \quad E(z_1) = 0^{u_1} 2$$

Les autres valeurs s'écrivent de façon récursive en fonction de la parité de la complexité de leur développement en fraction continue :

$$E(z_{2i}) = E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^{u_{2i}} \tag{2.1.5}$$

$$E(z_{2i+1}) = E(z_{2i})^{u_{2i+1}}E(z_{2i-1}) \tag{2.1.6}$$

Une illustration est proposée sur la Figure 2.1.3 pour une pente de complexité impaire.

Cette écriture permet de retrouver facilement la factorisation d'un mot de Christoffel en deux mots de Christoffel. En effet la césure dans la factorisation intervient au point discret le plus proche de la droite d'appui supérieure. Ce point est donc le point de reste 1 dans le motif, nous sommes ici le cas le plus simple pour $\mu = 0$, si μ n'est pas différent de zéro, on se ramène à ce cas par translation. Ainsi d'après le Lemme 2.1.18 le point de césure a les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned} (b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1}) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i \\ (q_{2i}, p_{2i}) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i + 1 \end{aligned}$$

On en déduit ainsi aisément les facteurs que l'on note w_1 et w_2 :

¹⁵Au sens de la somme des coefficients.

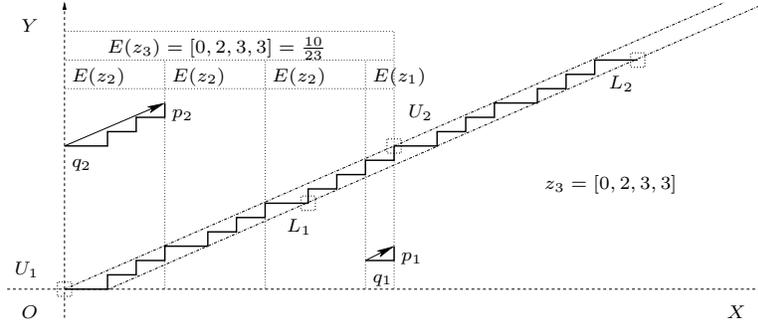


FIG. 2.1.3 – Portion d'une droite standard de caractéristiques $(10, 23, 0)$ entre l'origine et son deuxième point d'appui inférieur. On remarque que $\frac{10}{23} = [0, 2, 2, 3]$, la pente de cette droite est donc de complexité impaire.

$$\begin{array}{ll} \underbrace{E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^{u_{2i-1}-1}E(z_{2i-1})}_{w_1} & \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i \\ \underbrace{E(z_{2i})E(z_{2i})^{u_{2i}-1}E(z_{2i-1})}_{w_2} & \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i + 1 \end{array}$$

On trouve aussi une formule très similaire à celle que nous présentons, qui est appelée *formule de coupure* ou *Splitting formula* (voir [Vos93] et [KR04a]). On peut résumer cette formule à :

$$[u_0, u_1, \dots, u_i] = \begin{cases} [u_0, u_1, \dots, u_{i-1} + 1] \otimes (u_i - 1)[u_0, u_1, \dots, u_{i-1}] & \text{Si } i \text{ est pair} \\ (u_i - 1)[u_0, u_1, \dots, u_{i-1}] \otimes [u_0, u_1, \dots, u_{i-1} + 1] & \text{Si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

avec \otimes qui est un opérateur de "concaténation" tel que $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ et $(\alpha \cdot \frac{a}{b}) \otimes \frac{c}{d} = \frac{\alpha a + c}{\alpha b + d}$. Cette construction est en fait celle de la fraction médiane, aussi utilisée pour construire l'arbre de Stern-Brocot ou la suite des nombres de Farey.

Dès lors que nous connaissons les valeurs des coefficients de Bezout pour a et b donnés on obtient les coordonnées des points de reste $\mu + \alpha$ pour une droite arithmétique $D_{a,b,\mu}$:

Lemme 2.1.19

Sur une droite arithmétique $D_{a,b,\mu}$, les points de reste $\mu + \alpha$ sont de coordonnées :

$$\begin{array}{ll} (\mu + \alpha)(b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1}) + k(b, a) & \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i \\ (\mu + \alpha)(q_{2i}, p_{2i}) + k(b, a) & \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i + 1 \end{array}$$

Preuve:

Calculons les restes de ces points par rapport à $D_{a,b,\mu}$:

– Cas où $\frac{a}{b}$ est de complexité $2i$:

$$r_{D_{a,b,\mu}}((\mu + \alpha)(b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1}) + k(b, a)) = (\mu + \alpha)r_{D_{a,b,\mu}}((b - q_{2i-1}, a - p_{2i-1})) + 0 = \mu + \alpha.$$

– Cas où $\frac{a}{b}$ est de complexité $2i + 1$:

$$r_{D_{a,b,\mu}}((\mu + \alpha)(q_{2i}, p_{2i}) + k(b, a)) = (\mu + \alpha)r_{D_{a,b,\mu}}((q_{2i}, p_{2i})) + 0 = \mu + \alpha$$

□

On peut trouver une caractérisation plus intéressante pour les points d'appui inférieurs par rapport aux points d'appui supérieurs, c'est-à-dire les points dont les restes relatifs valent $\mu + |a| + |b| - 1$:

Lemme 2.1.20

Sur une droite standard $D_{a,b,\mu}$, les coordonnées du vecteur mesurant le déplacement d'un point

d'appui supérieur au point d'appui inférieur à sa droite valent :

$$\begin{aligned} (q_{2i-1}, p_{2i-1}) + (1, -1) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i \\ (b - q_{2i}, a - p_{2i}) + (1, -1) & \quad \text{si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2i + 1 \end{aligned}$$

Preuve:

Les coordonnées sont plus petites que b en abscisses et plus petites que a en ordonnées, le calcul du reste relatif conclu. \square

Maintenant que nous avons décrit les motifs constitutifs des droites standards, nous allons voir pourquoi ils sont constitutifs des *segments standards*, c'est-à-dire des facteurs des droites standards. Pour ce faire nous présenterons un algorithme optimal en temps pour la reconnaissance de segments standard, initialement cet algorithme était présenté pour les segments naïfs, dû à Debled-Rennesson et Réveillès en 1995 dans [DRR95]. Cet algorithme sera appelé **DR_1995** dans la suite.

2.2 Reconnaissance des segments discrets

La reconnaissance des segments de droites discrètes fut un sujet de recherche très actif, il s'en suivit de nombreuses publications et plusieurs types d'approches furent abordés. Les premiers algorithmes étaient fondés sur les trois critères énoncés par Freeman, on pourrait notamment citer l'algorithme de Troesch (voir [Tro93]) ou encore celui de Wu (voir [Wu82]). Klette et Rosenfeld dans [KR02] considèrent quatre types de méthodes :

- basées sur la discrétisation d'intersection avec la grille,
- basées sur des paires de droites tangentes et plus généralement sur critères géométriques,
- basées sur la propriété de la corde,
- basées sur la caractérisation des codes syntactiques.

L'algorithme qui nous intéresse est incrémental et est dans la deuxième catégorie, c'est-à-dire une reconnaissance basée sur des critères géométriques.¹⁶ Pour être plus précis l'ajout d'un point est basé sur la valeur de son reste : cette valeur déterminera si le point appartient au segment, peut être ajouté au segment en modifiant ses caractéristiques ou si il ne peut pas être ajouté. Les points extérieurs au segment pouvant être ajoutés sont les *points faiblement extérieurs* et ce sont ceux qui sont les plus proches du segment.

Auparavant nous aurons présenté une méthode de la première catégorie, basée sur l'étude de la pré-image, c'est-à-dire basée sur l'ensemble des paramètres possibles des droites se discrétisant comme l'objet discret que l'on souhaite reconnaître.

2.2.1 Pré-image

L'étude de la pré-image consiste à faire correspondre un ensemble de droites décrites par deux paramètres (leur pente et leur décalage) à un ensemble de points discrets.

Plus formellement on considère un segment discret S et on note \bar{S} l'ensemble des droites telles que leur discrétisé contienne S :

$$\bar{S} = \{(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1[\mid \forall (x, y) \in S, 0 \leq \alpha x + \beta - y < 1\}$$

En effet si l'on considère l'espace des paramètres (α, β) , appelé *espace dual*, chaque point de S engendre les contraintes suivantes sur cet espace :

$$\forall (x, y) \in S, \text{Cont}(x, y) = \begin{cases} \alpha x + \beta - y \geq 0 \\ \alpha x + \beta - y < 1 \end{cases}$$

¹⁶Il s'agit même ici de critères de *géométrie arithmétique*.

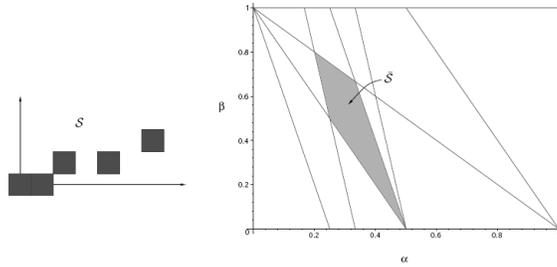


FIG. 2.2.1 – (gauche) Ensemble de points du plan discret; (droite) Contraintes associées dans l'espace des paramètres (α, β) .

L'ensemble des droites solutions est alors dans l'intersection de ces contraintes, comme illustré sur la Figure 2.2.1 (figure tirée de [Coe02]).

Ainsi un segment constitué de n points engendre $2n$ contraintes de dimension deux sur l'espace dual. \bar{S} est donc l'ensemble vérifiant chacune de ces contraintes linéaires. Cet ensemble a plusieurs propriétés énumérés dans [Coe02], notamment celle d'être convexe puisqu'il s'agit d'une intersection de contraintes. Il existe des algorithmes permettant de tester si une solution existe pour un ensemble de contraintes linéaires données, ces algorithmes sont en temps linéaires par rapport au nombre d'inéquations pour une dimension fixe.

Dorst et Smeulders (voir [DS84]) précisent que la structure de cet espace dual lorsque S est un segment discret est tout à fait particulière puisqu'elle possède au maximum 4 sommets et que les abscisses de ces sommets appartiennent à une série de Farey d'un ordre bien précis dépendant du nombre de points dans S et de l'abscisse du premier point de S .

On rappelle que la série de Farey d'ordre n est l'ensemble des fractions irréductibles positives de la forme $\frac{p}{q}$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et dont le dénominateur est inférieur ou égal à n .

De plus il existe un algorithme incrémental permettant de savoir si $S \cup (x, y)$ est un segment de droite et cela en connaissant le dual de S . Cet algorithme consiste principalement à maintenir un polygone à quatre côtés en mettant à jour les nouveaux sommets du dual de S .

2.2.2 Algorithme DR_1995

Dans sa formulation initiale l'algorithme proposé par Debled dans [DRR95] consiste à segmenter une courbe discrète en morceaux de segments discrets les plus longs possibles étant donné un sens de parcours sur la courbe. Par la suite c'est bien plus la sous-partie de l'algorithme permettant de reconnaître les segments discrets qui porte le nom d'algorithme de Debled-Rennesson. Par ailleurs, l'algorithme initial a été enrichi pour permettre les ajouts des points des deux côtés ainsi que leur retrait. Dans ce mémoire c'est cet algorithme que nous désignons sous le nom de **DR_1995**. Nous présentons ici l'étape fondamentale de l'algorithme **DR_1995** qui se propose de répondre au problème suivant :

Problème :

Étant donné un segment standard S dont on connaît :

- les caractéristiques *minimales* (a, b, μ) ,
- le point d'appui supérieur le plus à gauche, noté U_l ,
- le point d'appui supérieur le plus à droite, noté U_r ,
- point d'appui inférieur le plus à gauche, noté L_l ,
- point d'appui inférieur le plus à droite, noté L_r .

Savoir si le point $M = (x_M, y_M)$ ajouté à droite de S est tel que $S \cup M$ est un segment standard et le cas échéant modifier les caractéristiques pour que les caractéristiques de $S \cup M$ soient encore minimales.

La version pour les segments standards dont la pente est dans le premier octant et pour l'ajout d'un point à droite de S est présenté en Table 2.2.2. Nous commentons ici en détail l'algorithme et pour faciliter les explications nous annoterons avec un " † " les nouveaux paramètres :

- **cas (a)** : Le point a un reste entre μ et $\mu + a + b - 1$, il s'agit alors bien d'un point de la droite standard (a, b, μ) , étant 4-connexe avec S , il ne modifie donc pas les caractéristiques (a, b, μ) . Cependant il peut remplacer l'un des points d'appui situés aux extrémités :
 - **cas (aa)** : Le reste de M vaut μ , il s'agit donc d'un point d'appui supérieur, étant à droite de S , il remplace U_r .
 - **cas (ab)** : Le reste de M vaut $\mu + a + b - 1$, il s'agit donc d'un point d'appui inférieur, étant à droite de S , il remplace L_r .
- **cas (b)** : Le point a un reste valant $\mu - 1$, ceci signifie que le triangle $U_l U_r M$ ne contient pas de points discrets. On peut alors trouver un nouveau triplet $(a^\dagger, b^\dagger, \mu^\dagger)$ tel que $D_{a^\dagger, b^\dagger, \mu^\dagger}$ soit la droite de caractéristique minimale pour $S \cup M$. Ces caractéristiques sont telles que la pente de la droite minimale est donnée par le vecteur $\mathbf{U}_1 \mathbf{M}$. Ainsi $U_l = U_l'$ reste le point d'appui supérieur le plus à gauche, U_r' devient M et le paramètre μ^\dagger est calculé comme reste de M ou de U_l' pour le nouveau couple (a^\dagger, b^\dagger) . Enfin la pente du nouveau segment étant déterminée par seulement deux points d'appui supérieurs, il ne contient qu'un seul point d'appui inférieur, par conséquent L_l' et L_r' sont confondus. La pente de la droite de caractéristiques minimales augmentant, le point d'appui inférieur qui était le plus à droite pour S devient le seul point d'appui pour $S \cup M$ et $L_r' = L_r$.
- **cas (c)** : Le point M a ici un reste égal à $\mu + a + b$, le triangle $L_l L_r M$ est donc sans points discrets dans son intérieur. On peut alors trouver une nouvelle droite de caractéristiques minimales pour $S \cup M$. La pente sera donnée par le vecteur $\mathbf{L}_1 \mathbf{M}$ et $L_l' = L_l$, $L_r' = L_r$, de même U_l' et U_r' seront confondus et valent U_r , enfin μ^\dagger se déduit par calcul du reste en M ou L_l' .
- **cas (d)** : Dans ce cas là le reste de M est strictement supérieur à $\mu + a + b$ (resp. strictement inférieur à $\mu - 1$), il s'en suit que le triangle $U_l U_r M$ (resp. $L_l L_r M$) contient au moins un point discret dans son intérieur, et $S \cup M$ ne forme plus un facteur d'une droite standard.

Le problème est similaire si l'on veut ajouter un point à gauche, l'algorithme se déduit alors du précédent et est présenté en Table 2.2.2, la Figure 2.2.2 en propose une illustration.

Avant d'aller plus loin, précisons comment commencer la reconnaissance pour un segment dans le premier octant. Le repère est centré sur le point d'intérêt et le segment discret possède initialement les caractéristiques $(0, 1, 0)$ et ses points d'appui sont $U_l = L_l = (0, 0)$ et $U_r = L_r = (1, 0)$. L'ensemble des points considérés au départ est constitué de deux points formant un segment de pente 0, passant par l'origine.

Considérons maintenant deux paramètres supplémentaires dans les segments discrets : le nombre de motifs et le nombre de motifs-renversés le constituant. Le premier se déduit naturellement du nombre de points d'appui supérieurs le constituant et si on le note δ , il vaut exactement le nombre de points d'appui supérieurs moins un. Naturellement le nombre de motifs-renversés, noté δ' , vaut

```

ajout_point_droite (a,b,μ,Ul, Ur, Ll, Lr, M) {
  r = axM - byM
  Si (μ ≤ r < a + b + μ) // (a) S ∪ M est un segment standard de même caractéristiques que S
    Si (r = μ) // (aa) M est le point d'appui supérieur le plus à droite
      Ur ← M
    Si (r = μ + a + b - 1) // (ab) M est le point d'appui inférieur le plus à droite
      Lr ← M
  Sinon si (r = μ - 1) // (b) L'ajout de M modifie les caractéristiques de S
    Ll ← Lr
    UR ← M
    a ← yUr - yUl
    b ← xUr - xUl
    μ ← axUr - byUr
  Sinon si (r = μ + a + b) // (c) L'ajout de M modifie les caractéristiques de S
    Ul ← Ur
    LR ← M
    a ← yLr - yLl
    b ← xLr - xLl
    μ ← axLr - byLr - a - b + 1
  Sinon afficher(M ne peut pas être ajouté à S) // (d)
}

```

TAB. 2.2.1 – Algorithme **DR_1995** pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on ajoute un point M à la droite du segment. On suppose que $S \cup M$ est un ensemble 4-connexe.

```

ajout_point_gauche (a,b,μ,Ul, Ur, Ll, Lr, M) {
  r = axM - byM
  Si (μ ≤ r < a + b + μ) // S ∪ M est un segment standard de même caractéristiques que S
    Si (r = μ) // M est le point d'appui supérieur le plus à gauche
      Ul ← M
    Si (r = μ + a + b - 1) // M est le point d'appui inférieur le plus à gauche
      Ll ← M
  Sinon si (r = μ - 1) // L'ajout de M modifie les caractéristiques de S
    Lr ← Ll
    Ul ← M
    a ← yUr - yUl
    b ← xUr - xUl
    μ ← axUr - byUr
  Sinon si (r = μ + a + b) // L'ajout de M modifie les caractéristiques de S
    Ur ← Ul
    Ll ← M
    a ← yLr - yLl
    b ← xLr - xLl
    μ ← axLr - byLr - a - b + 1
  Sinon afficher(M ne peut pas être ajouté à S)
}

```

TAB. 2.2.2 – Algorithme **DR_1995** pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on ajoute un point M à la gauche du segment. On suppose que $S \cup M$ est un ensemble 4-connexe.

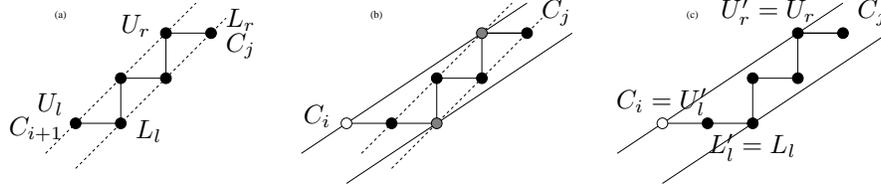


FIG. 2.2.2 – Ajout d'un point à gauche d'un segment standard. (a) Segment standard $C_{i+1,j}$. (b) Le point C_i se situe juste au-dessus de la droite d'appui supérieure et son ajout va faire décroître la pente du segment. (c) Segment discret $C_{i,j}$. Sa pente et les points d'appui U'_l et L'_r doivent être mis à jour.

le nombre de points d'appui inférieurs moins un. Pour tout segment standard, la valeur absolue de la différence entre δ et δ' est majorée par un, ceci est une conséquence de l'alternance entre les points d'appui supérieurs et inférieurs lorsque l'on parcourt une droite standard. Dans le cas particulier où un segment standard de caractéristiques (a, b, μ) ne contient pas de motifs (a, b) il contient alors nécessairement un motif-renversé de caractéristiques (a, b) . Ce cas correspond en fait à un segment ayant deux points d'appui inférieurs et un seul point d'appui supérieur. Lorsque nous considérerons les ajouts de points faiblement extérieurs, les paramètres δ et δ' ne seront jamais nuls pour les points considérés et ceci en vertu du Lemme 2.1.14.

Lemme 2.2.1

Un segment standard ne contenant aucun motif ($\delta = 0$) auquel on ajoute à sa droite (resp. gauche) un point supérieur faiblement extérieur contiendra nécessairement un point d'appui supérieur entre son point d'appui inférieur le plus à droite (resp. gauche) et le point supérieur faiblement extérieur. Réciproquement, un segment standard ne contenant aucun motif-renversé ($\delta' = 0$) auquel on ajoute à sa droite (resp. gauche) un point inférieur faiblement extérieur contiendra nécessairement un point d'appui inférieur entre son point d'appui supérieur le plus à droite (resp. gauche) et le point inférieur faiblement extérieur.

Nous pouvons ainsi considérer que lorsque nous ajouterons un point d'appui supérieur faiblement extérieur à un segment standard, δ sera toujours supérieur ou égal à un. De la même façon, lorsque nous ajouterons un point inférieur faiblement extérieur à un segment standard, δ' sera toujours supérieur ou égal à un. Ainsi nous pouvons maintenant décrire l'évolution des segments discrets en fonction de la parité de leur pente et du nombre de motifs et de motifs-renversés. Ceci est une conséquence directe de la réécriture de l'algorithme **DR_1995** :

Proposition 2.2.2

*L'évolution de la pente d'un segment standard reconnu par l'algorithme **DR_1995** dépend de la parité de la complexité de sa pente, du type de point faiblement extérieur qui lui est ajouté et du côté sur lequel il est ajouté. Ce processus peut être résumé comme suit :*

- pente de complexité paire $[0, u_1, \dots, u_{2i}]$, δ motif(s) et δ' motif(s)-renversé(s) :

	Côté gauche	Côté droit
Supérieur faiblement extérieur	$[0, u_1, \dots, u_{2i} - 1, 1, \delta]$	$[0, u_1, \dots, u_{2i}, \delta]$
Inférieur faiblement extérieur	$[0, u_1, \dots, u_{2i}, \delta']$	$[0, u_1, \dots, u_{2i} - 1, 1, \delta']$

- Pente de complexité impaire $[0, u_1, \dots, u_{2i+1}]$, δ motifs(s) et δ' motif(s)-renversé(s) :

	Côté gauche	Côté droit
Supérieur faiblement extérieur	$[0, u_1, \dots, u_{2i+1}, \delta]$	$[0, u_1, \dots, u_{2i+1} - 1, 1, \delta]$
Inférieur faiblement extérieur	$[0, u_1, \dots, u_{2i+1} - 1, 1, \delta']$	$[0, u_1, \dots, u_{2i+1}, \delta']$

Preuve:

Nous donnons la preuve dans la cas où le segment a une pente paire et où l'on ajoute un point

supérieur faiblement extérieur à sa droite. Les autres preuves sont déduites de calculs similaires ou par une rotation de 180° .

Sous ces conditions, le Lemme 2.2.1 nous permet de considérer $\delta \geq 1$. Soit U_l et U_r les points d'appui supérieurs les plus à gauche et à droite. On choisit U_l comme origine du repère. La pente du segment est donnée par $\frac{p_{2i}}{q_{2i}} = [0, u_1, \dots, u_{2i}]$.

Le point supérieur faiblement extérieur ajouté U' est de reste -1 . D'après le Lemme 2.1.18, q_{2i-1} et p_{2i-1} sont les coefficients de Bezout. En conséquence, $\mathbf{U}_r \mathbf{U}' = (q_{2i-1}, p_{2i-1})$.

D'après la formulation de l'algorithme **DR_1995** la pente du segment $C_{U_l, U'}$ est donnée par le vecteur $\mathbf{U}_l \mathbf{U}'$. Puisque $\mathbf{U}_l \mathbf{U}' = \mathbf{U}_l \mathbf{U}_r + \overline{\mathbf{U}_r} \mathbf{U}'$, on obtient bien que $\mathbf{U}_l \mathbf{U}'$ vaut $\delta(q_{2i}, p_{2i}) + (q_{2i-1}, p_{2i-1})$. Enfin on déduit des Eq. (2.1.2) et (2.1.3) que cette pente vaut $\frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} = [0, u_1, \dots, u_{2i}, \delta]$. Le cas particulier $\delta = 1$ implique alors : $\frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} = [0, u_1, \dots, u_{2i}, 1]$ que l'on écrit $[0, u_1, \dots, u_{2i} + 1]$. Ceci termine la preuve. \square

En observant comment l'on modifie les caractéristiques d'un segment lors de l'ajout d'un point on peut en déduire comment retrouver les caractéristiques d'un segment lorsque l'on retire un point. En s'appuyant sur ces considérations, Feschet et Tougne en 1999 [FT99] expliquent brièvement la méthode pour retirer les points aux extrémités d'un segment. La méthode à employer est plus détaillée dans [LVdV05] et [LVdV06]. Nous donnons ici en détail les algorithmes de retrait à gauche et de retrait à droite. Toutefois notons que pour mettre correctement à jour les points d'appui inférieurs et supérieurs il est nécessaire de compter le nombre de points contenus dans le segment et de mémoriser l'un des points aux extrémités, ou alors plus simplement de garder en mémoire les deux points aux extrémités du segment. Nous opterons ici pour la deuxième solution et les points aux extrémités de S seront notés Q_l et Q_r . L'algorithme de retrait pour le point le plus à gauche est présenté en Table 2.2.3 et deux exemples illustrent l'algorithme sur les Figures 2.2.3 et 2.2.4. Commentons les différents cas :

– Dans tout les cas, on commence par mettre à jour le point Q_l .

cas (a) : Le reste de M vaut μ , M étant le point le plus à gauche, c'est donc U_l . Il reste alors à déterminer si le retrait de M modifie les caractéristiques du segment.

cas (aa) : Le segment contient deux points d'appui supérieurs et il contient au moins deux points d'appui inférieurs, en conséquence ses caractéristiques ne sont pas modifiées. Là encore, la mise à jour de U_l suffit.

cas (ab) : Le segment contient deux points d'appui supérieurs et un point d'appui inférieur (voir Figure 2.2.3), ses caractéristiques doivent être mises à jour. Par construction, U_r et L_l ne changent pas. Calculons maintenant les nouvelles caractéristiques du segment. Tout d'abord on remarque d'après le Lemme 2.1.14 que $M + (1, -1)$ est un point inférieur faiblement extérieur pour $S \cup M$. Par conséquent il est un point d'appui inférieur pour la droite de caractéristiques minimales contenant S . Puisque $M + (1, -1)$ est extérieur à S le point d'appui inférieur après lui sur la droite de caractéristiques minimales est L_l , les coordonnées du vecteur reliant ces deux points donnent les coefficients de la nouvelle pente de S . Le nouveau décalage se calcule alors simplement comme le reste du point U_r et il reste à déterminer U_l et L_r . C'est à ce moment là qu'interviennent les points Q_l et Q_r . En effet, U_r étant connu il suffit de regarder si l'abscisse du vecteur $\mathbf{Q}_l \mathbf{U}_r$ est plus grande que b pour savoir si il y a un point d'appui supérieur sur S à gauche de U_r . Celui le plus à gauche se trouve ainsi très facilement.¹⁷ De même pour le point d'appui inférieur le plus à droite, si l'abscisse du vecteur $\mathbf{L}_l \mathbf{Q}_r$ est plus grande que b , alors il existe un point d'appui inférieur à droite de U_l . Les coordonnées de L_r se trouvent alors facilement.

cas (b) : Le reste de M vaut $\mu + a + b - 1$, M étant le point le plus à gauche, c'est donc L_l . Il reste alors à déterminer si le retrait de M modifie les caractéristiques du segment.

cas (ba) : Le segment contient au moins deux points d'appui inférieurs et il contient au

¹⁷On pourrait remarquer que connaissant L_l le Lemme 2.1.20 permet de conclure mais il faudrait faire deux sous-cas selon la parité de la pente.

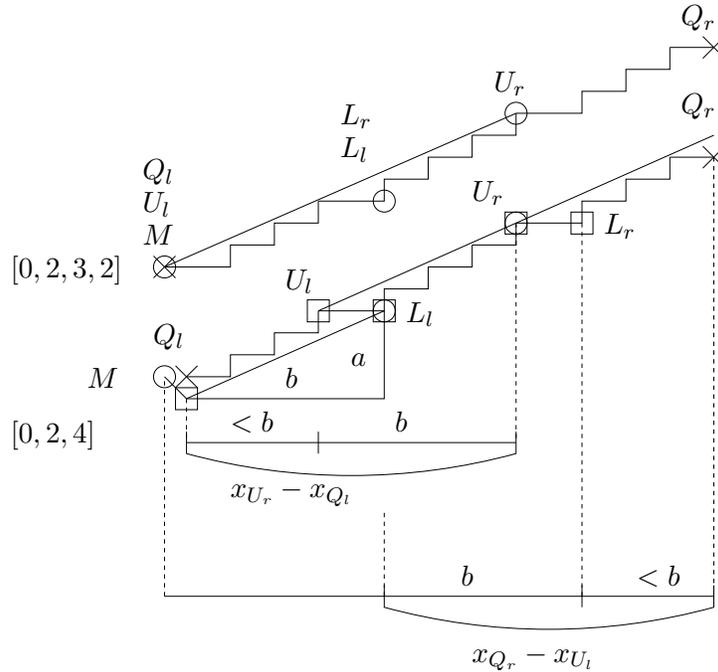


FIG. 2.2.3 – Exemple de retrait d’un point pour un segment de pente $[0, 2, 3, 2]$ contenant deux points d’appui supérieurs et un point d’appui inférieur. Les cercles représentent les points d’appui avant le retrait du point M , les carrés représentent les nouveaux points d’appui après le retrait du point M . En haut le segment avant le retrait du point M ; en dessous les notations de l’algorithme présenté dans la Table 2.2.3.

moins deux points d’appui supérieurs, en conséquence ses caractéristiques ne sont pas modifiées. Là encore, la mise à jour de L_l suffit.

cas (bb) : Le segment contient deux points d’appui inférieurs et un point d’appui supérieur (voir Figure 2.2.4), ses caractéristiques doivent être mises à jour. Par construction, L_r et U_l ne changent pas. Calculons maintenant les nouvelles caractéristiques du segment. Tout d’abord on remarque d’après le Lemme 2.1.14 que $M + (-1, +1)$ est un point supérieur faiblement extérieur pour $S \cup M$. Par conséquent il est un point d’appui supérieur pour la droite de caractéristiques minimales contenant S . Puisque $M + (-1, +1)$ est extérieur à S le point d’appui supérieur après lui sur la droite de caractéristiques minimales est U_l , les coordonnées du vecteur reliant ces deux points donnent les coefficients de la nouvelle pente de S . Le nouveau décalage se calcule alors simplement comme le reste du point U_l et il reste à déterminer L_l et U_r . C’est à ce moment là qu’interviennent les points Q_l et Q_r . En effet, L_r étant connu il suffit de regarder si l’abscisse du vecteur $\mathbf{Q}_l \mathbf{L}_r$ est plus grande que b pour savoir si il y a un point d’appui inférieur sur S à gauche de L_r . Celui le plus à gauche se trouve ainsi très facilement. De même pour le point d’appui supérieur le plus à droite, si l’abscisse du vecteur $\mathbf{U}_l \mathbf{Q}_r$ est plus grande que b , alors il existe un point d’appui supérieur à droite de U_l . Les coordonnées de U_r se trouvent alors facilement.

cas (c) : Le point M a un reste compris entre $\mu + 1$ et $\mu + a + b - 2$, son retrait ne modifie pas la pente de S .

Nous venons de donner en détails les algorithmes pour ajouter et retirer des points aux extrémités des segments standards, nous noterons désormais $S(i, j)$ le prédicat “ $C_{i, j}$ est un segment standard” et $D(i, j)$ les caractéristiques du segment standard reconnues par l’algorithme **DR_1995**. Le détail des algorithmes précédents nous permet d’énoncer le théorème suivant :

```

retrait_point_gauche (a,b,μ,Ul, Ur, Ll, Lr, Ql, Qr, M) {
  r = axM - byM
  Si (r + a ≤ a + b + μ - 1)
    Ql ← Ql + (1, 0)
  Sinon
    Ql ← Ql + (0, 1)
  Si (r = μ) // (a) M est le point d'appui supérieur le plus à gauche
    Si (Ll ≠ Lr) // (aa) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S
      Ul ← Ul + (b, a)
    Sinon // (ab) Le retrait de M modifie les caractéristiques de S
      b ← xLl - (xM + 1)
      a ← yLl - (yM - 1)
      μ ← axUr - byUr
      Ul ← Ur - ⌊  $\frac{x_{U_r} - x_{Q_l}}{b}$  ⌋ (b, a)
      Lr ← Ll + ⌊  $\frac{x_{Q_r} - x_{L_l}}{b}$  ⌋ (b, a)
    Si (r = μ + a + b - 1) // (b) M est le point d'appui inférieur le plus à gauche
      Si (Ul ≠ Ur) // (ba) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S
        Ll ← Ll + (b, a)
      Sinon // (bb) Le retrait de M modifie les caractéristiques de S
        b ← xUl - (xM - 1)
        a ← yUl - (yM + 1)
        μ ← axUl - byUl
        Ur ← Ul + ⌊  $\frac{x_{Q_r} - x_{U_l}}{b}$  ⌋ (b, a)
        Ll ← Lr - ⌊  $\frac{x_{L_r} - x_{Q_l}}{b}$  ⌋ (b, a)
    Sinon // (c) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S
  }

```

TAB. 2.2.3 – Algorithme **DR_1995** pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on retranche le point M situé à l'extrémité gauche du segment.

<pre> retrait_point_droit (a,b,μ,U_l, U_r, L_l, L_r, Q_l, Q_r, M) { r = ax_M - by_M Si (r + b ≤ a + b + μ - 1) Q_r ← Q_r - (0, 1) Sinon Q_r ← Q_r - (1, 0) Si (r = μ) // (a) M est le point d'appui supérieur le plus à droite Si (L_l ≠ L_r) // (aa) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S U_l ← U_l - (b, a) Sinon // (ab) Le retrait de M modifie les caractéristiques de S b ← (x_M + 1) - x_{L_r} a ← (y_M - 1) - y_{L_r} μ ← ax_{U_l} - by_{U_l} U_r ← U_l + ⌊ $\frac{x_{Q_r} - x_{U_l}}{b}$ ⌋ (b, a) L_l ← L_r - ⌊ $\frac{x_{L_r} - x_{Q_l}}{b}$ ⌋ (b, a) Si (r = μ + a + b - 1) // (b) M est le point d'appui inférieur le plus à gauche Si (U_l ≠ U_r) // (ba) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S L_r ← L_r - (b, a) Sinon // (bb) Le retrait de M modifie les caractéristiques de S b ← (x_M - 1) - x_{U_r} a ← (y_M + 1) - y_{U_r} μ ← ax_{U_l} - by_{U_l} U_r ← U_l + ⌊ $\frac{x_{Q_r} - x_{U_l}}{b}$ ⌋ (b, a) L_l ← L_r - ⌊ $\frac{x_{L_r} - x_{Q_l}}{b}$ ⌋ (b, a) Sinon // (c) Le retrait de M ne modifie pas les caractéristiques de S } </pre>

TAB. 2.2.4 – Algorithme **DR_1995** pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on retranche le point M situé à l'extrémité droite du segment.

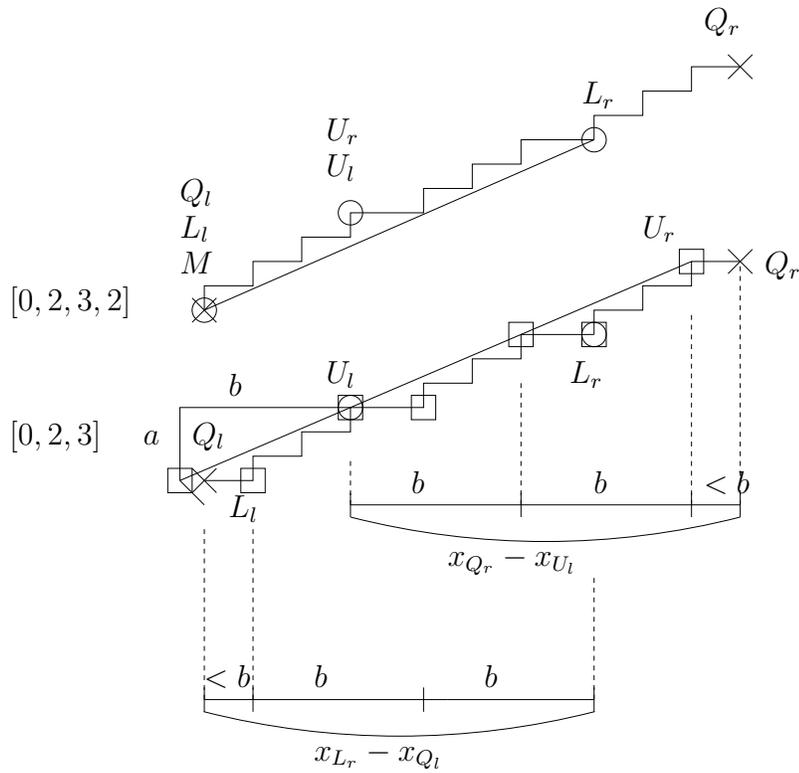


FIG. 2.2.4 – Exemple de retrait d'un point pour un segment de pente $[0, 2, 3, 2]$ contenant deux points d'appui inférieurs et un point d'appui supérieur. Les cercles représentent les points d'appui avant le retrait du point M , les carrés représentent les nouveaux points d'appui après le retrait du point M . En haut le segment avant le retrait du point M ; en dessous les notations de l'algorithme présenté dans la Table 2.2.3.

Théorème 2.2.3

Supposons que l'on ait $S(i, j)$ et que les caractéristiques $D(i, j)$ du segment standard associé soient connues, alors :

1. (Ajout du point C_i ou C_j) - Décider si $S(i, j+1)$ ou si $S(i-1, j)$ sont des opérations en $O(1)$ et lorsque cela est nécessaire, le calcul de $D(i, j+1)$ ou $D(i-1, j)$ sont aussi des opérations en $O(1)$ (Voir Debled-Renneson et Réveillès [DRR95]);¹⁸
2. (Retrait du point C_i ou C_j) - Le calcul de $D(i+1, j)$ ou de $D(i, j-1)$ sont des opérations en $O(1)$ (Voir Tables 2.2.3 et 2.2.4).

Ce théorème implique que l'on peut reconnaître toutes les classes de segments standards de façon *incrémentale*. Ceci sera d'une grande importance par la suite, notamment pour la complexité des estimateurs discrets basés sur la reconnaissance de segments standards.

Maintenant que nous savons reconnaître les segments standards nous allons pouvoir étudier les différentes classes de segments que l'on peut construire sur une courbe discrète. Cependant nous précisons auparavant les liens entre l'arbre de Stern-Brocot et l'algorithme **DR_1995** afin d'élargir ses propriétés et son interprétation. À la fin de cette section nous obtiendrons des caractéristiques sur les pentes qui nous seront utiles pour donner des propriétés géométriques sur certaines classes de segments standards construits sur les courbes discrètes.

2.3 Propriétés des motifs et de l'algorithme DR_1995

Le caractère arithmétique de l'algorithme **DR_1995** n'est pas sans conséquences sur ses propriétés et ses interprétations. En particulier il est intéressant de voir comment on peut le mettre en relation avec d'autres objets énumérant l'ensemble des rationnels entre zéro et l'unité. Ceci sera l'objet de la deuxième sous-section qui montrera comment interpréter les changements de pentes en déplacements sur l'arbre de Stern-Brocot. Les algorithmes basés sur la pré-image entretiennent eux-aussi des relations particulières avec les séries de Farey, objets permettant aussi d'énumérer l'ensemble des rationnels entre zéro et l'unité.

Auparavant nous rappelons certaines propriétés des motifs proches de celles des fractions continues dont nous aurons besoin par la suite lorsque nous étudierons (cf. Chapitre 3) en détails les segments maximaux sur des discrétisés de formes convexes lisses.

Puis nous présentons les principales classes de segments standards que l'on peut reconnaître sur une courbe discrète leur propriétés générales et enfin les algorithmes pour les reconnaître.

2.3.1 Propriétés des motifs

Cette sous-section présente certaines propriétés d'inclusions caractéristiques des motifs de segments standards. Nous avons déjà brièvement abordé certaines relations liées aux coefficients de Bezout lors de la présentation des motifs, nous tâchons d'aller un peu plus loin dans cette sous-section. Nous focalisons notamment sur les relations d'inclusions entre les motifs. Ces relations découlent de la façon dont les motifs sont formés et par conséquent du développement de la fraction continue qui leur est associée.

Nous utilisons les notations présentées sur la Figure 2.1.3 pour les points d'appui.¹⁹ Nous rappelons que par définition des motifs et des motifs-renversés nous avons les relations vectorielles suivantes : $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 = (b, a)$ et que $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = \mathbf{U}_2\mathbf{L}_2$. Dans la suite de cette sous-section nous noterons $a/b = z_n = [0, u_1, \dots, u_n]$ la pente d'un motif ou d'un motif-renversé. De plus nous utilisons les notations $v \preceq_s w$ et $v' \prec_s w$ pour les prédicats respectifs “ v est un facteur droit de w ” et “ v' est un facteur droit strict de w ”. Nous rappelons que si $w = suv$, s , u et v sont des facteurs

¹⁸Comprendre en temps constant.

¹⁹C'est-à-dire U_1 , L_1 , U_2 et L_2 .

de w et que uv et v sont des facteurs droits de w , si v n'est pas réduit au mot vide, alors uv et v sont des facteurs droits strict de w .

La Proposition 2.3.1 et la Proposition 2.3.2 indiquent précisément la position des points d'appui à l'intérieur d'un motif ainsi que les plus grands motifs de part et d'autre.

Proposition 2.3.1

Un motif de profondeur impaire (disons $n = 2i + 1$) est tel que $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = (u_{2i+1} - 1)(q_{2i}, p_{2i}) + (q_{2i-1}, p_{2i-1}) + (1, -1)$ et $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_2 = (q_{2i} - 1, p_{2i} + 1)$. De plus le segment standard C_{U_1, L_1} admet $E(z_{2i})^{u_{2i+1}-1}$ comme facteur gauche, et le segment C_{L_1, U_2} admet $E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$ comme facteur droit.

Preuve:

Le Lemme 2.1.20 implique directement que $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = (b + 1 - q_{2i}, a - 1 - p_{2i})$. Les Équations (2.1.3) et (2.1.2) développent la formule précédente en :

$$\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = ((u_{2i+1} - 1)q_{2i} + q_{2i-1} + 1, (u_{2i+1} - 1)p_{2i} + p_{2i-1} - 1).$$

Puisque $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_2 = -\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 + \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$, nous obtenons $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_2 = (q_{2i} - 1, p_{2i} + 1)$. À partir de l'Équation (2.1.6), il vient que $E(z_{2i})^{u_{2i+1}-1}$ est un facteur gauche de C_{U_1, U_2} , mais aussi de C_{U_1, L_1} . Le développement de $E(z_{2i+1})$ comme $E(z_{2i})^{u_{2i+1}-1}E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^{u_{2i}+1}$ et de $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_2$ comme $(u_{2i}q_{2i-1} + q_{2i-2} - 1, u_{2i}p_{2i-1} + p_{2i-2} + 1)$ indique bien que $E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$ est un facteur droit de C_{L_1, U_2} . \square

Proposition 2.3.2

Un motif de profondeur paire (disons $n = 2i$) est tel que $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = (q_{2i-1} + 1, p_{2i-1} - 1)$ et $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_2 = (u_{2i} - 1)(q_{2i-1}, p_{2i-1}) + (q_{2i-2}, p_{2i-2}) + (-1, 1)$. De plus le segment standard C_{U_1, L_1} a $E(z_{2i-2})^{u_{2i}-1}$ comme facteur gauche, et le segment C_{L_1, U_2} a $E(z_{2i-1})^{u_{2i}-1}$ comme facteur droit.

Cette preuve suit exactement le même raisonnement que la proposition précédente (Proposition 2.3.1) et ne sera pas détaillée ici (elle est cependant détaillée dans [FdVF05]). Une autre propriété importante est celle liant les pentes des motifs lorsqu'ils sont facteurs gauches ou droits d'un autre motif :

Proposition 2.3.3

Soit le motif $E(z_k)$ avec $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$. Si le motif de complexité impaire $E(z'_{2i+1})$ avec $z'_{2i+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2i+1}]$ est un facteur droit de $E(z_k)$ alors :

$$z'_{2i} = z_{2i} \quad \text{et} \quad u'_{2i+1} \leq u_{2i+1}$$

Preuve:

Considérons deux motifs $E(z_k)$ et $E(z'_{2i+1})$ avec $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$ et $z'_{2i+1} = [0, u'_1, \dots, u'_{2i+1}]$. Des Équations (2.1.6) et (2.1.5), on observe que $E(z_k)$ se termine toujours avec un motif de complexité impaire quel que soit k .

Supposons qu'il existe l ($2l + 1 \leq k$) tel que $E(z_{2l-1}) \preceq_s E(z'_{2i+1}) \preceq_s E(z_{2l+1})$ comme illustré sur la Figure 2.3.1.

Le cas particulier où $E(z'_{2i+1})$ est égal à $E(z_{2l+1})$ entraîne que $i = l$ et que $z'_{2i+1} = z_{2i+1}$ par l'unicité de la décomposition en fraction continue. Sinon en observant la décomposition de $E(z_{2l+1})$ à partir des Équations (2.1.6) et (2.1.5), il existe j , avec $0 \leq j < u_{2l+1}$ tel que $E(z_{2l})^j E(z_{2l-1}) \preceq_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_{2l})^{j+1} E(z_{2l-1})$, dont les pentes sont :

- $[0, u_1, \dots, u_{2l}, j]$ pour $E(z_{2l})^j E(z_{2l-1})$,
- $[0, u_1, \dots, u_{2l}, j + 1]$ pour $E(z_{2l})^{j+1} E(z_{2l-1})$.

Tout chemin discret P tel que $E(z_{2l})^j E(z_{2l-1}) \preceq_s P \prec_s E(z_{2l})^{j+1} E(z_{2l-1})$ est reconnu par l'algorithme DR_1995 comme un segment standard de pente égale à $[0, u_1, \dots, u_{2l}, j]$. Par conséquent la pente de $E(z'_{2i+1})$ vaut $[0, u_1, \dots, u_{2l}, j]$. De plus puisque c'est un motif il se décompose en $E(z'_{2i+1}) = E([0, u_1, \dots, u_{2l}, j])$, soit $z'_{2i+1} = [0, u_1, \dots, u_{2l}, j]$ et $i = l$.

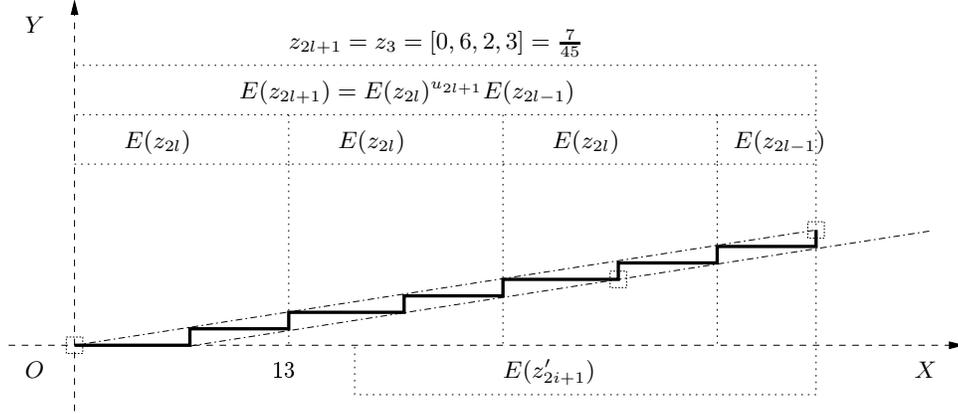


FIG. 2.3.1 – Le motif impair $E(z_{2l-1}) \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_{2l+1})$

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de l tel que : $E(z_{2l-1}) \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_{2l+1})$. Ceci impliquerait que nous ne puissions pas trouver deux sous motifs impairs facteurs droits de $E(z_k)$ qui encadreraient $E(z'_{2i+1})$. En conséquence nous aurions : $E(z_{k-1}) \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_k)$ avec k pair, ce qui donne $E(z_k) = E(z_{k-2})E(z_{k-1})^{u_k}$ et deux cas se présentent alors :

- il existe j tel que $E(z_{k-1})^j \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_{k-1})^{j+1}$, avec $j+1 \leq u_k$,
- ou $E(z_{k-1})^{u_k} \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_k)$

Dans le premier cas, il est clair que $E(z'_{2i+1})$ est reconnu par l'algorithme **DR_1995** comme un segment standard de pente z_{k-1} puisqu'il est encadré par deux chemins discrets de pentes z_{k-1} . Nous obtenons donc ici $z_{k-1} = z'_{2i+1}$.

Pour le deuxième cas, remarquons que $E(z_{k-1}) \prec_s E(z'_{2i+1})$, ce qui implique que $E(z_{k-1})$ est encadré par deux sous motifs impairs de $E(z'_{2i+1})$. Le même raisonnement que précédemment nous amène ainsi à $z'_{k-2} = z_{k-2}$ et $u_{k-1} \leq u'_{k-1}$. Des Équations (2.1.6) et (2.1.5), il apparaît que tout motif commence par un motif de pente paire et ce quelle que soit la pente. Il suit que $E(z_{k-2})$ est un facteur gauche de $E(z'_{2i+1})$ et de $E(z_k)$. De plus, puisque $E(z_{k-1})^{u_k} \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_k)$, et que $E(z_k) \equiv E(z_{k-2})E(z_{k-1})^{u_k}$, $E(z'_{2i+1})$ et $E(z_k)$ commencent par le même motif pair. En conséquence $E(z_k)$ est égal à $E(z'_{2i+1})$. Ces deux motifs n'étant pas de même parité, il s'en suit une contradiction évidente montrant que ce cas ne peut pas se produire. Ceci conclut la preuve. \square

Proposition 2.3.4

Soit le motif $E(z_k)$ avec $z_k = [0, u_1, \dots, u_k]$. Si le motif pair $E(z'_{2i})$ avec $z'_{2i} = [0, u'_1, \dots, u'_{2i}]$ est un facteur gauche de $E(z_k)$ alors :

$$z'_{2i-1} = z_{2i-1} \quad \text{et} \quad u'_{2i} \leq u_{2i}$$

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la Proposition 2.3.3 et peut être trouvée dans le rapport de recherche [FdV05]. La généralisation des propositions précédentes en considérant seulement des facteurs et non des facteurs gauches ou droits est problématique puisque dans le cas du motif $E([0, 6, 2, 3])$ dont le 4-chemin associé est représenté sur la Figure 2.3.1, on observe que $E([0, 7])$ est un facteur apparaissant trois fois et pourtant $[0, 7]$ n'est pas la réduite d'ordre un de $[0, 6, 2, 3]$. De même le motif $E([0, 6, 3])$ apparaît en tant que facteur droit de $E([0, 6, 2, 3])$ et $[0, 6, 3]$ n'est pas la réduite d'ordre deux de $[0, 6, 2, 3]$.

Enfin notons que la décomposition du motif en sous-motifs permet de déterminer les positions des points d'appui inférieurs et de calculer le chemin associé, pour démontrer cela nous avons besoin de quelques notations supplémentaires :

Notons F l'application qui à un rationnel z associe le 4-chemin entre un point d'appui supérieur et le point d'appui inférieur juste à sa droite sur la droite standard de pente z .

Soit $z_n = [0, u_1, \dots, u_n]$ un rationnel de complexité n , considérons le segment standard de caractéristiques $(p_n, q_n, 0)$ et notons $r_n(p)$ le reste d'ordre n , étant égal à :

$$r_n(p) = p_n x_p - q_n y_p$$

Par linéarité et les Équations (2.1.2) et (2.1.3) nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_n(p + p') &= r_n(p) + r_n(p') \\ r_n(p) &= u_n r_{n-1}(p) + r_{n-2}(p) \end{aligned}$$

Lemme 2.3.5

Le chemin entre un point d'appui supérieur et le point d'appui inférieur juste à sa droite peut s'écrire de façon récursive :

$$\begin{aligned} F(z_{2n}) &= E(z_{2n-2})F(z_{2n-1}) \\ F(z_{2n+1}) &= E(z_{2n})^{u_{2n+1}-1} F(z_{2n}) \end{aligned}$$

Avec les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} F(z_0) &= E(z_0) \\ F(z_1) &= E(z_0)^{u_1-1} F(z_0) \end{aligned}$$

Preuve:

Par abus de notation, on considérera que $r_n(F(z_n))$ est le calcul du reste d'ordre n au point terminant le 4-chemin $F(z_n)$. Commençons par vérifier les premiers rangs :

- Au rang zéro, on a $r_0(E(z_0)) = 0 = p_0 + q_0 - 1$.
- Au rang un, on a $r_1(E(z_0)^{u_1-1} + E(z_0)) = r_1(E(z_0)^{u_1-1}) + r_1(E(z_0))$. Puis observons que $r_1(E(z_0)^{u_1-1}) = u_1 - 1$ et que $r_1(E(z_0)) = p_1 q_0 - q_1 p_0 = 1$.
D'où $r_1(E(z_0)^{u_1-1} + E(z_0)) = 1 + u_1 - 1 = p_1 + q_1 - 1$.

Nous allons maintenant formuler notre hypothèse de récurrence, à savoir :

$$HR(n) = \begin{cases} r_{2n}(F(z_{2n})) = p_{2n} + q_{2n} - 1 \\ r_{2n+1}(F(z_{2n+1})) = p_{2n+1} + q_{2n+1} - 1 \end{cases}$$

Montrons alors que $HR(n) \implies HR(n+1)$. Nous séparons la preuve en deux sous-cas, un pour le cas pair et un pour le cas impair.

- Pour le cas pair, nous commençons par décomposer $r_{2n+2}(F(z_{2n+2}))$:

$$r_{2n+2}(F(z_{2n+2})) = r_{2n+2}(E(z_{2n})) + r_{2n+2}(F(z_{2n+1})).$$

Remarquons alors que :

$$r_{2n+2}(E(z_{2n})) = u_{2n+2}(p_{2n+1}q_{2n} - q_{2n+1}p_{2n}) + p_{2n}q_{2n} - q_{2n}p_{2n} = u_{2n+2}.$$

D'autre part en décomposant $r_{2n+2}(F(z_{2n+1}))$ nous obtenons : $u_{2n+2}r_{2n+1}(F(z_{2n+1}))$ et $r_{2n}(F(z_{2n+1}))$. Par hypothèse de récurrence, le premier terme $r_{2n+1}(F(z_{2n+1}))$ vaut $p_{2n+1} + q_{2n+1} - 1$. Le deuxième terme $r_{2n}(F(z_{2n+1}))$ se décompose en $r_{2n}(E(z_{2n})^{u_{2n+1}-1}) + r_{2n}(F(z_{2n}))$. Or :

$$r_{2n}(E(z_{2n})^{u_{2n+1}-1}) = 0 \quad \text{et} \quad r_{2n}(F(z_{2n})) = p_{2n} + q_{2n} - 1.$$

L'on trouve ainsi que :

$$r_{2n+2}(F(z_{2n+2})) = u_{2n+2} + u_{2n+2}(p_{2n+1} + q_{2n+1} - 1) + p_{2n} + q_{2n} - 1 = p_{2n+2} + q_{2n+2} - 1.$$

– Pour le cas impair, le raisonnement est similaire :

$$r_{2n+3}(F(z_{2n+3})) = \underbrace{r_{2n+3}(E(z_{2n+2})^{u_{2n+3}-1})}_{u_{2n+3}-1} + u_{2n+3} \underbrace{r_{2n+2}(F(z_{2n+2}))}_{p_{2n+2}+q_{2n+2}-1} + r_{2n+1}(F(z_{2n+2}))$$

avec $r_{2n+1}(F(z_{2n+2})) = \underbrace{r_{2n+1}(E(z_{2n}))}_1 + \underbrace{r_{2n+1}(F(z_{2n+1}))}_{p_{2n+1}+q_{2n+1}-1}$

On obtient ainsi :

$$r_{2n+3}(F(z_{2n+3})) = u_{2n+3}p_{2n+2} + p_{2n+1} + u_{2n+3}q_{2n+2} + q_{2n+1} - 1 = p_{2n+3} + q_{2n+3} - 1$$

L'on obtient bien $HR(n+1)$. Les valeurs observées des restes concluent la preuve. \square

En corollaire, nous pouvons ainsi donner directement la façon dont le chemin est construit :

Corollaire 2.3.6

Étant donné un motif $E(\frac{a}{b})$, le chemin entre un point d'appui supérieur et le point d'appui inférieur juste à sa droite s'écrit en fonction de la parité de $\frac{a}{b}$ et vaut :

$$\begin{aligned} E(z_{2n-2})^{u_{2n-1}} E(z_{2n-4})^{u_{2n-3}} \dots E(z_{2n-2i})^{u_{2n-2i+1}} \dots E(z_0)^{u_1} E(z_0) & \text{ si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2n \\ E(z_{2n})^{u_{2n+1}-1} E(z_{2n-2})^{u_{2n-1}} \dots E(z_{2n-2i})^{u_{2n-2i+1}} \dots E(z_0)^{u_1} E(z_0) & \text{ si } \frac{a}{b} \text{ est de complexité } 2n+1 \end{aligned}$$

Une première remarque est de constater que ce chemin est uniquement composé de concaténations de motifs pair, c'est à dire d'approximations par valeurs inférieures.

Nous avons déjà vu que les algorithmes liés à la pré-image étaient reliés aux séries de Farey, aussi la section suivante s'attachera à montrer que l'arbre de Stern-Brocot est lui très lié à l'algorithme **DR_1995**.

2.3.2 Liens avec l'arbre de Stern-Brocot

L'arbre de Stern-Brocot représente toutes les fractions positives. Son lien avec l'algorithme **DR_1995** avait déjà été remarqué par Debled-Rennesson dans sa thèse [DR95]. Plus précisément, les valeurs successives des pentes lors de la reconnaissance d'un segment standard sont des noeuds de plus en plus profonds dans cet arbre. Ceci n'est pas le seul lien observé puisque Sivignon (voir [SDC03, Siv04, SDC04]) utilise cet arbre pour déterminer les caractéristiques minimales de l'intersection de deux droites discrètes.

L'arbre de Stern-Brocot est un arbre binaire que l'on peut construire par un processus itératif. La façon la plus simple est de le décrire sous forme de liste. L'étape initiale consiste à placer les éléments $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ dans la liste, l'étape suivante consiste alors à insérer toutes les fractions médianes entre deux éléments de la liste. Pour la représentation en arbre le noeud initial est le noeud $\frac{1}{1}$, puis l'on ajoute itérativement un fils gauche et droit à chacun des noeuds. Le premier noeud est le fils gauche de $\frac{1}{1}$ et donne le noeud $\frac{1}{2}$, le deuxième est le fils droit de $\frac{1}{1}$ et donne le noeud $\frac{2}{1}$. On ajoute ensuite un fils gauche et un fils droit à chaque noeud. La valeur du noeud ajouté est $\frac{m+m'}{n+n'}$ si elle se situe entre les noeuds $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$. La construction de cet arbre est illustré sur la Figure 2.3.2.

Intéressons nous maintenant aux noeuds de l'arbre dont la valeur est entre zéro et l'unité exclue. Observons que chacune de ces valeurs est obtenue par un nombre fini de déplacements successifs à partir du noeud $\frac{1}{1}$. Ces déplacements sont en fait de deux types :

- L est un déplacement vers le fils gauche (L pour 'Left'),
- R est un déplacement vers le fils droit (R pour 'Right').

Sur l'arbre même nous considérons deux types de noeuds :

- les noeuds pairs : $R^0 L^{u_1} \dots L^{u_{2i-1}} R^{u_{2i}}$,
- les noeuds impair : $R^0 L^{u_1} \dots R^{u_{2i}} L^{u_{2i+1}}$.

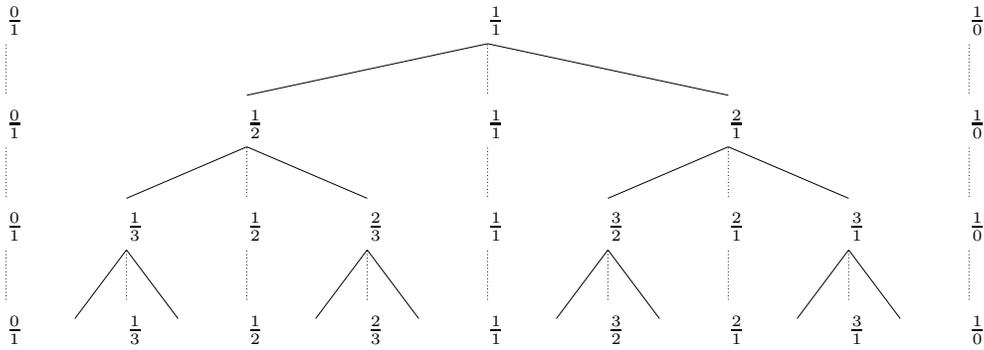


FIG. 2.3.2 – Construction de l'arbre de Stern-Brocot sur les deux premières itérations.

La valeur associée à chaque noeud de cet arbre à un développement en fraction continue particulier, intéressons nous aux deux types de noeuds présentés :

- noeuds pairs : $[0, u_1, \dots, u_{2i-1}, u_{2i} + 1]$,
- noeuds impairs : $[0, u_1, \dots, u_{2i}, u_{2i+1} + 1]$.

Bien entendu les noeuds pairs ont des complexités paires et les noeuds impairs sont de complexités impaires. Lorsque l'on descend dans l'arbre la complexité du noeud fils change si le déplacement pour l'atteindre diffère du dernier utilisé pour atteindre son père. Ainsi si l'on considère le noeud $\frac{1}{2}$ dont complexité est égale à un, le type du dernier déplacement pour l'atteindre est un L . Son fils gauche est le noeud $\frac{1}{3}$ et est de même complexité. Le fils droit du noeud $\frac{1}{2}$ est obtenu par les déplacements successifs $R^0L^1R^1$, il est donc de complexité deux. Nous pouvons ainsi classer les noeuds de l'arbre de Stern-Brocot par la complexité de la valeur des noeuds. Cette classification est partiellement représentée sur la Figure 2.3.3.

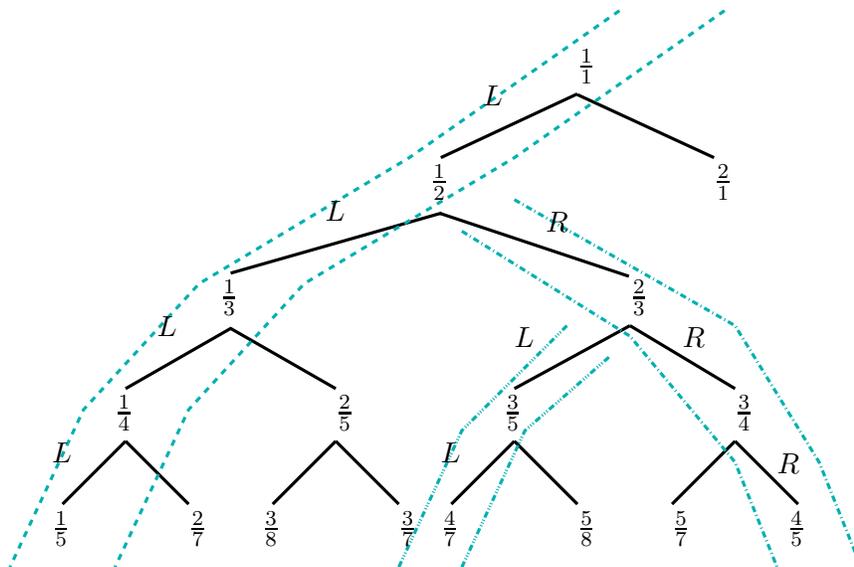


FIG. 2.3.3 – Représentation partielle de l'arbre de Stern-Brocot et des complexités des noeuds associés. Les noeuds de complexité un sont $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ceux de complexité deux sont $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$, ceux de complexité trois sont $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{7}$ et celui de complexité quatre est $\frac{5}{8}$.

Considérons maintenant les noeuds de l'arbre de Stern-Brocot comme les pentes possibles des

segments standards dans le premier octant, seuls les noeuds dont la valeur est entre zéro et l'unité nous intéressent. Tous ces noeuds sont dérivés (à part le noeud de valeur zéro) à partir du noeud $\frac{1}{1}$ avec un déplacement de type L en premier. Ceci implique bien que le premier coefficient partiel u_0 de toutes ces fractions vaille zéro.

Observons alors maintenant l'évolution de la pente d'un segment standard pendant l'évolution de l'algorithme **DR_1995** et observons les déplacements effectués sur l'arbre de Stern-Brocot, comme illustré sur la Figure 2.3.4.

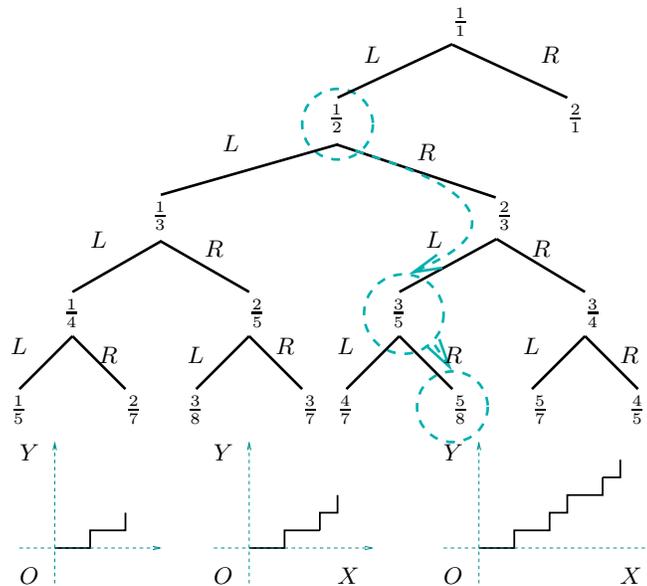


FIG. 2.3.4 – Évolution de la pente d'un segment standard sur l'arbre de Stern-Brocot. Les valeurs successives de la pente sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$. Les changements de pente sont déclenchés par l'ajout de points supérieurs faiblement extérieurs. Les pentes alors obtenues sont de complexité un, trois et quatre.

Puisque les noeuds de l'arbre de Stern-Brocot ont des développements remarquables en fraction continue, les résultats de la Proposition 2.2.2 peuvent être réinterprétés en tant que déplacements sur cet arbre. On explique ainsi l'évolution de la pente d'un segment standard en observant les déplacements possibles, la Figure 2.3.5 sert d'illustration à ce procédé. Nous observons alors que le nombre des déplacements successifs dépend bien du nombre de motifs et de motifs-renversés respectivement notés δ et δ' .

À partir de la Figure 2.3.5 nous remarquons que les fils gauches sont toujours atteints lorsque l'on ajoute un point inférieur faiblement extérieur à droite (resp. un point supérieur faiblement extérieur à gauche) et ce quelle que soit la parité de la pente. Naturellement un comportement symétrique est observé pour les fils droits. Enfin nous terminons en illustrant sur la Figure 2.3.6 les évolutions possibles sur l'arbre de Stern-Brocot pour le noeud $\frac{1}{2}$.

Les différents résultats expliqués ici nous permettront d'obtenir certaines relations géométriques sur des classes particulières de segments standards. La prochaine section s'attachera à introduire les différentes classes de segments remarquables sur une courbe discrète.

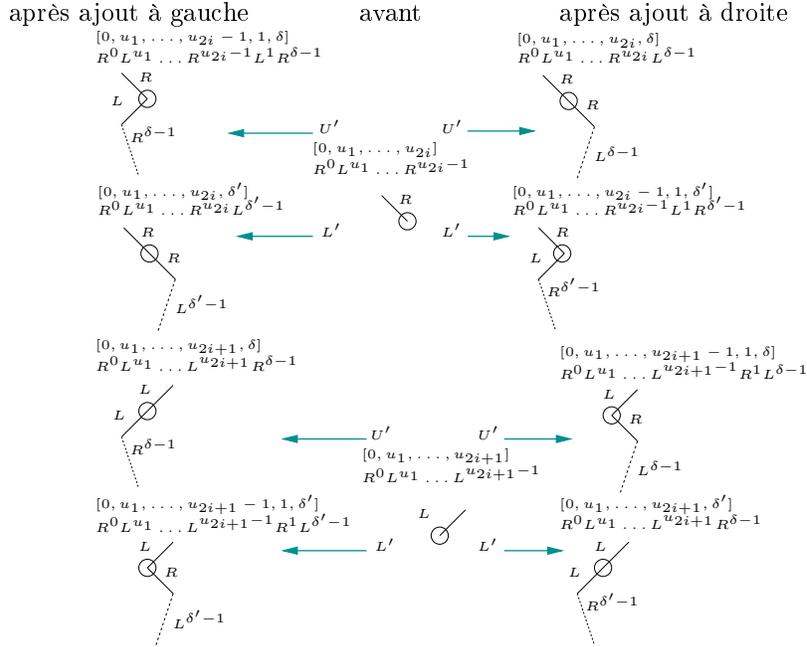


FIG. 2.3.5 – Interprétation sur l’arbre de Stern-Brocot, en termes de déplacements dans les noeuds, de l’évolution de la pente d’un segment standard par l’algorithme **DR 1995**. Le schéma sépare le cas où la pente est paire (en haut) et impaire (en bas). Le point \bar{U}' (resp. L') est un point supérieur (resp. inférieur) faiblement extérieur ajouté à gauche du segment (colonne de gauche) ou à sa droite (colonne de droite).

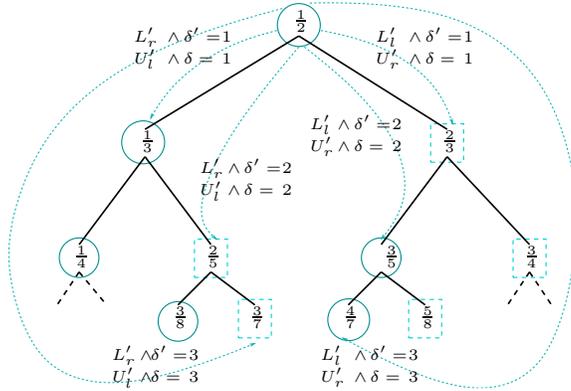


FIG. 2.3.6 – Pentes pouvant être atteintes lorsque l’on ajoute un point faiblement extérieur au motif de pente $\frac{1}{2}$. Les cercles représentent les noeuds de complexité paire et les carrés en pointillés représentent les noeuds de complexité impaire. L'_l et U'_l (resp. L'_r et U'_r) représentent des points inférieurs et supérieurs faiblement extérieurs ajoutés à gauche (resp. à droite). Les symboles δ et δ' désignent respectivement le nombre de motifs et de motifs-renversés. Ainsi “ $L'_r \wedge \delta' = 1$ ” signifie que l’on a ajouté un point inférieur faiblement extérieur à droite d’un segment standard de pente $\frac{1}{2}$ contenant un motif-renversé.

2.4 Classes de segments discrets

Cette section a pour but de présenter les différentes classes de segments discrets que l’on peut construire sur une courbe discrète. Une courbe discrète est ici le bord d’un objet discret *bien-composé*, c’est-à-dire un chemin fermé 4-connexe dans $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$. Le bord est composé de N points

discrets.

La définition des classes de segments discrets est apparue grâce à la recherche d'un équivalent discret à la notion de tangente à une courbe. Ceci peut être vu comme une application possible pour les segments discrets en plus de la polygonalisation de courbe. On trouve ainsi dès 1993 chez Troesch [Tro93] l'idée d'utiliser le segment discret le plus long parfaitement centré sur un point comme représentant de la tangente. Vialard travaille sur une définition similaire en 1996 [Via96] et en 1999, Feschet et Tougne [FT99] proposent un algorithme pour accélérer le calcul des tangentes basé sur le retrait des points.

2.4.1 Définitions et reconnaissance

Afin de formaliser les différentes classes existantes, nous commençons par définir les fonctions qui à un point associent le point le plus loin (vers la gauche ou la droite) tel que le 4-chemin entre ces deux points soit un segment standard.

Définition 2.4.1

On note F la fonction qui à tout point C_i associe le point C_j tel que $S(i, j)$ et $\neg S(i, j + 1)$. De même on note B la fonction qui à tout point C_i associe le point C_k tel que $S(k, i)$ et $\neg S(k - 1, i)$.

Lorsque cela ne posera pas d'ambiguïté, nous confondrons un point du contour C_k avec son indice k . Énonçons quelques propriétés élémentaire pour les segments discrets et les fonctions F et B :

Proposition 2.4.2

- (i) $\forall i \leq i' \leq j' \leq j, S(i, j) \Rightarrow S(i', j')$;
- (ii) F et B sont localement croissantes ;
- (iii) $F \circ B \circ F = F$ et $B \circ F \circ B = B$.

Avec ces notations, l'algorithme de Debled-Rennesson [DRR95] qui segmente une courbe en morceaux de segment standard repère les segments suivants : $C_{i, F(i)}$, $C_{F(i), F^2(i)}$, $C_{F^2(i), F^3(i)}$, \dots , $C_{F^{M(i)}(i), i}$.

L'inconvénient de cette méthode est de ne pas obtenir d'unicité pour la décomposition de la courbe puisque celle-ci dépend du point de départ choisi. Une première solution est de considérer les segments les plus longs à partir d'un point, c'est à dire les *segments maximaux* :

Définition 2.4.3

Tout ensemble de points $C_{i, j}$ est appelé un segment maximal (MS)²⁰ si et seulement si l'une des caractérisations équivalentes suivante est satisfaite :

- (1) $S(i, j)$ et $\neg S(i, j + 1)$ et $\neg S(i - 1, j)$,
- (2) $B(j) = i$ et $F(i) = j$,
- (3) $\exists k, i = B(k)$ et $j = F(B(k))$,
- (4) $\exists k', i = B(F(k'))$ et $j = F(k')$.

Cette classe de segments à été présentée par Feschet *et. al.*, Lachaud *et. al.* et Debled *et. al.* ([FT03, LVdV05, RDDR04]). Ces segments assurent que le décomposition de la courbe en segments maximaux est unique. Toutefois ces segments se recouvrent partiellement. En effet tout point appartient à au moins un segment maximal et l'ensemble de tous les segments maximaux couvre ainsi le contour discret. Cette notion a été proposée par Feschet et Tougne sous le nom de *couverture tangentielle* [FT99]. Nous en proposons une illustration sur la Figure 2.4.1 pour les segments maximaux.

La première propriété géométrique à laquelle on peut s'intéresser concerne la *longueur discrète* d'un segment maximal que l'on note $\mathcal{L}^1(MS)$ où $\mathcal{L}^1(\cdot)$ est la longueur associé à la norme 1

²⁰Debled-Rennesson et Reiter-Doerksen les appellent aussi *segments fondamentaux* dans [RDDR04].

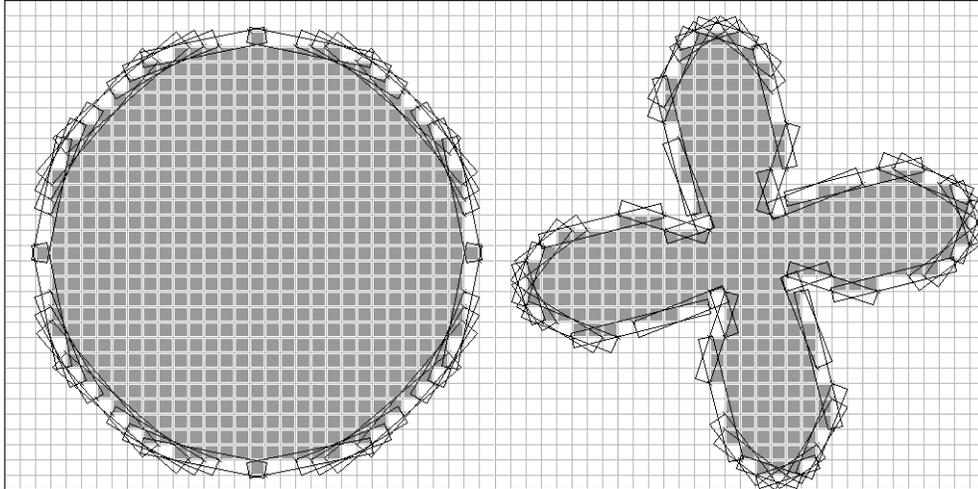


FIG. 2.4.1 – Couverture tangentielle d’un contour discret. Chaque segment maximal est représenté par sa boîte rectangulaire englobante. Gauche : la forme discrète est un disque de rayon 14 pour un pas de grille valant 1. Droite : la forme discrète est une “fleur” présentant de fortes variations de courbure et de nombreux points d’inflexion.

de Minkowski. Si l’on considère MS comme un ensemble de points, on obtient $\mathcal{L}^1(MS) + 1 = \text{Card}(MS)$.

La définition des segments maximaux à l’aide des fonctions F et B nous permet de remarquer que :

Lemme 2.4.4

Soit un segment maximal constitué d’un seul motif renversé et soient L_1 et L_2 ses deux points d’appui inférieurs (gauche et droite respectivement). Le premier et dernier point de ce segment maximal sont notés m et n respectivement. On a alors :

$$F(m) = F(L_1) = n \quad \text{et} \quad B(n) = B(L_2) = m$$

Preuve:

La pente de ce segment maximal est définie par le vecteur $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$, ainsi tout sous-ensemble 4-connexe de ce segment contenant C_{L_1,L_2} est encore de même pente. Donc $C_{m,n}$ et $C_{L_1,n}$ ont la même pente indiquant ainsi que $F(m) = F(L_1) = n$. De même C_{m,L_2} et $C_{m,n}$ sont aussi de même pente indiquant que $B(n) = B(L_2) = m$. \square

Il suit que tous les points entre m et L_1 ont même image par F et que tous ceux entre L_2 et n ont même image par B .

On peut aussi s’intéresser aux segments maximaux traversant un point, notion que l’on formalise sous l’appellation de *faisceau*. Introduisons tout d’abord les notations MS pour la séquence des segments maximaux, MS_i désigne alors le i ème segment maximal de MS et $MS_i = C_{m_i,n_i}$ avec $F(C_{m_i}) = C_{n_i}$ et $B(C_{n_i}) = C_{m_i}$.

Définition 2.4.5

On appelle *faisceau de segments maximaux en un point C_k* , l’ensemble des segments maximaux suivant :

$$\mathcal{P}(k) = \{MS_i \mid C_k \in MS_i\}$$

Une première propriété est que $\mathcal{P}(k)$ n’est jamais vide et ce quel que soit k . Cependant on peut se demander si le cardinal de $\mathcal{P}(k)$ est borné. On observe expérimentalement que le cardinal moyen

des faisceaux à une courbe lisse (cercle, ellipse) est borné. Cependant Feschet dans [FT05] exhibe une façon de construire une courbe telle que pour un n donné on puisse trouver un point dont le cardinal du faisceau de ce point soit égal à n . Notons cependant que dans le cas moyen l'on a une relation immédiate entre la somme des cardinaux des faisceaux et la somme des longueurs des segments maximaux :

Lemme 2.4.6

Soit C le contour discret, et $\mathcal{L}^1(\cdot)$ la norme 1 de Minkowski, la relation suivante est satisfaite :

$$\sum_{C_k \in C} |\mathcal{P}(k)| = \sum_{MS_i \in MS} (\mathcal{L}^1(MS_i) + 1)$$

Preuve:

Pour tout segment maximal, $\mathcal{L}^1(MS_i)$ compte le nombre de code de Freeman le constituant, le nombre de points de MS_i vaut donc sa norme plus un. Deuxièmement, il suffit d'observer que un segment maximal est comptabilisé dans le cardinal du faisceau de chacun des points le constituant. \square

Il existe d'autres classes remarquables de segments discrets, plus ou moins liées aux segments maximaux. Ces différentes définitions furent motivées par la recherche d'un représentant de la tangente à une courbe discrète; on ne sera donc pas étonné de voir les noms données à ces classes de segments.

Définition 2.4.7

Les segments standards suivants sont définis sur tout point C_k de la courbe discrète C .

- *Le segment standard $C_{k-l, k+l}$ avec $S(k-l, k+l)$ et $\neg S(k-l-1, k+l+1)$ est appelé tangente symétrique (ST) au point C_k [LV03].*
- *Le segment maximal ayant les indices les plus grands et qui contient la tangente symétrique au point C_k est appelé la tangente de Feschet-Tougne (FTT) au point C_k [FT99].*
- *La tangente étendue (ET) au point C_k inclut la tangente symétrique $C_{k-l, k+l}$ mais peut être étendue dans les deux cas suivants :*
 - (i) *si $S(k-l, k+l+1) \wedge \neg S(k-l-1, k+l)$ alors elle s'étend vers la droite en segment maximal $C_{k-l, F(k-l)}$,*
 - (ii) *si $S(k-l-1, k+l) \wedge \neg S(k-l, k+l+1)$ alors elle s'étend vers la gauche en segment maximal $C_{B(k+l), k+l}$ [BV99].*
- *La demi-tangente droite au point C_k est le segment standard $C_{k, F(k)}$ et la demi-tangente gauche au point C_k est le segment standard $C_{B(k), k}$. La demi-tangente médiane (HT) au point C_k est la médiane arithmétique des pentes des deux demi-tangentes.*

Nous verrons par la suite comment l'on peut dériver des estimateurs de tangente ([FT03, LVdV05]) et de courbure ([Coe02]) à partir de ces classes de segments. Tout d'abord explicitons les aspects calculatoires. Les premiers calculs de toute une classe de segments discrets en temps linéaire sur un contour discret sont attribués à Feschet et Tougne (leur algorithme est détaillé dans [FT99]). La classe considérée était la tangente de Feschet-Tougne (FTT) et était calculée sur une courbe 8-connexe en temps linéaire. Leur algorithme se base sur l'adaptation 8-connexe de l'algorithme **DR_1995**, notamment sur les opérations en temps constant pour l'ajout et le retrait des points.

La même chose peut être obtenue pour toute la classe des segments maximaux. Étant donné un segment maximal $M^k = C_{m_k, n_k}$, le segment maximal suivant peut être défini comme $C_{B(n_k+1), F(B(n_k+1))}$. Ce segment contient le point C_{n_k+1} et est obtenu à partir de M^k avec un minimum d'opérations élémentaires²¹. L'algorithme présenté sur la Table 2.4.1 se propose de calculer le successeur d'un segment maximal.

²¹Il s'agit ici d'ajout et de retrait de point, opération effectuées en temps constant.

```

Calculer_segment_maximal_suivant ( $C, M^k = C_{m_k, n_k}$ )
  premier  $\leftarrow m_k + 1$  // retrait de  $C_{premier}$  ( $O(1)$  Théorème 2.2.3)
  dernier  $\leftarrow n_k + 1$ 
  Tant que  $\neg S(\text{premier}, \text{dernier})$ 
    first  $\leftarrow \text{premier} + 1$  // retrait de  $C_{premier}$  ( $O(1)$  Théorème 2.2.3)
  Tant que  $S(\text{premier}, \text{last})$ 
    last  $\leftarrow \text{dernier} + 1$  // ajout de  $C_{dernier}$  ( $O(1)$  Théorème 2.2.3)
  revoie  $M^{k+1} = C_{premier, dernier-1}$ 

```

TAB. 2.4.1 – Algorithme pour calculer le successeur d’un segment maximal à partir d’un segment maximal.

Le principe de cet algorithme consiste à retirer les points à l’extrémité gauche du segment M^k jusqu’à ce que l’on puisse étendre le segment à l’autre extrémité. Les caractéristiques des segments intermédiaires doivent bien sûr être mises à jour à chaque fois que l’on retire ou ajoute un point.

Un corollaire immédiat est que l’ensemble des segments maximaux pour un contour fermé discret se calcule en temps linéaire par rapport au nombre de points sur le contour. En effet chaque point du contour est ajouté une fois à un segment et retiré une fois.

La sous-section suivante s’attachera à décrire plus en profondeur les segments maximaux, notamment sur les propriétés arithmétiques des points les qui les délimitent.

2.4.2 Propriétés remarquables des segments maximaux

La classe des segments maximaux à un contour discret est déterminée de façon unique, mais les recouvrements peuvent parfois être des inconvénients.²² Certains de ces recouvrements sont remarquables, notamment celui entre deux segments maximaux consécutifs :

Définition 2.4.8

On appelle partie commune de deux segments maximaux consécutifs, notés $C_{i, F(i)}$ et $C_{B(j), j}$ avec $F(B(j)) = j$ et $B(F(i)) = i$, le segment standard $C_{i, j}$.

De même que pour les segments maximaux, nous noterons CP la séquence des segments standards définissant les parties communes de deux segments maximaux consécutifs et CP_i sera la i -ème partie commune de CP . Ajoutons que l’on a autant de parties communes que de segments maximaux sur un contour discret fermé.

Par définition cette partie commune ne peut être étendue à gauche et à droite, sinon les segments maximaux attenants seraient plus grands. Ainsi il est naturel de se demander si l’on peut caractériser les points délimitant la partie commune. Le lemme suivant donne une première réponse qui est illustré sur la Figure 2.4.2 :

Lemme 2.4.9

Si $C_{i, j}$ est la partie commune de deux segments maximaux consécutifs, alors les points $i - 1$ et $j + 1$ sont tous deux supérieurs faiblement extérieurs ou tous deux inférieurs faiblement extérieurs à $C_{i, j}$.

Preuve:

Tout d’abord observons que $S(i, j)$ et $S(i - 1, j)$ implique que $i - 1$ peut être ajouté à gauche du segment standard $C_{i, j}$. Puisque $C_{i, F(i)}$ est le segment maximal suivant $C_{B(j), j}$, nous avons $F(i) > j$ et le prédicat $S(i, j + 1)$ est vrai. Le segment $C_{i, j+1}$ ne peut être étendu à gauche, sinon la partie commune contiendrait au moins $C_{i-1, j+1}$, ainsi le prédicat $\neg S(i - 1, j + 1)$ est vrai. Autrement dit, le segment $C_{i, j}$ peut être étendu à gauche alors que le segment $C_{i, j+1}$ ne peut pas. En conséquence

²²Par exemple du point de vue de la polygonalisation.

leur pentes doivent être différentes. D'après l'algorithme **DR_1995**, nous concluons que $j + 1$ est un point faiblement extérieur pour le segment $C_{i,j}$ pour induire un changement de pente. Le même raisonnement est aussi vrai pour $i - 1$, il est lui aussi un point faiblement extérieur pour le segment $C_{i,j}$.

Montrons maintenant par contradiction que $i - 1$ et $j + 1$ sont des points tous deux supérieurs faiblement extérieurs ou tous deux inférieurs faiblement extérieurs.

Supposons que $i - 1$ soit supérieur faiblement extérieur et que $j + 1$ soit inférieur faiblement extérieur. Supposons que le segment $C_{i,j}$ soit constitué de δ motifs et de δ' motifs-renversés. Par définition, δ et δ' diffèrent au plus de un. Cependant, étant donnés les types des points $i - 1$ et $j + 1$, l'égalité $\delta = \delta'$ à lieu. En utilisant la Proposition 2.2.2, on observe alors que les segments $C_{i-1,j}$ et $C_{i,j+1}$ ont alors la même pente (et ce quelle que soit la parité de la pente du segment $C_{i,j}$). De plus l'algorithme **DR_1995** permet d'affirmer que ces segments, en plus d'avoir la même pente, partagent aussi les points d'appui L_l et U_r , ils ont donc les mêmes caractéristiques (a, b, μ) . Ces deux assertions impliquent bien que $C_{i-1,j+1}$ est un segment standard, ce qui contredit notre hypothèse sur la partie commune.

Le cas symétrique suit le même raisonnement et aboutit aussi à une contradiction sur la partie commune, ce qui termine la preuve. \square

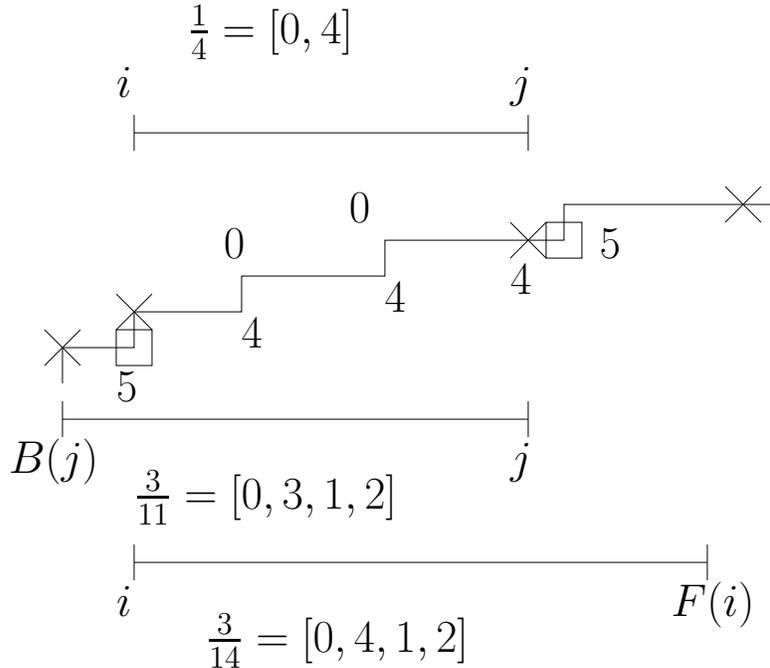


FIG. 2.4.2 – Deux segments maximaux consécutifs et leur partie commune. Les carrés représentent les points délimitant la partie commune des deux segments maximaux consécutifs. Les nombres représentent les restes relatifs par rapport au segment standard $C_{i,j}$ de certains points. Sur cet exemple on peut voir que les deux points qui délimitent la partie commune sont tous deux des points inférieurs faiblement extérieurs.

Ces conditions sur les points délimitant la partie commune sont en fait une caractérisation :

Proposition 2.4.10

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $C_{i,j}$ vérifie $S(i, j)$ et $\neg S(i - 1, j + 1)$,

(ii) $C_{i,j}$ est la partie commune de deux segments maximaux consécutifs $C_{B(j),j}$ et $C_{i,F(i)}$.

Preuve:

(ii) \Rightarrow (i) :

Tout d'abord les deux segments maximaux consécutifs $C_{m,j}$ et $C_{i,n}$ avec $m < i < j < n$ admettent $C_{i,j}$ pour partie commune. Montrons maintenant que $\neg S(i-1, j+1)$. D'après le Lemme 2.4.9, $i-1$ et $j+1$ sont tous deux inférieurs ou supérieurs faiblement extérieurs :

- dans le premier cas, $j+1$ est un point de reste relatif²³ trop grand pour être ajouté à $C_{i-1,j}$.
- dans le deuxième cas son reste relatif est trop petit pour être ajouté à $C_{i-1,j}$.

En conséquence, le prédicat $\neg S(i-1, j+1)$ est vérifié.

(i) \Rightarrow (ii) :

Réciproquement si il existe i et j tels que $S(i, j)$ et $\neg S(i-1, j+1)$ il suit que $C_{B(j),j}$ et $C_{i,F(i)}$ sont des segments maximaux. Montrons maintenant qu'ils sont aussi consécutifs par contradiction.

Supposons qu'il existe un segment maximal $C_{m,n}$ entre $C_{B(j),j}$ et $C_{i,F(i)}$. Ses indices vérifient alors : $B(j) < m < i < j < n < F(i)$ sinon il serait strictement inclus dans $C_{B(j),j}$ ou $C_{i,F(i)}$. Observons alors maintenant que la Proposition 2.4.2 conclut puisque l'on aurait $S(m, n) \implies S(i-1, j+1)$ ce qui donne une contradiction. \square

Une première remarque est que cette caractérisation est très proche de celle de la tangente symétrique. En revanche les parties communes peuvent avoir un nombre pair de points ce qui montre que l'ensemble des tangentes symétriques ne contient pas l'ensemble des parties communes. D'autre part on peut facilement obtenir des relations de longueur entre les segments maximaux et leur partie commune.

Proposition 2.4.11

La somme des longueurs des tous les segments maximaux est égal à la somme des longueurs des parties communes entre deux segments maximaux consécutifs plus le nombre de points sur la courbe.

Preuve:

On considère que le contour est constitué de N points discrets et contient M segments maximaux. Les points du contour sont indexés de façon croissante à partir du point le plus à gauche du segment maximal choisi comme étant le premier de MS comme illustré sur la figure Figure 2.4.3.

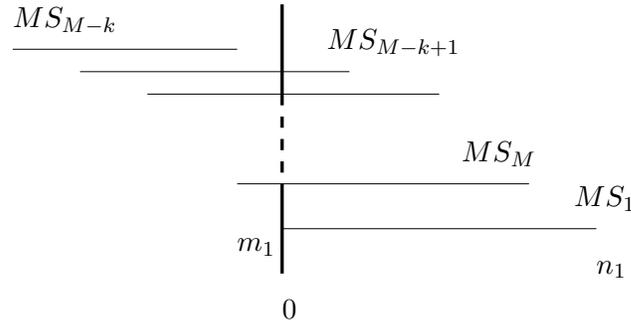


FIG. 2.4.3 – Position et index des segments maximaux sur un contour C en fonction de l'indice des points. Ici le premier point du premier segment maximal est le point d'index zéro.

En considérant les indices sur la courbe, la longueur totale des segments maximaux est exprimée comme :

$$\sum \mathcal{L}^1(MS_i) = \sum_{i=1}^{M-k} n_i - m_i + \sum_{i=M-k+1}^M n_i - m_i + N$$

²³Pour le segment standard $C_{i-1,j}$.

Et cette somme peut être écrite en :

$$\left(\sum_{i=1}^{M-k-1} n_i - m_{i+1} \right) + n_{M-k} - m_{M-k+1} + \left(\sum_{i=M-k+1}^{M-1} n_i + N - m_i \right) + m_N - m_1 + N$$

Enfin nous obtenons :

$$\sum \mathcal{L}^1(MS_i) = \sum \mathcal{L}^1(CP_i) + N$$

□

La longueur entre deux segments maximaux consécutifs notés MS_i et MS_{i+1} est définie comme la norme $\mathcal{L}^1(\cdot)$ du vecteur reliant leurs extrémités gauches, c'est à dire $\mathcal{L}^1(\mathbf{m}_i \mathbf{m}_{i+1})$.

Proposition 2.4.12

La somme des distances $\mathcal{L}^1(\cdot)$ entre les points les plus à gauche de deux segments maximaux consécutifs est égale au nombre de points du contour discret.

Preuve:

Les segments maximaux couvrent la courbe discrète. Les indices des points sont choisis de la façon suivante, $m_1 < m_2 < \dots < m_M < N$. De plus le prédicat $S(m_i, m_{i+1})$ est vérifié pour tout $1 \leq i \leq M$. Nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^M \mathcal{L}^1(C_{m_i, m_{i+1}}) = \left(\sum_{i=1}^{M-1} m_{i+1} - m_i \right) + m_1 + N - m_M = N$$

□

De la même façon l'on obtient facilement :

Proposition 2.4.13

La somme des longueurs entre les points les plus à droite des segments maximaux consécutifs est égal au nombre de points de la courbe discrète.

L'on peut encore obtenir des bornes supérieures et inférieures sur la différence des pentes entre deux segments maximaux consécutifs et ce en fonction des paramètres de la partie commune :

Théorème 2.4.14

Soit $C_{i,j}$ un segment standard de pente $\frac{p_n}{q_n}$ contenant δ motifs et δ' motifs-renversés. Si $C_{i,j}$ est la partie commune de deux segments maximaux consécutifs, qui sont $C_{i,F(i)}$ et $C_{B(j),j}$, alors leurs pentes sont telles que :

		Les points C_{i-1} et C_{j+1} sont tout deux (Lemme 2.4.9)			
		inférieurs faiblement extérieur		supérieurs faiblement extérieur	
		pente minimale	pente maximale	pente minimale	pente maximale
$C_{i,j}$ a une pente paire	$C_{i,F(i)}$	$\frac{\delta' p_{2i} - p_{2i-1}}{\delta' q_{2i} - q_{2i-1}}$	$\frac{(\delta'+2)p_{2i} - p_{2i-1}}{(\delta'+2)q_{2i} - q_{2i-1}}$	$\frac{(\delta+1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta+1)q_{2i} + q_{2i-1}}$	$\frac{(\delta-1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta-1)q_{2i} + q_{2i-1}}$
	$C_{B(j),j}$	$\frac{(\delta'+1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta'+1)q_{2i} + q_{2i-1}}$	$\frac{(\delta'-1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta'-1)q_{2i} + q_{2i-1}}$	$\frac{\delta p_{2i} - p_{2i-1}}{\delta q_{2i} - q_{2i-1}}$	$\frac{(\delta+2)p_{2i} - p_{2i-1}}{(\delta+2)q_{2i} - q_{2i-1}}$
$C_{i,j}$ a une pente impaire	$C_{i,F(i)}$	$\frac{(\delta'+1)p_{2i+1} + p_{2i}}{(\delta'+1)q_{2i+1} + q_{2i}}$	$\frac{(\delta'-1)p_{2i+1} + p_{2i}}{(\delta'-1)q_{2i+1} + q_{2i}}$	$\frac{\delta p_{2i+1} - p_{2i}}{\delta q_{2i+1} - q_{2i}}$	$\frac{(\delta+2)p_{2i+1} - p_{2i}}{(\delta+2)q_{2i+1} - q_{2i}}$
	$C_{B(j),j}$	$\frac{\delta' p_{2i+1} - p_{2i}}{\delta' q_{2i+1} - q_{2i}}$	$\frac{(\delta'+2)p_{2i+1} - p_{2i}}{(\delta'+2)q_{2i+1} - q_{2i}}$	$\frac{(\delta+1)p_{2i+1} + p_{2i}}{(\delta+1)q_{2i+1} + q_{2i}}$	$\frac{(\delta-1)p_{2i+1} + p_{2i}}{(\delta-1)q_{2i+1} + q_{2i}}$

Preuve:

Nous démontrons ici un seul cas, les autres étant obtenus de façon similaire à partir de la Proposition 2.2.2. La preuve suivante est dans le cas où $C_{i,j}$ a une pente paire et où les points C_{i-1} and C_{j+1} sont tous deux inférieurs faiblement extérieurs.

Commençons par borner les pentes obtenues en étendant $C_{i,j}$ à gauche et à droite :

- Puisque $j + 1$ est un point inférieur faiblement extérieur, $C_{i,j+1}$ est de pente $z_{2i+2}^r = [0, u_1, \dots, u_{2i} - 1, 1, \delta']$ (en vertu de la Proposition 2.2.2). Les ajouts à droite de $C_{i,j+1}$ peuvent entraîner des modifications dans la pente de $C_{i,j+1}$ et il n'est pas possible de prévoir directement la pente de $C_{i,F(i)}$. Cependant la pente du segment maximal $C_{i,F(i)}$ peut s'écrire $z^r(\epsilon_r) = [0, u_1, \dots, u_{2i} - 1, 1, \delta' + \epsilon_r]$ avec $\epsilon_r \in]-1, 1]$. En effet ceci revient juste à ne pas développer l'écriture de la fraction continue de la pente de $C_{i,F(i)}$ au-delà de la profondeur $2i + 2$. Les Eq. (2.1.2) et Eq. (2.1.3) sont encore valables si les coefficients partiels sont des réels, nous pouvons donc écrire :

$$z^r(\epsilon_r) = \frac{(\delta' + \epsilon_r + 1)p_{2i} - p_{2i-1}}{(\delta' + \epsilon_r + 1)q_{2i} - q_{2i-1}}.$$

Il suffit alors de prendre les valeurs limites de ϵ pour obtenir :

$$\frac{\delta' p_{2i} - p_{2i-1}}{\delta' q_{2i} - q_{2i-1}} < z^r(\epsilon_r) \leq \frac{(\delta' + 2)p_{2i} - p_{2i-1}}{(\delta' + 2)q_{2i} - q_{2i-1}}$$

- Appliquons exactement le même raisonnement que précédemment pour l'extension à gauche de la partie commune, il vient alors : $z_{2i+2}^l = [0, u_1, \dots, u_{2i}, \delta']$ et $z^l(\epsilon_l) = [0, u_1, \dots, u_{2i}, \delta' + \epsilon_l]$ avec $\epsilon_l \in]-1, 1]$. Les bornes obtenues sont :

$$\frac{(\delta' + 1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta' + 1)q_{2i} + q_{2i-1}} \leq z^l(\epsilon_l) < \frac{(\delta' - 1)p_{2i} + p_{2i-1}}{(\delta' - 1)q_{2i} + q_{2i-1}}.$$

□

Bien que ces majorations soient issues du premier ajout, il faut remarquer que les bornes sont atteintes dans certains cas. On observe surtout que la longueur de la partie commune joue un rôle prédominant pour la pente des segments maximaux consécutifs. De plus en utilisant le théorème précédent (Théorème 2.4.14), on peut borner la différence des pentes entre deux segments maximaux consécutifs en fonction des paramètres de la partie commune. Dans le cas où la partie commune à une pente paire et où ses points limites sont tous deux inférieurs faiblement extérieurs et en reprenant les notations de la preuve du Théorème 2.4.14, la différence de pentes entre deux segments maximaux consécutifs s'exprime comme $|\Delta z| = |z^l(\epsilon_l) - z^r(\epsilon_r)|$, soit en prenant les cas limites :

$$\frac{2\delta' + 3}{(\delta'^2 + 3\delta' + 2)q_{2i}^2 + q_{2i}q_{2i-1} - q_{2i-1}^2} < |\Delta z| < \frac{2\delta' - 1}{(\delta'^2 - \delta')q_{2i}^2 + q_{2i}q_{2i-1} - q_{2i-1}^2}.$$

De façon amusante, l'on peut aussi obtenir une inégalité plus large, exprimée seulement avec le dénominateur de la pente de la partie commune et le nombre de motifs et de motifs-renversés :

$$\frac{2\delta' + 3}{(\delta'^2 + 3\delta' + 3)q_{2i}^2} < |\Delta z| < \frac{2\delta' - 1}{(\delta'^2 - \delta')q_{2i}^2 + \frac{1}{2}q_{2i} + \frac{1}{2}}. \quad (2.4.1)$$

Cette formule fait apparaître l'importance des paramètres décrivant la partie commune. Nous remarquons ainsi que le comportement moyen des δ , δ' et q_n détermine la différence moyenne des pentes des segments maximaux.

2.5 Conclusion du chapitre

Nous avons vu les aspects algorithmiques pour la reconnaissance et l'extraction des caractéristiques des parties linéaires finies ainsi que certaines de leur propriétés. Nous avons pu constater que la vision combinatoire s'est révélée être un outil puissant pour séparer les segments discrets en

fonction de la parité de leur pentes et pouvoir ainsi mieux les décrire, les manipuler et obtenir des caractérisations géométriques sur ces derniers. Les liens présentés entre l'arbre de Stern-Brocot et l'algorithme **DR_1995** laissent présager que des études plus poussées sur les paramètres p, q, δ et δ' des segments discrets nous permettraient de mieux comprendre la géométrie des formes discrètes. Enfin les algorithmes que nous avons présentés pour leur reconnaissances sont optimaux en temps et mémoire et bien qu'il existe d'autres approches pour répondre au problème de la reconnaissance des segments discrets, leurs coûts sont au moins identiques.

Chapitre 3

Parties linéaires sur les discrétisés de formes lisses et convexes.

Ce chapitre est dédié à l'étude des parties linéaires finies sur les discrétisés de formes lisses et convexes. Plus précisément nous obtiendrons les ordres de grandeurs de certaines quantités concernant les segments maximaux en fonction du pas de la grille et ce lorsque le pas de la grille tend vers zéro. Ces quantités seront la somme de leurs longueurs, leur nombre et leur longueur moyenne. Ces résultats seront obtenus d'une part à l'aide d'un théorème de Balog et Bárány publié en 1991 [BB91] et d'autre part grâce à l'étude très précise du lien entre les arêtes d'un polygone convexe discret et les segments maximaux. Cette étude nous permettra d'obtenir de nombreux résultats sur les relations entre un segment maximal et ses arêtes attenantes. Enfin nous présenterons des pistes de réflexions sur les paramètres décrivant les segments maximaux et les arêtes.

Les sections seront ordonnées comme suit :

- La section 1 étudiera les relations entre les segments discrets et les courbes convexes. Une partie des ces résultats a été publiée dans [LVdV05, LdV06, LVdV06].
- La section 2 s'attachera à démontrer les liens existant entre les segments maximaux et l'enveloppe convexe. Localement ces liens profonds s'expriment par des relations de longueur et l'énumération des configurations possibles des segments maximaux. Globalement on obtient des relations sur les sommes des longueurs et le nombre de segments maximaux par rapport aux arêtes des PCD. Ces travaux ont été publiés dans [dVLF05, FdVF07].
- La section 3 dérivera les résultats de la section précédente en asymptotique à l'aide du théorème précité de Balog et Bárány. Les publications [dVLF05, FdVF07] contiennent une partie de cette étude.
- La section 4 présentera une étude asymptotique expérimentale sur les paramètres utilisés pour décrire les segments maximaux et ceux des arêtes de l'enveloppe convexe. Ces pistes de recherche sont évoquées dans [LdV06].

3.1 Segments discrets et courbes convexes

Avant de pouvoir étudier les relations entre l'enveloppe convexe et les segments maximaux, il convient d'étudier précisément les configurations possibles pour les segments maximaux sur des courbes convexes discrètes. Nous verrons que la contrainte de la convexité entraîne des propriétés très intéressantes pour la localisation des points de la forme réelle ainsi que des propriétés sur les restes des points limites des segments maximaux.

3.1.1 Convexité discrète et configuration locale

Cette sous section a pour but de rappeler certaines propriétés reliant les segments maximaux et la convexité discrète. De plus nous étudierons l'impact de cette contrainte pour certaines quantités géométriques locales à un segment maximal.

Définition 3.1.1

Soit un contour discret C 4-connexe orienté dans le sens trigonométrique. Le contour C est localement convexe (resp. concave) au point C_k si et seulement si les angles¹ (θ_i) des segments maximaux ordonnés² du faisceau de $\mathcal{P}(k)$ forment une séquence croissante (resp. décroissante) modulo 2π .

Il existe en fait un lien plus fort entre la convexité discrète et la monotonie des pentes des segments maximaux, puisque ces deux notions sont en fait équivalentes selon le Théorème 4.1 de [RDDR04]. Ceci implique qu'une courbe discrète convexe est localement convexe en tout point.

Nous focaliserons maintenant sur certaines configurations locales et certaines quantités géométriques locales à un segment maximal sur le bord d'une forme convexe. Nous commençons par étudier certaines propriétés pour les restes des points situés aux extrémités d'un segment maximal.

¹Les angles sont ramenés sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ relativement au premier angle mesuré.

²Par rapport à leur indices.

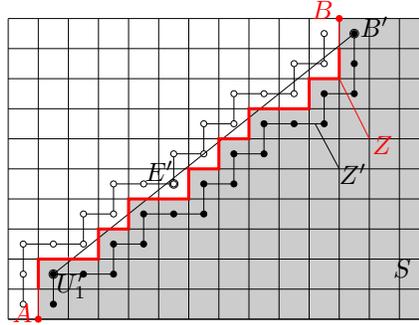


FIG. 3.1.1 – Cet exemple ne peut pas être la discrétisation d'une forme localement convexe S . La pente définie par U'_1 et E' est inférieure à celle définie par U'_1 et B' , E' étant dans le complémentaire de S . Les caractéristiques (a, b) de la droite standard Z sont $(5, 7)$.

Lemme 3.1.2

Soit C un contour discret étant la discrétisation d'une forme convexe S . Soit $M = C_{i,j}$ un segment maximal de C . Les caractéristiques de la droite standard Z supportant M sont notées (a, b, μ) . Les valeurs des restes relatifs $r_Z(P) = ax - by - \mu$ aux deux points juste à l'extérieur de M , $A \equiv C_{i-1}$ et $B \equiv C_{j+1}$, sont de même signe, positif si la courbe est convexe et orientée dans le sens anti-trigonométrique. De plus ces valeurs sont soit strictement inférieures à -1 , soit strictement supérieures à $|a| + |b|$.

Preuve:

Nous supposons ici que le repère est tel que le segment maximal M est dans le premier octant, i.e. $0 < a \leq b$ et que les points discrets en-dessous de M appartiennent à S et que les points au dessus de M appartiennent à son complémentaire \bar{S} .

Puisque B n'étend pas $C_{i,j}$, son reste relativement à Z est nécessairement strictement plus petit que -1 ou strictement plus grand que $|a| + |b|$. Supposons donc que $r_Z(B) \leq -2$, et notons par Z' le translaté de Z par le vecteur $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Le translaté de B est noté $B' \equiv B + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Son reste est tel que $r_{Z'}(B') = r_Z(B) \leq -2$. Appelons U'_1 le point d'appui supérieur de Z' image par translation du point d'appui supérieur de M d'abscisse minimale et centrons l'origine du repère sur ce point. Ces notations sont illustrées sur la Figure 3.1.1.

D'après la Proposition 1 de [DRR95], le système :

$$ax - by = -1, \quad y_{B'}x - x_{B'}y \geq 0, \quad 0 < x < x_{B'}$$

a au moins une solution (x, y) dans le plan discret. Il existe donc un point $E' = (x_{E'}, y_{E'})$ de \bar{S} , tel que $\frac{y_{B'} - y_{U'_1}}{x_{B'} - x_{U'_1}} \geq \frac{y_{E'}}{x_{E'}}$ (puisque $U'_1 = (0, 0)$). Ceci implique que la pente définie par les deux points U'_1 et B' est plus grande que celle définie par les deux points U'_1 et E' . De plus les trois points U'_1 , E' et B' ont des abscisses croissantes. Le point E' est ainsi en dessous de la droite passant par U'_1 et B' . Le bord de S passe au dessus de U'_1 (dans S), en dessous de E' (dans \bar{S}) et au dessus de B' (dans S). La configuration des pentes entre ces trois points est donc contradictoire avec la convexité de S . L'hypothèse sur $r_Z(B)$ est par conséquent fausse et la valeur de $r_Z(B)$ est dans ce cas strictement supérieure à $|a| + |b|$. On utilise le même argument à l'autre extrémité du segment maximal M pour prouver que $r_Z(A) > |a| + |b|$. \square

La configuration de ces points est en fait importante si l'on considère les rayons des cercles séparant les pixels intérieurs et extérieurs.

Lemme 3.1.3

Soit C le bord d'un objet discret image de la discrétisation d'une forme convexe S . Soit $M = C_{i,j}$ un

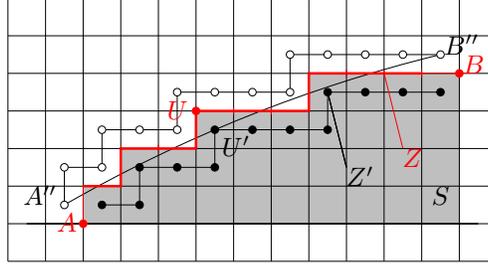


FIG. 3.1.2 – Discretisation d'une forme localement convexe S . Tout cercle séparant l'intérieur de l'extérieur a un rayon fini majoré par le rayon du cercle circonscrit à A'' , U' et B'' .

segment maximal de C . Tout cercle séparant les points discrets intérieurs et extérieurs du chemin $C_{i-1,j+1}$ a un rayon fini.

Preuve:

Nous noterons Z la droite standard supportant M et (a, b, μ) ses caractéristiques. Nous supposons ici que le segment M est situé dans le premier octant, i.e. $0 < a \leq b$. Selon le Lemme 3.1.2, nous considérons le cas où la valeur du reste relatif $r_Z(P) = ax - by - \mu$ aux deux points $A \equiv C_{i-1}$ et $B \equiv C_{j+1}$ est strictement plus grande que $a + b$. Nous ne détaillerons pas l'autre cas qui est similaire.

Prenons les notations suivantes : U est un point d'appui supérieur de M , Z' le translaté de Z par le vecteur $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et Z'' le translaté de Z par le vecteur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Enfin soient : U' le point $U + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, A'' le point $A + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et B'' le point $B + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. L'ensemble de ces notations sont regroupées sur la Figure 3.1.2. Les propriétés suivantes sont satisfaites : $A'' \in \overline{S}$ et $r_{Z'}(A'') = r_Z(A + (-1, 1)) = r_Z(A) - a - b \geq 1$, $B'' \in \overline{S}$ et $r_{Z'}(B'') = r_Z(B + (-1, 1)) = r_Z(B) - a - b \geq 1$, $U' \in S$ et $r_{Z'}(U') = 0$.

Les points A'' , U' et B'' ne sont pas colinéaires puisque A'' et B'' sont strictement inférieurs aux points de la droite d'appui supérieure de Z' passant par U' . Ils sont ordonnés par abscisses croissantes sur Z' . Tout cercle séparant les points intérieurs et extérieurs de $C_{i-1,j+1}$ a ainsi un rayon plus petit que celui du cercle circonscrit à A'' , U' et B'' puisque il doit passer en dessous de A'' et B'' et au-dessus de U' . \square

Les résultats précédents impliquent une borne inférieure sur la courbure locale d'une forme convexe contenant un segment maximal :

Lemme 3.1.4

Soit C le bord du discrétisé d'une forme convexe et $M = C_{i,j}$ un segment maximal de C . Toute courbe lisse (C^2) dont la discrétisation contient la séquence des points $C_{i-1,j+1}$ a localement un maximum de courbure plus grand que $\frac{1}{r}$ où r est le rayon du cercle séparant de rayon maximal.

Preuve:

Ce résultat vient directement du Lemme 3.1.3 et du fait que la courbe qui traverse trois points non colinéaires donnés et qui minimise l'extremum de courbure est le cercle circonscrit. \square

L'étude de configurations locales sous l'hypothèse de la convexité a déjà apporté des propriétés sur la courbure de la forme, montrons ici que cette hypothèse permet aussi d'obtenir une contrainte forte sur la position des points du bord de la forme.

Rappelons que si S est une forme convexe dont la discrétisation de Gauss est 4-connexe, alors cette discrétisation forme un polygone convexe discret (PCD). Considérons alors une arête sur ce PCD dont l'orientation appartienne à $]0, \frac{\pi}{4}[$ pour une orientation dans le sens anti-trigonométrique.

Les extrémités de cette arête sont des sommets du PCD, notés V_1 et V_2 sur la Figure 3.1.3. Soit P le point discret le plus proche de l'arête en dehors de la discrétisation de S . En fait P est le

translaté par $(-1, 1)$ de n'importe quel point d'appui inférieur du segment standard C_{V_1, V_2} (noté L sur la Figure 3.1.3). Soit un point sur le bord de la forme réelle et d'abscisse x_P , l'ordonnée de ce point est borné par celle de l'arête pour l'abscisse x_P et par celle de P d'après l'hypothèse de convexité sur S . Une illustration est proposée sur la Figure 3.1.3.

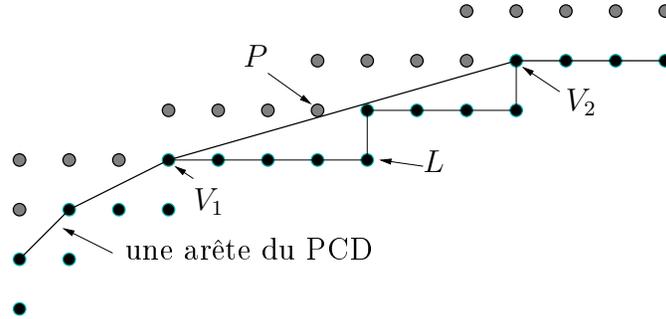


FIG. 3.1.3 – Une arête constituée d'un seul motif de pente $\frac{2}{7}$ sur une partie d'un polygone convexe discret. Le point P est le point le plus proche de l'arête $[V_1, V_2]$.

Nous choisissons V_1 pour origine du repère. Calculons la distance verticale ϵ_P entre P et l'arête à l'abscisse de P .

Si l'on suppose que la pente de cette arête est de complexité paire, i.e. $z_{2n} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$, alors les coordonnées de P sont $P = (q_{2n-1}, p_{2n-1})$, en vertu de Eq. (2.1.1).

$$\epsilon_P = p_{2n-1} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} q_{2n-1} = \frac{1}{q_{2n}}$$

Si la pente est de complexité impaire nous obtenons alors $P = (q_{2n+1} - q_{2n}, p_{2n+1} - p_{2n})$, ce qui amène :

$$\epsilon_P = p_{2n+1} - p_{2n} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} (q_{2n+1} - q_{2n}) = \frac{1}{q_{2n+1}}$$

Ces contraintes peuvent facilement être étendues sur toute l'arête. Soit P' l'intersection entre les droites (V_1, P) et la droite verticale d'abscisse x_{V_2} . Si un point de S était au dessus du segment euclidien $[P, P']$ alors P serait à l'intérieur de la discrétisation de Gauss de S par l'hypothèse de convexité. En conséquence, les points de S sont contraints comme illustré sur la Figure 3.1.4.

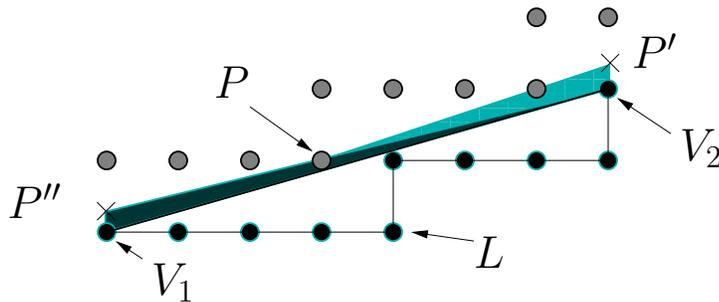


FIG. 3.1.4 – Deux contraintes locales exprimées sur l'arête d'un PCD pour la forme réelle convexe sous-jacente. Le bord de la forme sous-jacente se trouve nécessairement entre les parties pleines.

Paramétrons le bord de la forme sous-jacente par $(x, f(x))$ pour exprimer nos contraintes :

Pente de complexité paire		
$\forall x \in [x_{V_1}, x_P]$	$x \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq$	$f(x) \leq \frac{p_{2n}-p_{2n-1}}{q_{2n}-q_{2n-1}}x + \frac{1}{q_{2n}-q_{2n-1}}$
$\forall x \in [x_P, x_{V_2}]$	$x \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq$	$f(x) \leq x \frac{p_{2n}-1}{q_{2n-1}}$
Pente de complexité impaire		
$\forall x \in [x_{V_1}, x_P]$	$x \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \leq$	$f(x) \leq \frac{p_{2n}}{q_{2n}}x + \frac{1}{q_{2n}}$
$\forall x \in [x_P, x_{V_2}]$	$x \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \leq$	$f(x) \leq x \frac{p_{2n+1}-p_{2n}}{q_{2n+1}-q_{2n}}$

En conséquence nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.1.5

Soit S une forme convexe telle que $\text{Dig}G_h(S)$ est un PCD Γ passé une certaine résolution h . Considérons une arête $[V_i V_{i+1}]$ de Γ de pente $\frac{p_n}{q_n}$ dans le premier octant. Alors tout point sur le bord ∂S au dessus du segment euclidien $[V_i V_{i+1}]$ est à une distance verticale inférieure à $\frac{h}{q_{n-1}}$ de ce segment.

La proposition précédente sert en fait de base à la preuve de convergence d'un estimateur de position qui sera décrit au chapitre suivant. D'autre part nous voyons que les contraintes géométriques reliant la forme euclidienne sous-jacente et son discrétisé s'expriment à l'aide des paramètres introduits pour décrire les parties linéaires. Nous reviendrons sur l'étude de ces paramètres à la fin de ce chapitre. Avant cela nous étudierons plus en détail les relations entre les segments maximaux et les arêtes des polygones convexes discrets.

3.1.2 Segments sur polygones convexes discrets

Nous savons que la convexité discrète entretient des relations très proches avec les parties linéaires, notamment les segments maximaux. L'objet de cette sous section est d'étudier les différents types de segments maximaux que l'on peut rencontrer sur un PCD afin de mieux pouvoir caractériser les relations entre les arêtes d'un PCD et les segments maximaux. Nous commencerons par rappeler qu'une arête discrète est le chemin discret sur le bord de la forme discrète entre les deux sommets de l'arête considérée.

Proposition 3.1.6

Toute arête discrète d'un PCD est un motif ou la répétition du même motif. Autrement dit, les deux sommets d'une arête sont des points d'appui supérieurs de l'arête discrète.

Preuve:

Les points entre deux sommets consécutifs sur la courbe discrète sont toujours en dessous du segment euclidien reliant les deux sommets. Selon Kim (voir [E.K82]), $C_{V_i, V_{i+1}}$ est un segment discret. Ainsi la droite passant par V_i et V_{i+1} est la droite d'appui supérieure de $C_{V_i, V_{i+1}}$ les deux sommets sont des points d'appui supérieurs. \square

Les arêtes discrètes sont des motifs et leurs sommets sont des points d'appui supérieurs. Ainsi les sommets sont des points d'appui supérieurs mais jamais des points d'appui inférieurs des segments maximaux. Puisqu'une arête discrète est un segment standard, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 3.1.7

Un segment maximal ne peut pas être strictement inclus dans une arête discrète.

La conséquence de ce lemme est que les positions des segments maximaux sur une forme convexe ne sont pas quelconques et il convient de les étudier. En premier lieu il faut effectuer une séparation simple selon que le segment maximal a la même pente que l'une des arêtes qu'il contient ou non.

Définition 3.1.8

On appelle arête support, une arête discrète dont les deux sommets définissent les points d'appui supérieurs les plus à gauche et à droite d'un segment maximal. La pente de l'arête donne alors la pente d'un segment maximal qui la contient.

Définition 3.1.9

On appelle segment supporté par une arête, un segment maximal défini par son arête support.

Cette définition entraîne directement le lemme suivant, basé sur une observation simple :

Lemme 3.1.10

Une arête support définit un et un seul segment maximal : il est le seul à contenir cette arête et à avoir la même pente. Si un segment maximal contient deux points d'appui supérieurs ou plus, alors il existe une arête support reliant ses points d'appui supérieurs qui a la même pente.

Ainsi d'après le lemme précédent tous les segments maximaux contenant deux points d'appui supérieurs ou plus sont forcément liés à une arête support et la contiennent entièrement. Cet ensemble de segments maximaux sera noté segments en position *ULU* par la suite. La Figure 3.1.5 illustre une arête support et le segment maximal associé.

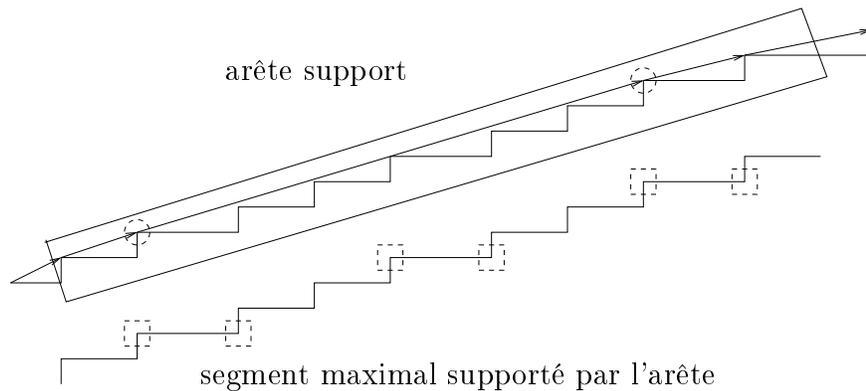


FIG. 3.1.5 – Une arête support et son segment maximal associé. Les sommets de l'arête sont entourés par un cercle en pointillé et les points d'appui du segment sont entourés par un carré en pointillé. Le segment maximal considéré admet trois points d'appui supérieurs et trois points d'appui inférieurs.

Cependant il reste un sous ensemble des segments maximaux qui n'est pas traité : celui des segments maximaux ayant exactement deux points d'appui inférieurs et un point d'appui supérieur. Cette classe de segments maximaux sera notée segments maximaux en position *LUL* par la suite. Rajoutons que si un segment maximal contient trois points d'appui inférieurs alors il contient deux points d'appui supérieurs et est lié à une arête support.

Il nous reste à caractériser le type des segments maximaux n'étant pas de type *ULU* :

Définition 3.1.11

On appelle segment supporté par un sommet, un segment maximal dont la pente est définie seulement par ses deux points d'appui inférieurs. Un tel segment contient un unique point d'appui supérieur, qui est un sommet du PCD.

Ces segments maximaux contiennent en fait un seul motif-renversé. Notons en plus que leur point d'appui supérieur est aussi un sommet du PCD, comme illustré sur la Figure 3.1.6. Puisque l'on ne peut associer qu'un seul segment maximal à une arête support il convient de se demander combien de segments maximaux supportés par un sommet l'on peut associer à un sommet. Pour répondre à cette question, observons d'abord que certaines configurations ne sont pas possibles pour des segments maximaux de types *LUL* supportés par un même sommet :

Lemme 3.1.12

Soient deux segments maximaux distincts supportés par un même sommet. On note le premier

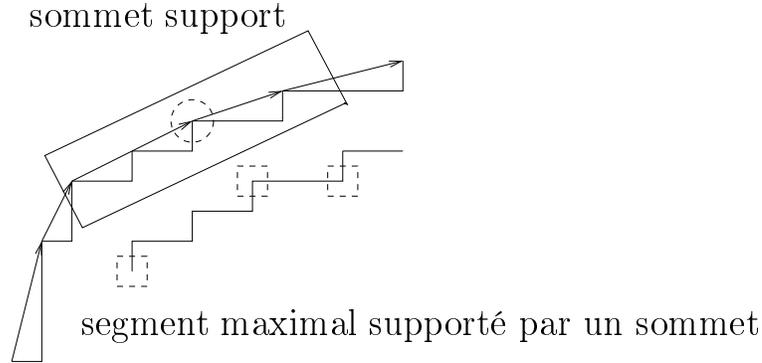


FIG. 3.1.6 – Un segment maximal supporté par un sommet sur une portion d'un PCD. Le sommet support est entouré par un cercle en pointillé et les points d'appui du segment maximal associé sont entourés par un carré en pointillé.

segment $MS = C_{b,f}$ avec L_1 et L_2 ses points d'appui inférieurs et $MS' = C_{b',f'}$ avec L'_1 et L'_2 ses points d'appui inférieurs. L'ordre suivant sur les points d'appui inférieurs ne peut être satisfait :

$$L'_1 \leq L_1 < L_2 \leq L'_2$$

Preuve:

Si l'ordre des points d'appui dans l'inégalité précédente est respectée alors les extrémités de MS ne peuvent être que dans quatre positions vis-à-vis de L'_1 et de L'_2 . Montrons par contradiction qu'aucune de ces positions n'est possible sous la condition que l'inégalité précédente est vraie :

- MS ne peut être inclus dans $C_{L'_1, L'_2}$ puisque $C_{L'_1, L'_2}$ est un segment standard.
- Si MS s'étend des deux côtés de $C_{L'_1, L'_2}$ alors l'inégalité précédente n'a pas lieu puisque MS et MS' seraient identiques. D'où contradiction.
- Considérons maintenant que MS a son premier point avant L'_1 et son dernier point avant L'_2 , nous obtenons aussi une contradiction puisque $F(L_1) = f$ (en vertu du Lemme 2.4.4) et que $F(L_1) \geq L'_2$ puisque C_{L_1, L'_2} est un segment standard.
- De même si le premier point de MS est après L'_1 et si son dernier point est après L'_2 , alors $B(L_2) = b$ (en vertu du Lemme 2.4.4) et $B(L_2) \leq L'_1$ puisque $C_{L'_1, L_2}$ est un segment standard ; ce qui est une contradiction.

Ceci conclut la preuve. □

Nous étudierons le nombre de segments maximaux de type LUL supportés par un même sommet selon la parité de leurs pentes :

Proposition 3.1.13

Il y a au plus un segment supporté par un sommet de pente paire par sommet sur un PCD.

Preuve:

La preuve est faite par contradiction : nous supposons qu'il existe deux segments maximaux distincts supportés par le même sommet de pente paire et montrerons une contradiction sur la position de leurs points d'appui inférieurs. Soit MS le premier segment maximal de pente z_{2i} avec L_1, L_2 ses points d'appui inférieurs (gauche et droit) et U_2 son point d'appui supérieur. Notons MS' le deuxième segment maximal de pente z'_{2j} avec L'_1, L'_2 ses points d'appui inférieurs et U_2 son point d'appui supérieur (ils partagent le même sommet qui est point d'appui supérieur). Le point d'appui supérieur est noté U_2 pour faciliter les relations d'inclusions issues de la Proposition 2.3.2.

Si $L_1 = L'_1$, alors MS et MS' sont identiques par caractérisation des segments maximaux (grâce au Lemme 2.4.4).

Considérons donc maintenant que $L'_1 < L_1$, c'est-à-dire que le point d'appui inférieur de MS' est avant celui de MS sur le contour discret. Il est clair que dans ce cas $C_{L_1, U_2} \prec_s C_{L'_1, U_2}$. Ainsi $C_{L'_1, U_2} = l' C_{L_1, U_2}$ avec l' un facteur gauche strict de $C_{L'_1, U_2}$. À partir de la Proposition 2.3.2, C_{L_1, U_2} a $E(z_{2i-1})^{u_{2i-1}}$ comme facteur droit. Nous pouvons donc écrire que $C_{L'_1, U_2} = l' l E(z_{2i-1})^{u_{2i-1}}$ avec l un facteur gauche strict de C_{L_1, U_2} , et que $C_{L'_1, U_2}$ contient le motif $E(z_{2i-1})$. Puisque $C_{L'_1, U_2}$ est un facteur droit du motif $E(z'_{2j})$, $E(z_{2i-1})$ est alors un facteur droit strict de $E(z'_{2j})$.

Donc si $z_{2i} = [0, u_1, \dots, u_{2i-1}, u_{2i}]$, en vertu de la Proposition 2.3.3 la pente z'_{2j} a z_{2i-2} comme $2i - 2$ -ième convergent avec $u'_{2i-1} \geq u_{2i-1}$. D'où $z'_{2j} = [0, u_1, \dots, u_{2i-2}, u'_{2i-1}, u'_{2i}, \dots, u'_{2j}]$. Selon la Proposition 2.3.2 (en remplaçant $U_1 L_1$ par $U_2 L_2$ dans son énoncé) nous obtenons $\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2) = q_{2i-1} + p_{2i-1} = u_{2i-1}(q_{2i-2} + p_{2i-2}) + q_{2i-3} + p_{2i-3}$ et $\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}'_2) = q'_{2j-1} + p'_{2j-1}$.

D'après la formulation de $\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}'_2)$ et avec $u'_{2i-1} \geq u_{2i-1}$, nous obtenons que $\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}'_2) \geq \mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2)$. En conséquence nous obtenons l'inégalité : $L'_1 < L_1 < U_2 < L_2 \leq L'_2$. Le Lemme 3.1.12 permet alors d'obtenir une contradiction. Ceci termine la preuve. \square

De façon symétrique, la même chose est vraie pour les segments supportés par un sommet de pente impaire :

Proposition 3.1.14

Il y a au plus un segment supporté par un sommet de pente impaire par sommet sur un PCD.

Ces dernières propriétés sont en fait très importantes et marquent une subtilité : puisque tout segment discret peut être étendu en un segment maximal, toute arête est dans au moins un segment maximal. La réciproque est établie par la proposition suivante :

Proposition 3.1.15

Un segment maximal en position LUL sur un PCD contient nécessairement une arête. Si la complexité de la pente est paire alors cette arête est celle à gauche du sommet. Si la complexité de la pente est impaire alors cette arête est celle à droite du sommet.

Preuve:

Nous considérerons le cas où la pente du segment maximal est de complexité paire, égale à $2n$. Le cas impair est symétrique et ne sera pas détaillé ici.

Le segment maximal en position LUL sera noté MS , son chemin 4-connexe associé sera noté $C_{b,f}$, et soit U son unique point d'appui supérieur, qui est aussi un sommet du PCD. Sa pente z_{2n} est définie par le vecteur $\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2$, L_1 et L_2 étant les deux seuls points d'appuis inférieurs de MS , à gauche et à droite. Les points de ce segment maximal sont ordonnés comme suit : $b \leq L_1 < U < L_2 \leq f$.

Dans la suite nous observerons l'arête située à gauche du point U , son 4-chemin associé est $C_{V,U}$ où V est l'autre sommet de l'arête. Nous montrerons que cette arête est nécessairement contenue dans le segment maximal considéré. Pour ce faire nous raisonnerons par contradiction en supposant que $C_{L_1, U}$ est un facteur droit de $C_{V, U}$. Nous énumérerons finalement les situations où $C_{V, U}$ ne modifie ni la pente, ni le type du segment MS autrement dit les seuls cas pouvant être réalisés sur un PCD.

Notons la pente de l'arête $C_{V, U}$ par z'_α , la valeur de α sera discutée par la suite. Par construction, nous savons que $C_{L_1, U} \prec_s E(z_{2n-1})^{u_{2n}}$ et que $E(z_{2n-1})^{u_{2n-1}} \prec_s C_{L_1, U}$ par la Proposition 2.3.2. Remarquons que $E(z_{2n-1}) \prec_s C_{V, U}$, qui implique que $z_{2n-2} = z'_{2n-2}$ et $u'_{2n-1} \geq u_{2n-1}$ par la Proposition 2.3.3. Ceci implique bien sûr que $\alpha \geq 2n - 1$. Nous commencerons par montrer que $z_{2n-1} = z'_{2n-1}$.

Supposons d'abord que $u'_{2n-1} > u_{2n-1}$ et considérons deux cas en fonction de $u_{2n} - 1$:

– Supposons que $u_{2n} - 1$ vaille un :

Nous calculerons la position d'un point particulier selon deux méthodes différentes pour arriver à une contradiction. La première par un déplacement sur le segment maximal et la deuxième par un déplacement sur l'arête.

Le point L_1 est atteint après $(u_{2n-1} + 1)(q_{2n-2} + p_{2n-2}) + q_{2n-3} + p_{2n-3}$ pas sur le contour vers la gauche à partir de U puisqu'en vertu de la Proposition 2.3.2 :

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{U} = \underbrace{(u_{2n-1} - 1)}_1 \underbrace{(q_{2n-1}, p_{2n-1})}_{u_{2n-1}(q_{2n-2}, p_{2n-2}) + (q_{2n-3}, p_{2n-3})} + (q_{2n-2}, p_{2n-2}) + (-1, 1)$$

Cependant si l'on considère l'arête $C_{V,U}$, et que $u'_{2n-1} > u_{2n-1}$, nous avons $E(z'_{2n-1}) \prec_s E(z'_\alpha)$ et $E(z'_{2n-1}) = E(z_{2n-2})^{u'_{2n-1} - u_{2n-1}} E(z_{2n-2})^{u_{2n-1}} E(z_{2n-3})$. Donc en nous déplaçant de $(u_{2n-1} + 1)(q_{2n-2} + p_{2n-2}) + q_{2n-3} + p_{2n-3}$ pas vers la gauche sur le suffixe du mot précédent nous obtiendrions :

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{U} = (u_{2n-1} + 1)(q_{2n-2}, p_{2n-2}) + (q_{2n-3}, p_{2n-3})$$

La conséquence directe étant que nous aurions deux positions différentes pour le point L_1 , ce qui est une contradiction évidente.

– Supposons que $u_{2n} - 1$ soit plus grand que un :

L'arête discrète $C_{V,U}$ admet alors au moins deux motifs $E(z_{2n-1})$ en facteur droit, ce qui permet d'observer que :

$$E(z'_{2n-1}) = \underbrace{E(z_{2n-2})^{u'_{2n-1} - u_{2n-1}}}_{\prec_s E(z_{2n-1})} \underbrace{E(z_{2n-2})^{u_{2n-1}} E(z_{2n-3})}_{E(z_{2n-1})}$$

Et l'on obtient alors $E(z_{2n-2}) \prec_s E(z_{2n-1})$, ce cas là n'est pas réalisable puisque le reste du point de coordonnées $(-q_{2n-2}, -p_{2n-2})$ pour la droite standard $D_{p_{2n-1}, q_{2n-1}, 0}$ vaut -1 .

Il est donc clair que $u'_{2n-1} = u_{2n-1}$ et que par conséquent $z'_{2n-1} = z_{2n-1}$. Supposons maintenant que $C_{L_1, U} \prec_s C_{V, U}$ et montrons que nous aboutissons à une contradiction dans tous les cas et ce pour toutes les valeurs de α :

1) Supposons dans un premier temps que α vaille $2n - 1$ et rappelons que l'arête $C_{V,U}$ contient au moins $u_{2n} - 1$ motifs $E(z_{2n-1})$ en facteur droit. Si elle en contient exactement $u_{2n} - 1$ alors elle est incluse dans MS ce qui contredit notre hypothèse. Considérons donc maintenant que ces motifs soient au nombre de m et que m soit strictement supérieur à $u_{2n} - 1$:

– Si $m = u_{2n}$, l'écriture de $E(z_{2n}) = E(z_{2n-2})E(z_{2n-1})^{u_{2n}}$ et la Propriété 2.3.2 indiquent que le point d'appui inférieur L_1 se trouve à l'intérieur du premier motif $E(z_{2n-1})$ en lisant de gauche à droite, l'arête $C_{V,U}$ serait alors incluse dans MS avec $b \leq V < L_1$.

– Si $m \geq u_{2n} + 1$ alors la pente de MS serait égale à $[0, u_1, \dots, u_{2n-1}, m]$. En effet, le chemin 4-connexe $E([0, u_1, \dots, u_{2n-1}, m])$ est égal à $E(z_{2n-2})E(z_{2n-1})^m$ et là encore le point d'appui inférieur de ce motif est dans le premier motif $E(z_{2n-1})$. L'écriture du motif renversé de même pente serait un facteur droit de C_{V, L_2} et MS serait de pente $[0, u_1, \dots, u_{2n-1}, m]$ en tant que segment standard le plus long vers la gauche en partant de L_2 . Ceci soulève bien sûr une contradiction.

2) Considérons maintenant que α soit égal à $2n$, $E(z'_{2n}) = E(z_{2n-2})E(z_{2n-1})^{u'_{2n}}$ avec $u'_{2n} \geq u_{2n} - 1$.

– Si $u'_{2n} = u_{2n} - 1$, on obtient deux positions différentes pour L_1 .

– Si $u'_{2n} = u_{2n}$, alors V devient un point d'appui supérieur pour MS , ce qui lève une contradiction, puisque l'arête $C_{V,U}$ serait un motif de pente z_{2n} .

– Si $u'_{2n} > u_{2n}$, alors MS serait de pente $[0, u_1, \dots, u_{2n-1}, u'_{2n}]$ avec V qui serait un point d'appui supérieur pour MS , ce qui lève aussi une contradiction puisque la pente de MS changerait.

Bien sûr si l'arête $C_{V,U}$ n'est faite que de répétitions de motifs $E(z'_{2n})$, les remarques précédentes restent vraies.

3) Envisageons maintenant que $\alpha = 2n + 1$ et remarquons que :

$$E(z'_{2n+1}) = E(z'_{2n})^{u'_{2n+1} - 1} \underbrace{E(z_{2n-2})E(z_{2n-1})^{u'_{2n}}}_{E(z'_{2n})} E(z_{2n-1})$$

On observe tout de suite les $u'_{2n} + 1$ motifs $E(z_{2n-1})$ en facteur droit qui impliquent :

- un nouveau point d'appui supérieur si $u'_{2n} = u_{2n} - 1$
- un changement de pente si $u'_{2n} > u_{2n}$.

Ici encore les répétitions du motif $E(z'_{2n+1})$ ne changent pas les contradictions relevées pour les différentes valeurs de u'_{2n} .

- 4) Considérons le cas $\alpha > 2n + 1$, il suffit de voir que $E(z'_{2n+1})$ est un suffixe de $E(z'_\alpha)$ et les remarques de 3) concluent.

Il n'est donc pas possible que $C_{b,U}$ soit inclus dans $C_{V,U}$. Les cas où l'arête $C_{V,U}$ n'induit pas de changement de pente ou de nouveau point d'appui supérieur se réduisent aux cas où $C_{V,U}$ est incluse dans MS :

- $\alpha = 2n - 1$ et $C_{V,U} = E(z_{2n-1})^{u_{2n}-1}$,
- $\alpha = 2n - 1$ et $C_{V,U} = E(z_{2n-1})^{u_{2n}}$.

Ceci achève la preuve. □

Cette dernière proposition permet donc d'affirmer que tout segment maximal contient une arête du PCD. Nous pouvons même aller plus loin en identifiant la pente des segments maximaux avec celle des arêtes qu'il contiennent :

Proposition 3.1.16

Sur le bord d'un CDP, tout segment maximal dont la pente est notée $\frac{p_n}{q_n}$, contient une arête ayant la même pente ou une arête ayant son $n - 1$ convergent comme pente.

Preuve:

Le cas des segments maximaux en position ULU est direct, ceux en position LUL est donné par la preuve de la Proposition 3.1.15. □

Bien que nous ayons identifié les types possibles des segments maximaux sur un PCD, nous ne sommes pas en mesure d'expliquer les successions des types des segments maximaux et leur caractérisations. Par exemple on sait construire un PCD constitué uniquement de segments maximaux en position LUL mais on ne connaît pas les propriétés ou une caractérisation de ce type de PCD.³ De même pour les PCD constitués uniquement de segments maximaux en position ULU .⁴ Néanmoins nous pouvons établir des relations de nombre et de longueurs entre l'ensemble des segments maximaux et l'ensemble des arêtes d'un PCD comme nous allons le montrer dans la section suivante.

3.2 Segments maximaux et PCD

Cette section a pour but d'établir des relations entre l'ensemble des arêtes et l'ensemble des segments maximaux. Dans un premier temps nous montrerons les relations entre le nombre de ces arêtes et le nombre des segments maximaux, puis dans un deuxième temps nous exhiberons les relations locales de longueurs afin de borner la somme des longueurs des segments maximaux. Enfin, ces relations établies, nous pourrons obtenir la longueur moyenne des segments maximaux, et ce exprimée au moyen des paramètres décrivant les PCD. Notons que lorsque l'on parle ici de longueur, nous faisons ici référence à la longueur mesurée avec la norme "1" de Minkowski. Pour un segment discret sa norme vaut le nombre de point le constituant moins un. De même la notion de périmètre n'est ici que le nombre de points constituant le bord de la courbe discrète.

³Un carré de cotés parallèles aux axes n'est constitué que de segments maximaux en position LUL .

⁴Le PCD représenté sur la Figure 3.2.2 est uniquement constitué de segments maximaux en position ULU .

3.2.1 Relations cardinales

Nous avons vu que tout segment maximal supporté par une arête est associé à une arête du PCD et que à chaque sommet du PCD l'on peut associer au maximum deux segments maximaux en position LUL . Ceci permet d'obtenir la borne supérieure suivante sur le nombre de segments maximaux :

Théorème 3.2.1

Si Γ est un PCD, alors le nombre de segments maximaux sur $\Delta(\Gamma)$ est majoré par trois fois le nombre d'arêtes de Γ .

Preuve:

Considérons les quantités suivantes de segments maximaux :

- n_{ULU} est le nombre de segments maximaux dont la pente est donnée par leurs points d'appui supérieurs. Chacun d'eux est lié à une arête support.
- n_{LUL}^{pair} est le nombre de segments maximaux de pente paire étant supporté par un sommet.
- n_{LUL}^{impair} est le nombre de segments maximaux de pente impaire étant supporté par un sommet.

Il est clair que l'équation suivante est satisfaite : $n_{MS}(\Gamma) = n_{ULU} + n_{LUL}^{impair} + n_{LUL}^{pair}$. De plus, en notant $n_e(\Gamma)$ le nombre d'arêtes du PCD, nous avons pour chaque quantité :

- $n_{ULU} \leq n_e(\Gamma)$.
- $n_{LUL}^{pair} \leq n_e(\Gamma)$ en vertu de la Proposition 3.1.13.
- $n_{LUL}^{impair} \leq n_e(\Gamma)$ en vertu de la Proposition 3.1.14.

En conséquence :

$$n_{MS} \leq 3n_e(\Gamma).$$

□

Maintenant que nous avons exhibé une borne supérieure il faut pouvoir exprimer la borne inférieure. Cette borne est liée à la complexité des pentes des segments maximaux et plus généralement à la longueur m du côté du carré contenant le PCD. Plus spécifiquement il faut pouvoir majorer le nombre d'arêtes contenues dans un segment maximal en fonction de la profondeur de sa pente.

Nous procéderons en trois temps :

- Tout d'abord le Lemme 3.2.2 examinera sous quelles conditions un motif peut être étendu par des motifs de complexité inférieure de façon à ne pas former un motif mais être reconnu comme segment standard.
- Nous pourrons alors déterminer combien d'arêtes (de motifs en fait) peuvent être absorbées par un segment maximal, premièrement dans le cas des segments de type ULU puis ceux de type LUL , ceci constituera le Théorème 3.2.3.
- En corollaire, nous maximiserons le nombre d'arêtes absorbées vis-à-vis de la profondeur de la pente et de la longueur du segment maximal. Ceci constituera le Corollaire 3.2.4.

En combinant ces résultats nous pourrons dériver une borne inférieure pour le nombre de segments maximaux en fonction du nombre d'arêtes du PCD et du logarithme de la complexité maximale de ses arêtes exprimé à l'aide de la taille de la grille contenant le PCD.

Lemme 3.2.2

On note P_n un motif de profondeur n dont le 4-chemin en code de Freeman est $E(z_n)$, sa profondeur est soit paire ($n = 2i$) soit impaire ($n = 2i + 1$). L'on peut construire des facteurs gauches et droits stricts (notés respectivement R et L) de P_n tels que :

- (i) RP_n , P_nL et RP_nL soient des segments standards de pente z_n ,
- (ii) R et L soient des motifs ou des répétitions d'un même motif,
- (iii) RP_n , P_nL et RP_nL ne soient pas des motifs,
- (iv) la pente de R soit plus grande que celle de P_n et la pente de P_n soit plus grande que celle de L ,

(v) la profondeur maximale de la pente de R et de L dépende de la parité de n :

Profondeur de P_n	profondeur maximale de R	profondeur maximale de L
$2i + 1$	$2i + 1$	$2i$
$2i$	$2i - 1$	$2i$

leurs 4-chemins écrits en code de Freeman soient tels que ($r > 0, l > 0$) :

Codes de Freeman de P_n	Codes de Freeman de R	Codes de Freeman L
$E(z_{2i+1})$	$E(z_{2i})^{u_{2i+1}-r}E(z_{2i-1})$	$E(z_{2i})^{u_{2i+1}-l}$
$E(z_{2i})$	$E(z_{2i-1})^{u_{2i}-r}$	$E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^{u_{2i}-l}$

(vi) La profondeur des facteurs obtenus en retirant R ou L à P_n dépende de la parité de n :

Profondeur de P_n	profondeur $P_n \setminus R$	profondeur de $P_n \setminus L$
$2i + 1$	$2i$	$2i + 1$
$2i$	$2i$	$2i - 1$

leurs 4-chemin écrits en codes de Freeman soient tels que ($r > 0, l > 0$) :

Codes de Freeman de P_n	codes de Freeman de $P_n \setminus R$	codes de Freeman de $P_n \setminus L$
$E(z_{2i+1})$	$E(z_{2i})^r$	$E(z_{2i})^l E(z_{2i-1})$
$E(z_{2i})$	$E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^r$	$E(z_{2i-1})^l$

Preuve:

Puisque R et L sont des facteurs droits et gauches de P_n , leur 4-chemin écrit en code de Freeman est compatible avec celui de $E(z_n)$, donnant la même droite de caractéristiques minimales pour RP_n , P_nL et RP_nL et donc des segments standards de même pente z_n . Ceci conclut (i).

Nous choisissons R et L parmi les facteurs stricts de $E(z_n)$ étant des motifs ou des répétitions d'un même motif suivant la description des Équations (2.1.6) et (2.1.5). Ceci conclut (ii).

Décrivons ces facteurs en fonction de la parité de n :

– Cas où $n = 2i + 1$ est impair :

de l'Eq. (2.1.6) nous obtenons : $R = E(z_{2i})^{u_{2i+1}-r}E(z_{2i-1})$ et $L = E(z_{2i})^{u_{2i+1}-l}$ avec $r > 0$ et $l > 0$. Si R et L sont des motifs plus longs, ils ne sont plus des facteurs stricts de P_{2i+1} . Notons que R est un motif de profondeur $2i + 1$ et que L est la répétition du motif $E(z_{2i})$, de profondeur $2i$. Ceci conclut (v) pour le cas impair. La pente de R vaut $z'_{2i+1} = [0, u_1, \dots, u_{2i}, u_{2i+1} - r] = \frac{p'_{2i+1}}{q'_{2i+1}}$. De l'Eq. (2.1.2) et de l'Eq. (2.1.3) nous obtenons $\frac{p'_{2i+1}}{q'_{2i+1}} = \frac{p'_{2i+1} + rp_{2i}}{q'_{2i+1} + rq_{2i}}$. Le signe de $z'_{2i+1} - z_{2i+1}$ est celui de $p'_{2i+1}q_{2i} - q'_{2i+1}p_{2i}$, et est positif (voir l'Eq. (2.1.1)). Ainsi la pente de R est plus grande que celle P_{2i+1} . Le même raisonnement appliqué à la différence $z_{2i+1} - z_{2i}$ implique que la pente de P_{2i+1} est plus grande de celle de L , et (iv) est satisfaite dans le cas impair.

– Cas où $n = 2i$ est pair :

de l'Eq. (2.1.5) nous obtenons : $R = E(z_{2i-1})^{u_{2i}-r}$ et $L = E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^{u_{2i}-l}$. Si R et L sont des motifs plus longs, ils ne sont plus facteurs stricts de P_{2i} . Il est clair que R a une profondeur égale à $2i - 1$ et que celle de L vaut $2i$. Ceci conclut (v) dans le cas pair. Le pente de L vaut $z'_{2i} = [0, u_1, \dots, u_{2i-1}, u_{2i} - l] = \frac{p'_{2i}}{q'_{2i}}$. De l'Eq. (2.1.2) et de l'Eq. (2.1.3) nous obtenons que $\frac{p'_{2i}}{q'_{2i}} = \frac{p'_{2i} + lp_{2i-1}}{q'_{2i} + lq_{2i-1}}$. Le signe de la différence $z_{2i} - z'_{2i}$ est celui de $q'_{2i}p_{2i-1} - p'_{2i}q_{2i-1}$, et est positif (voir Eq. (2.1.1)). Ainsi la pente de P_n est plus grande que celle de L . Le même raisonnement sur $z_{2i-1} - z_{2i}$ implique que la pente de R est plus grande que celle de P_n et (iv) est satisfaite dans le cas pair.

À partir des résultats précédents, de l'Eq. (2.1.5) et de l'Eq. (2.1.6) il est clair que RP_n , P_nL et RP_nL ne sont pas des motifs, ce qui conclut (iii).

Si n est impair alors le facteur obtenu en soustrayant R à P_{2i+1} s'écrit comme $E(z_{2i})^r$ et en retirant L à P_{2i+1} nous obtenons $E(z_{2i})^l E(z_{2i-1})$. Pour le cas pair le facteur obtenu en retirant R à P_{2i} s'écrit comme $E(z_{2i-2})E(z_{2i-1})^r$ et en retirant L à P_{2i} nous obtenons $E(z_{2i-1})^l$. Ainsi (vi) est satisfait. \square

Le Théorème 3.2.3 montre que le nombre maximal d'arêtes que peut contenir un segment maximal dépend linéairement de la profondeur de sa pente.

Théorème 3.2.3

Les propositions suivantes sont satisfaites sur un PCD :

1. *Soit E une arête support dont la profondeur de la pente est n , $n \geq 2$, alors le segment maximal associé à E contient au plus n arêtes du PCD de chaque côté de E .*
2. *Tout segment maximal supporté par un sommet dont la pente est de profondeur n contient au plus $2n$ arêtes.*

Nous démontrerons ici la preuve concernant les segments maximaux supporté par une arête, la deuxième preuve suit un raisonnement similaire et peut être consultée dans [FdV05].

Preuve:

Les arêtes discrètes que nous construirons de part et d'autre de E seront notées comme suit :

- $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ à gauche de E ,
- $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ à droite de E .

Ces arêtes sont telles que $R_n \dots R_i \dots R_1 E L_1 \dots L_j \dots L_n$ soit un segment standard de pente $z_n = a/b$ et ne contienne pas d'autres points d'appui supérieurs que ceux situés sur E . E peut être la répétition du motif $E(z_n)$.

Premièrement notons que $R_n \dots R_i \dots R_1$ (resp. $L_1 \dots L_j \dots L_n$) doit être un facteur strict droit (resp. gauche) de $E(z_n)$ pour que $R_n \dots R_i \dots R_1 E$ (resp. $E L_1 \dots L_j \dots L_n$) soit un segment standard de même pente que $E(z_n)$.

De plus R_i est un facteur strict droit de $E(z_n)$ privé du facteur droit $R_{i-1} \dots R_1$ et L_i est un facteur strict gauche $E(z_n)$ privé du facteur gauche $L_1 \dots L_{i-1}$.

La Proposition 3.1.6 indique que les arêtes d'un PCD sont des motifs ou des répétitions d'un même motif. Par conséquent les arêtes $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont nécessairement des motifs ou des répétitions d'un même motif. Des Équations (2.1.6) et (2.1.5) deux arêtes consécutives ayant la même profondeur de pente ne peuvent former un facteur strict gauche ou strict droit d'un motif de même profondeur. Ceci implique que les profondeurs de $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et de $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont décroissantes. Ajoutons encore que pour satisfaire la convexité discrète, la monotonie des pentes doit être stricte de R_n jusqu'à L_n , ce qui implique que deux arêtes consécutives de même profondeur doivent être de pentes différentes.

Construisons maintenant les $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ lorsque n est impair ; nous posons $n = 2i + 1$. Du Lemme 3.2.2 (v), R_1 a une profondeur égale à $2i + 1$ et R_2 est un facteur droit strict de $E(z_n)$ privé de son facteur droit R_1 qui est par le Lemme 3.2.2 (vi) un motif de profondeur $2i$. En appliquant encore le Lemme 3.2.2(v) nous obtenons que R_2 a une profondeur égale à $2i - 1$. La décroissance des complexités nous permet de ne considérer que la partie droite de $E(z_n) \setminus R_1 R_2$ qui est de profondeur au plus $2i - 1$, c'est-à-dire $E(z_{2i-1})^{r_2}$. Nous pouvons maintenant construire R_3 et R_4 en utilisant le Lemme 3.2.2 sur $E(z_{2i-1})$. En appliquant récursivement le même raisonnement nous obtenons les arêtes comme présenté sur la Table 3.2.1. Le Lemme 3.2.2(iv) implique aussi la décroissance des pentes pour satisfaire la convexité digitale.

Les constructions pour les trois autres cas sont données dans les Tables 3.2.1 et 3.2.2 et suivent le même raisonnement. Pour pouvoir obtenir une décomposition totale chaque $(u_k)_{1 \leq n}$ doit être supérieur ou égal à deux 2. Si cette condition n'est pas remplie pour certains k , alors les arêtes associées (c'est-à-dire les facteurs contenant $u_k - r_j$ ou $u_k - l_j$ comme facteur de répétition de certains motifs) ne sont pas dans la décomposition. La Figure 3.2.1 présente deux cas de décomposition pour un segment maximal en position ULU . Ceci conclut la preuve. \square

Le corollaire suivant est basé sur la preuve du Théorème 3.2.3 en prenant le pire cas. Un résultat similaire relié à la programmation linéaire avec des entiers peut être trouvé dans [She81]. Ce résultat peut aussi être obtenu en considérant les droites standards comme l'intersection de deux polytopes de knapsack (voir [HL83]).

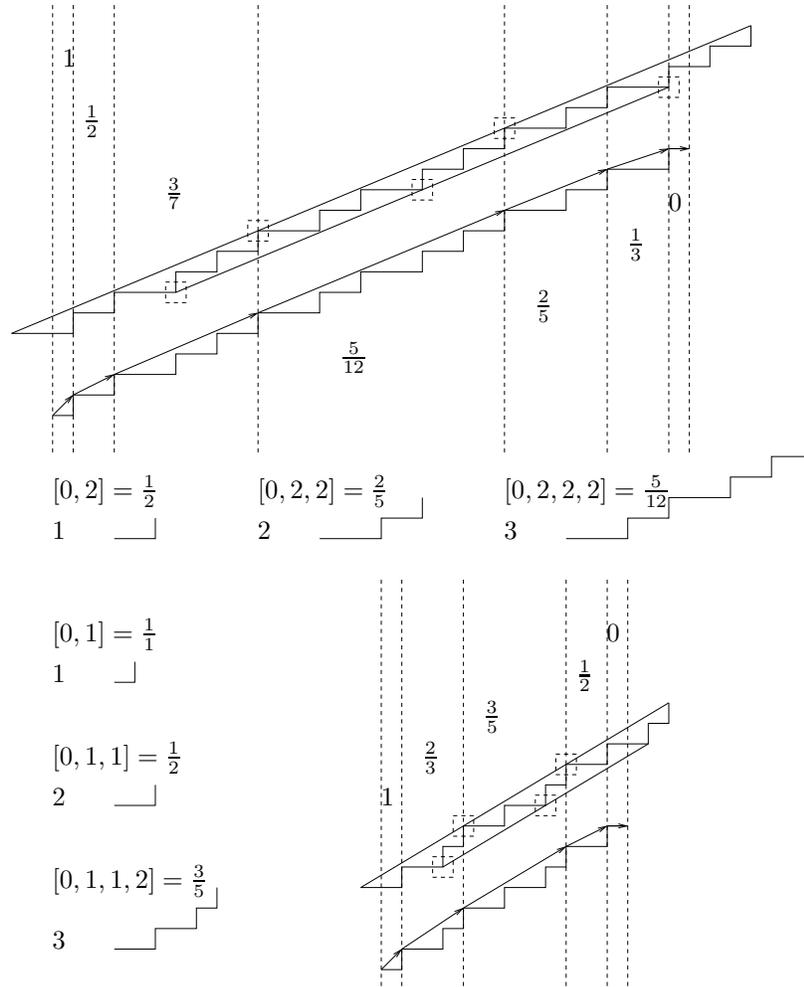


FIG. 3.2.1 – Deux exemples de construction où un segment maximal en position ULU absorbe le plus d’arêtes possible. Les points d’appui sont entourés par un carré en pointillé. On remarquera que dans le cas de la pente $[0, 1, 1, 2]$ (figure du bas) le segment maximal ne peut absorber que cinq arêtes.

Corollaire 3.2.4

Le motif le plus court d’une arête support pour laquelle le segment maximal associé peut contenir $2n + 1$ arêtes discrètes est $E(z_n)$ où z_n est le n -ième convergent de $[0, 2, \dots, 2, \dots]$. Si le PCD est contenu dans une grille de taille $m \times m$, alors le nombre maximal d’arêtes discrètes incluses dans un segment maximal est majoré par :

$$2 \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})}$$

Puisque la profondeur de l’arête donnant le cas limite est majorée par :

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

Preuve:

Le Théorème 3.2.3 indique que les segments maximaux peuvent contenir au maximum $2n + 1$ arêtes

TAB. 3.2.1 – Constructions des $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour $n = 2i + 1$.

Facteurs	Codes de Freeman	Profondeur
R_1	$E(z_{2i})^{u_{2i+1}-r_1} E(z_{2i-1})$	$2i + 1$
R_2	$E(z_{2i-1})^{u_{2i}-r_2}$	$2i - 1$
R_3	$E(z_{2i-2})^{u_{2i-1}-r_3} E(z_{2i-3})$	$2i - 1$
R_4	$E(z_{2i-3})^{u_{2i-2}-r_4}$	$2i - 3$
\vdots	\vdots	\vdots
R_{2j}	$E(z_{2i+1-2j})^{u_{2i+2-2j}-r_{2j}}$	$2i + 1 - 2j$
R_{2j+1}	$E(z_{2i-2j})^{u_{2i+1-2j}-r_{2j+1}} E(z_{2i-1-2j})$	$2i + 1 - 2j$
\vdots	\vdots	\vdots
R_{2i+1}	$0^{u_1-r_{2i+1}} 1$	1

Facteur	Codes de Freeman	Profondeur
L_1	$E(z_{2i})^{u_{2i+1}-l_1}$	$2i$
L_2	$E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}-l_2}$	$2i$
L_3	$E(z_{2i-2})^{u_{2i-1}-l_3}$	$2i - 2$
L_4	$E(z_{2i-4}) E(z_{2i-3})^{u_{2i-2}-l_4}$	$2i - 2$
\vdots	\vdots	\vdots
L_{2j}	$E(z_{2i-2j}) E(z_{2i+1-2j})^{u_{2i+2-2j}-l_{2j}}$	$2i + 2 - 2j$
L_{2j+1}	$E(z_{2i-2j})^{u_{2i+1-2j}-l_{2j+1}}$	$2i - 2j$
\vdots	\vdots	\vdots
L_{2i+1}	$0^{u_1-l_{2i+1}}$	0

discrètes et que ce cas ne se produit que pour les segments maximaux en position ULU . Cherchons maintenant le motif le plus court possible pour l'arête support d'un tel segment. Pour obtenir la décomposition complète, si l'on note $z_n = [0, u_1, \dots, u_n]$ la pente du motif de l'arête, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il est nécessaire que $u_i \geq 2$. La longueur de chaque motif, $\mathcal{L}^1(E(z_n))$, peut être calculée en utilisant les Équations (2.1.2) et (2.1.3) et peut être exprimée comme une fonction de u_1, \dots, u_n . De plus l'on peut observer que $\frac{\partial \mathcal{L}^1(E(z_n))}{\partial u_i} \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci implique que le motif le plus court pour une arête support dont le segment maximal satisfait toute la décomposition est telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ l'on ait $u_i = 2$ et que $u_0 = 0$. Cette décomposition est illustrée sur la partie supérieure de la Figure 3.2.1 pour l'ordre trois.

D'un point de vue asymptotique, le nombre $L = [0, 2, \dots, 2, \dots]^5$ est un nombre quadratique égal à $-1 + \sqrt{2}$. On peut le caractériser par la suite réursive linéaire à deux termes $U_n = 2U_{n-1} + U_{n-2}$ avec $U_0 = 0, U_1 = 1$ et avec $z_n = [0, \underbrace{2, \dots, 2}_{n \text{ fois}}] = \frac{U_n}{U_{n+1}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = L$.

Cette suite s'exprime aussi comme $U_n = \frac{\sqrt{2}}{4} ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$ et l'on peut approcher U_n par $\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n$. En asymptotique on a d'ailleurs $U_n \approx \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2})^n$.

Puisque z_n est le n -ième convergent de L , nous avons $\mathcal{L}^1(E(z_n)) = U_n + U_{n+1}$. Pour qu'un motif d'une telle longueur rentre dans une grille de taille $m \times m$, z_n doit être tel que $U_{n+1} \leq m$. Remarquons ici que cette inégalité est une condition nécessaire mais pas suffisante puisque l'on ne considère pas la longueur des arêtes incluses dans le segment maximal supporté par l'arête de pente z_n . Observons cependant que si l'on considérait la longueur des arêtes incluses dans la grille, cela ne changerait pas les ordres de grandeur mis en jeu.

⁵Tout ses coefficients partiels valent deux, sauf celui d'indice zéro.

TAB. 3.2.2 – Constructions des $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour $n = 2i$.

Facteur	Codes de Freeman	Profondeur
R_1	$E(z_{2i-1})^{u_{2i}-r_1}$	$2i-1$
R_2	$E(z_{2i-2})^{u_{2i-1}-r_2} E(z_{2i-3})$	$2i-1$
R_3	$E(z_{2i-3})^{u_{2i-2}-r_3}$	$2i-3$
R_4	$E(z_{2i-4})^{u_{2i-3}-r_4} E(z_{2i-5})$	$2i-3$
\vdots	\vdots	\vdots
R_{2j}	$E(z_{2i-2j})^{u_{2i+1-2j}-r_{2j}} E(z_{2i-1-2j})$	$2i+1-2j$
R_{2j+1}	$E(z_{2i-1-2j})^{u_{2i-2j}-r_{2j+1}}$	$2i-1-2j$
\vdots	\vdots	\vdots
R_{2i}	$0^{u_1-r_{2i}} 1$	1

Facteur	Code de Freeman	Profondeur
L_1	$E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}-l_1}$	$2i$
L_2	$E(z_{2i-2})^{u_{2i-1}-l_2}$	$2i-2$
L_3	$E(z_{2i-4}) E(z_{2i-3})^{u_{2i-2}-l_3}$	$2i-2$
L_4	$E(z_{2i-4})^{u_{2i-3}-l_4}$	$2i-4$
\vdots	\vdots	\vdots
L_{2j}	$E(z_{2i-2j})^{u_{2i+1-2j}-l_{2j}}$	$2i-2j$
L_{2j+1}	$E(z_{2i-2-2j}) E(z_{2i-1-2j})^{u_{2i-2j}-l_{2j+1}}$	$2i-2j$
\vdots	\vdots	\vdots
L_{2i}	$0^{u_1-l_{2i}}$	0

Par approximation nous obtenons ainsi la majoration de la profondeur de l'arête en fonction de la taille de la grille :

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1+\sqrt{2})} - 1,$$

qui donne directement une majoration du nombre d'arêtes incluses dans le segment maximal. \square

Il est donc maintenant possible de minorer le nombre de segments maximaux en fonction du nombre d'arêtes du CDP et de taille de la grille dans laquelle il est contenu.

Théorème 3.2.5

Le nombre de segments maximaux sur un CDP Γ , noté $n_{MS}(\Gamma)$ inclus dans une grille de taille $m \times m$ est borné par :

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

avec :

$$K_1 = \frac{2}{\log(1+\sqrt{2})} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$$

Preuve:

Nous savons que les segments maximaux couvrent la courbe discrète et qu'un segment maximal de profondeur n contient au plus $2n+1$ arêtes discrètes. Par conséquent il ne peut y avoir moins de segments maximaux que $n_e(\Gamma)/(2n+1)$, comme l'illustre la Figure 3.2.2. Cette minoration donne le nombre exact de segments par passage à la limite. En effet il suffit de refaire la construction de la Figure 3.2.2 en augmentant la profondeur de la pente des arêtes support. On obtiendrait ainsi 4

segments maximaux dont la pente serait de profondeur impaire valant n ; le PCD contiendrait $8n$ arêtes au total; chacun des segments maximaux en absorbant $2n + 1$ soit un nombre minimal de $\frac{8n}{2n+1}$ segment maximaux. Lorsque n tend vers l'infini cette quantité tend bien vers 4 par valeurs inférieures.

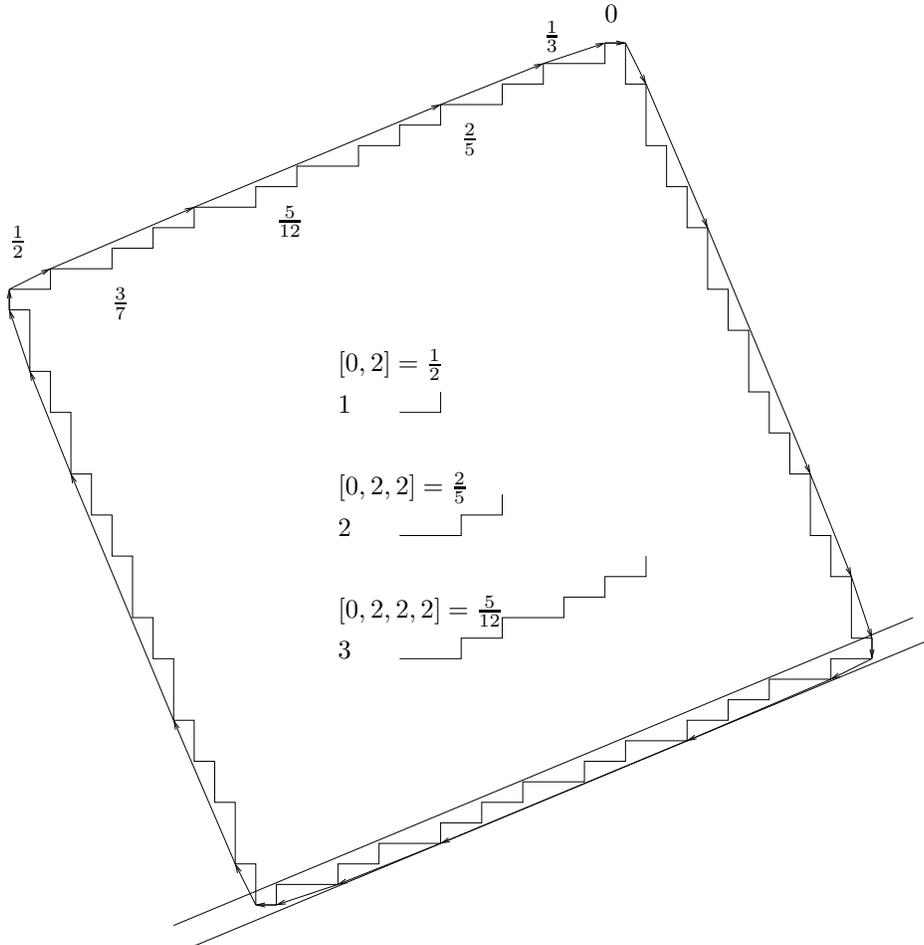


FIG. 3.2.2 – Polygone convexe discret dont le bord admet 4 segments maximaux, chacun contenant 7 arêtes discrètes. Le PCD admet 24 arêtes discrètes au total.

L'utilisation du corollaire précédent donne :

$$n \leq \frac{\log(2\sqrt{2}m)}{\log(1 + \sqrt{2})} - 1$$

Que l'on ramène à l'inégalité :

$$\frac{n_e(\Gamma) \log(1 + \sqrt{2})}{2 \log m + \log 8(\sqrt{2} - 1)} \leq n_{MS}(\Gamma)$$

Le Théorème 3.2.1 donne la borne supérieure, que l'on complète avec l'inégalité précédente :

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma).$$

□

Maintenant que nous avons étudié les relations de nombres entre les arêtes et les segments maximaux, il nous faut étudier les relations de longueurs entre ces deux objets.

3.2.2 Relations de longueurs

Les relations de longueurs que nous dériverons ici sont obtenues à partir de l'étude d'un des deux types de segments maximaux et de ses configurations locales, nous commencerons par le cas le plus simple, celui des segments maximaux de type ULU :

Proposition 3.2.6

Soit $C_{V_k, V_{k+1}}$ une arête support de pente $\frac{a}{b}$ constituée de la répétition de f motifs (a, b) et soit MS le segment maximal associé à cette arête (voir le Lemme 3.1.10). Leurs longueurs sont liées par les inégalités :

$$\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^1(MS) \leq \frac{f+2}{f} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) - 2,$$

$$\frac{1}{3} \mathcal{L}^1(MS) < \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^1(MS) < 3\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]).$$

Preuve:

Les sommets V_k et V_{k+1} sont les points d'appui supérieurs aux extrémités de MS . Les points $V_k - (b, a)$, $V_{k+1} + (b, a)$ sont des points d'appuis supérieurs de la droite de caractéristiques minimales contenant $C_{V_k, V_{k+1}}$ et ne peuvent donc appartenir ni au CDP, ni à MS . En conséquence, MS ne peut s'étendre au delà de son arête support de plus de $|a| + |b| - 1$ points de chaque coté. Ainsi :

$$\mathcal{L}^1(MS) \leq \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) + 2(|a| + |b| - 1)$$

En utilisant $\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) = (|a| + |b|)f$ il vient :

$$\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^1(MS) \leq \frac{f+2}{f} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) - 2$$

Soit encore dans le pire cas :

$$\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^1(MS) < 3\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}])$$

□

Les segments de types LUL entretiennent aussi des relations similaires avec les arêtes attenantes :

Proposition 3.2.7

Soit MS un segment maximal supporté par un sommet du PCD V_k . La longueur de ce segment maximal est majorée par :

$$\mathcal{L}^1(MS) \leq 4(\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]))$$

Preuve:

Soient L_1 , L_2 les points d'appuis inférieurs gauche et droit et on note⁶ $U_2 \equiv V_k$ le point d'appui supérieur (voir Figure 2.1.3).

Supposons que la pente de MS soit de profondeur impaire égale à $2i + 1$. La Proposition 2.3.1 implique que

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2) = q_{2i} + p_{2i}$$

⁶Pour faciliter l'utilisation et les notations dans les propositions citées plus loin dans la preuve.

Il y a clairement un facteur droit de C_{L_1, U_2} (i.e. C_{L_1, V_k}) contenu dans C_{V_{k-1}, V_k} . Le motif $E(z_{2i-1})^{u_{2i}}$ est un facteur droit de C_{L_1, U_2} (selon la Proposition 2.3.1). Il est aussi facteur droit de C_{V_{k-1}, V_k} , puisqu'il ne peut s'étendre plus loin que V_{k-1} à gauche sans définir une arête discrète plus longue. Nous obtenons $E(z_{2i-1})^{u_{2i}} \prec_s C_{V_{k-1}, V_k}$ et immédiatement :

$$\mathcal{L}^1(C_{V_{k-1}, V_k}) \geq u_{2i} \mathcal{L}^1(E(z_{2i-1})) = u_{2i}(q_{2i-1} + p_{2i-1})$$

De l'Eq. (2.1.2) et de l'Eq. (2.1.3), nous obtenons : $q_{2i} + p_{2i} = u_{2i}(q_{2i-1} + p_{2i-1}) + q_{2i-2} + p_{2i-2}$ et $q_{2i-2} + p_{2i-2} \leq q_{2i-1} + p_{2i-1}$. En conséquence :

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2) = q_{2i} + p_{2i} \leq (u_{2i} + 1)(q_{2i-1} + p_{2i-1})$$

En comparant cette quantité à la longueur de l'arête discrète C_{V_{k-1}, V_k} , l'on obtient :

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2) \leq \frac{u_{2i} + 1}{u_{2i}} \mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k])$$

La Proposition 2.3.1 ainsi que des arguments similaires sur l'arête $C_{V_k, V_{k+1}}$ amène :

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2) \leq \frac{u_{2i+1}}{u_{2i+1} - 1} \mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k])$$

Les pires cas sont alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2) &\leq 2\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) \\ \mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2) &\leq 2\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \end{aligned}$$

Si MS a une pente de complexité paire (disons $2i$) l'on obtient une relation similaire qui repose sur la Proposition 2.3.2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2) &\leq \frac{u_{2i}}{u_{2i} - 1} \mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) \leq 2\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) \\ \mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2) &\leq \frac{u_{2i-1} + 1}{u_{2i-1}} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq 2\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \end{aligned}$$

Puisque MS a un seul point d'appui supérieur, MS ne peut d'étendre plus loin que :

- $\mathcal{L}^1(\mathbf{U}_2 \mathbf{L}_2)$ sur la gauche,
- $\mathcal{L}^1(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_2)$ sur la droite.

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathcal{L}^1(MS) \leq 4(\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]))$$

□

On peut obtenir une majoration en fonction d'une seule arête en utilisant le fait que les segments maximaux en position LUL contiennent nécessairement une arête. Ces majorations dépendent de la parité de la pente, ainsi :

Proposition 3.2.8

Soit MS un segment maximal supporté par un sommet du PCD V_k . Si la pente de MS est paire la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) \leq \mathcal{L}^1(MS) \leq 6\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) - 2,$$

et la proposition symétrique pour le cas impair :

Proposition 3.2.9

Soit MS un segment maximal supporté par un sommet du PCD V_k . Si la pente de MS est impaire la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^1(MS) \leq 6\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) - 2.$$

Nous pouvons maintenant comparer la longueur totale des segments maximaux avec le périmètre du PCD.

Proposition 3.2.10

Soit Γ un PCD et $n_{MS}(\Gamma)$ le nombre segments maximaux sur $\Delta(\Gamma)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq 19Per(\Gamma)$$

Preuve:

Nous utiliserons les notations du Théorème 3.2.1 et par un léger abus de notations, nous décomposons la somme des longueurs des segments maximaux comme :

$$\sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) = \sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU}) + \sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{impair}}) + \sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{pair}}).$$

La Proposition 3.2.6 nous permet de majorer $\sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU})$:

$$\sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU}) \leq 3 \sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]),$$

L'inégalité $n_{ULU} \leq n_e(\Gamma)$ et le fait que chaque arête apparaisse au plus une fois nous permettent d'écrire que :

$$\sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \leq Per(\Gamma).$$

Ceci entraîne alors que :

$$\sum_{n_{ULU}} \mathcal{L}^1(MS_{ULU}) \leq 3Per(\Gamma).$$

La Proposition 3.2.7 nous permet de réécrire les quantités $\sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{impair}})$ et $\sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{pair}})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{impair}}) &\leq 4 \sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} (\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}])), \\ \sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{pair}}) &\leq 4 \sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} (\mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}])). \end{aligned}$$

Puisque $n_{LUL}^{\text{impair}} \leq n_e(\Gamma)$ (voir Proposition 3.1.14), que $n_{LUL}^{\text{pair}} \leq n_e(\Gamma)$ (voir Proposition 3.1.13) et que chaque arête discrète apparaît au plus une fois dans chaque somme, nous obtenons les inégalités :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{impair}}) &\leq 4 \left(\sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \sum_{\substack{\text{impair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \right) \leq 8Per(\Gamma), \\ \sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1(MS_{LUL}^{\text{pair}}) &\leq 4 \left(\sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1([V_{k-1} V_k]) + \sum_{\substack{\text{pair} \\ n_{LUL}}} \mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}]) \right) \leq 8Per(\Gamma). \end{aligned}$$

L'utilisation des inégalités précédentes permet de conclure que :

$$\sum_{n_{MS}} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq 19Per(\Gamma).$$

□

Nous pouvons maintenant borner la longueur moyenne des segments maximaux sur les PCD :

Théorème 3.2.11

Soit Γ un PCD contenu dans une grille de taille $m \times m$, la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{Per(\Gamma)}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i)}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{19Per(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

K_1 et K_2 sont les constantes du Théorème 3.2.5.

Preuve:

Du Théorème 3.2.5 nous obtenons :

$$\frac{1}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{1}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{K_1 \log m + K_2}{n_e(\Gamma)}$$

et de la Proposition 3.2.10 :

$$\sum_{i=1}^{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq 19Per(\Gamma)$$

Puisque les segments maximaux couvrent tout le bord du PCD, nous obtenons :

$$Per(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i)$$

Il est ainsi facile d'obtenir :

$$\frac{Per(\Gamma)}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n_{MS}(\Gamma)} \mathcal{L}^1(MS_i)}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{19Per(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

□

Nous pouvons aussi exprimer d'autres quantités liées aux segments maximaux à l'aide des paramètres de l'enveloppe convexe. Nous commencerons par le nombre de segments maximaux contenus dans le faisceau d'un point :

Proposition 3.2.12

Sur un PCD noté Γ , la somme du cardinal de chaque faisceau des points du bord du PCD est majorée ainsi :

$$\sum_{C_k \in \Delta(\Gamma)} Card(\mathcal{P}(k)) \leq 19Per(\Gamma) + 3n_e(\Gamma)$$

Preuve:

Il suffit d'utiliser le Lemme 2.4.6, le Théorème 3.2.1 et la Proposition 3.2.10. □

Ceci nous permet d'obtenir le nombre moyen d'éléments par faisceau :

Proposition 3.2.13

Sur un PCD noté Γ , le cardinal moyen des faisceaux est borné par :

$$1 \leq \frac{\sum_{C_k \in \Delta(\Gamma)} |\mathcal{P}(k)|}{|Per(\Gamma)|} \leq 22$$

Preuve:

Il suffit d'utiliser la Proposition 3.2.12, puis de majorer $n_e(\Gamma)$ par $Per(\Gamma)$. Il est évidemment supérieur à un puisque tout point est dans un segment maximal. \square

Il est important de noter qu'il s'agit ici d'une constante. Enfin nous pouvons dériver des résultats sur la longueur des parties communes et leur longueur moyenne :

Proposition 3.2.14

Sur un PCD noté Γ , la somme des longueurs des parties communes s'écrit :

$$\sum_{PC_i \in PC} \mathcal{L}^1(PC_i) \leq 18Per(\Gamma)$$

Preuve:

L'utilisation directe de la Proposition 2.4.11 et de la Proposition 3.2.10 suffisent à démontrer le résultat. \square

Là encore, nous pouvons donner le cas moyen en remarquant qu'il y a autant de parties communes que de segments maximaux :

Proposition 3.2.15

Sur un PCD noté Γ , la longueur moyenne des parties communes s'écrit :

$$\frac{\sum_{PC_i \in PC} \mathcal{L}^1(PC_i)}{n_{PC}(\Gamma)} \leq \frac{18Per(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

Preuve:

Du Théorème 3.2.5 nous obtenons :

$$\frac{1}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{1}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{K_1 \log m + K_2}{n_e(\Gamma)}$$

Le nombre de parties communes est égal au nombre de segments maximaux et la Proposition 3.2.14 conclut. \square

Maintenant que nous avons obtenu des formules utilisant les paramètres décrivant les PCD, nous allons pouvoir étendre nos résultats en asymptotique grâce à un théorème reliant les formes lisses et convexes à leurs discrétisés.

3.3 Comportement en asymptotique

Nous avons explicité certaines des relations locales entre les segments maximaux et les arêtes sur un polygone convexe et nous proposons dans cette section de généraliser ces résultats aux discrétisés de formes finies convexes lisses. Pour ce faire nous utiliserons un théorème liant une forme convexe lisse et l'enveloppe convexe de son discrétisé :

Théorème 3.3.1 (Balog et Bárány [BB91], Théorème 2)

Soit S une forme convexe de bord C^3 à courbure positive, et $\frac{1}{h} \cdot S$ son homothétie de rapport $\frac{1}{h}$, alors :

$$c_1(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \text{Nombre de sommets de } \text{Conv} \left(\mathbb{Z}^2 \cap \frac{1}{h} \cdot S \right) \leq c_2(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des bornes inférieures et supérieures de la courbure le long du bord de S .

En remarquant que $\mathbb{Z}^2 \cap \frac{1}{h} \cdot S$ et $(h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}) \cap S$ sont égaux à une homothétie près, le théorème précédent se reformule pour le discrétisé de pas h . Ajoutons que si S est une forme plane convexe de bord \mathcal{C}^3 et à courbure positive partout alors $DigG_h(S)$ est un PCD pour des h suffisamment petits. Or le théorème initial de Balog et Bárány exprime le nombre d'arêtes de l'enveloppe convexe de $DigG_1(\frac{1}{h} \cdot S)$. D'après les remarques précédentes, $DigG_h(S)$ est un PCD : il est donc égal au discrétisé de son enveloppe convexe. On peut ainsi reformuler le théorème précédent de la façon suivante, plus adaptée à nos notations :

Théorème 3.3.2 (*Adapté de Balog, Bárány [BB91]*)

Si $S \in \mathbb{F}_c^3$, alors il existe h_S tel que pour tout $0 < h < h_S$, $DigG_h(S)$ est un PCD vérifiant :

$$c_1(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}} \leq n_e(DigG_h(S)) \leq c_2(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Les constantes $c_1(S)$ et $c_2(S)$ dépendent des bornes inférieures et supérieures de la courbure le long du bord de S .

Une première remarque sur ce théorème est que dans le cas d'un disque c_1 et c_2 sont des constantes absolues. Dans les énoncés suivants nous considérerons toujours une forme $S \in \mathbb{F}_c^3$, discrétisée à des résolutions où le Théorème 3.3.2 s'applique. Commençons par écrire le Théorème 3.2.1 à l'aide du théorème précédent :

Théorème 3.3.3

Nous pouvons encadrer l'ordre de grandeur du nombre des segments maximaux en fonction du pas de discrétisation de la façon suivante :

$$\Theta \left(\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}}{\log \frac{1}{h}} \right) \leq n_{MS}(DigG_h(S)) \leq \Theta \left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

Preuve:

Il suffit d'utiliser le Théorème 3.2.1 en remplaçant $n_e(\Gamma)$ par son ordre de grandeur en fonction de h et en considérant que $m = \frac{1}{h}$, ces substitutions donnent l'inégalité suivante :

$$\frac{c_1(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}}{K_1 \log \frac{1}{h} + K_2} \leq n_{MS}(DigG_h(S)) \leq 3c_2(S) \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Dont on extrait facilement les ordres de grandeur. Ceci conclut la preuve. \square

Bien que l'on soit capable d'encadrer l'ordre de grandeur du nombre de segments maximaux, la question de l'existence d'une limite de $\frac{n_{MS}(DigG_h(S))}{\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{2}{3}}}$ sur une sous classe de \mathbb{F}_c^3 lorsque h tend vers zéro reste une question ouverte. En effet quoique l'on puisse trouver des PCD qui vérifient la borne inférieure à chaque résolution, il reste encore à montrer que l'on puisse trouver une forme dont les discrétisations puissent généraliser l'exemple de construction de la preuve du Théorème 3.2.5 (cf. Figure 3.2.2) et que cette forme soit bien dans \mathbb{F}_c^3 .

Supposons que la forme $S \in \mathbb{F}_c^3$ soit contenue dans un carré ayant ses côtés de longueur 1, si l'on considère alors $DigG_h(S)$ avec $0 < h < 1$ pour h suffisamment petit, son périmètre⁷ est majoré par $\frac{4}{h}$. De même on peut minorer le périmètre de $DigG_h(S)$ par $\frac{p}{h}$ ou p est une constante⁸ qui ne dépend que de S . L'on obtient ainsi que le périmètre de $DigG_h(S)$ est encadré par deux quantités de même ordre. On peut généraliser cet encadrement pour toutes les formes de \mathbb{F}_c^3 , ce qui nous permet d'énoncer le lemme suivant :

⁷Pour la norme \mathcal{L}^1 .

⁸Par exemple le périmètre d'un carré strictement contenu dans S .

Lemme 3.3.4

Le périmètre de $DigG_h(S)$ se comporte comme suit :

$$\Theta\left(\frac{1}{h}\right) \leq Per(DigG_h(S)) \leq \Theta\left(\frac{1}{h}\right)$$

En conséquence, la Proposition 3.2.10 devient :

Théorème 3.3.5

La somme des longueurs des segments maximaux de $DigG_h(S)$ se comporte comme suit :

$$\Theta\left(\frac{1}{h}\right) \leq \sum_{n_{MS}(DigG_h(S))} \mathcal{L}^1(MS_i) \leq \Theta\left(\frac{1}{h}\right)$$

Ici encore il n'est pas clair que la quantité $h \sum_{n_{MS}(DigG_h(S))} \mathcal{L}^1(MS_i)$ ait une limite lorsque h tend vers zéro. La Proposition 3.2.14 se réécrit directement :

Proposition 3.3.6

La somme des longueurs des parties communes de $DigG_h(S)$ se comporte comme suit :

$$\sum_{n_{PC}(DigG_h(S))} \mathcal{L}^1(PC_i) \leq \Theta\left(\frac{1}{h}\right)$$

Et ici encore nous ne pouvons conclure quant à la limite de la quantité $h \sum_{n_{PC}(DigG_h(S))} \mathcal{L}^1(PC_i)$.

Les précédentes bornes sur les segments maximaux nous permettent tout de même d'exprimer celles sur la longueur moyenne des segments maximaux, qui est un des résultats majeurs de ce chapitre :

Théorème 3.3.7

La moyenne de longueur des segments maximaux (en norme $\mathcal{L}^1(\cdot)$) du bord de $DigG_h(S)$, notée $L_{MS}(S, h)$, se comporte comme suit en asymptotique :

$$\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \leq L_{MS}(S, h) \leq \Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}} \log \frac{1}{h}\right). \quad (3.3.1)$$

Preuve:

On utilise le Théorème 3.2.11 qui donne l'inégalité suivante :

$$\frac{Per(DigG_h(S))}{3n_e(DigG_h(S))} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n_{MS}(DigG_h(S))} \mathcal{L}^1(MS_i)}{n_{MS}(DigG_h(S))} \leq \frac{19Per(DigG_h(S))(K_1 \log \frac{1}{h} + K_2)}{n_e(DigG_h(S))}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes dépendant de S . Le Lemme 3.3.4 et le Théorème 3.3.2 permettent d'obtenir les ordres de grandeur en fonction du pas de la grille. Ceci conclut la preuve. \square

Le théorème précédent donne un résultat très fort quant à la croissance des segments maximaux, il exprime bien que le nombre des points les constituant grandit mais pas passez vite pour que le segment discret grandisse du point de vue de la grille euclidienne ($h = 1$).⁹ Expérimentalement on observe qu'en moyenne les segments maximaux grandissent un peu plus vite que $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ et plus lentement que $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}} \log \left(\frac{1}{h}\right)\right)$ comme illustré sur la Figure 3.3.1. Ces expérimentations confortent bien les résultats annoncés par le théorème précédent. Ajoutons que l'on peut majorer la longueur moyenne de la partie commune de la façon suivante :

⁹Il faudrait en effet que cette croissance soit au moins en racine carré de l'inverse de pas de la grille.

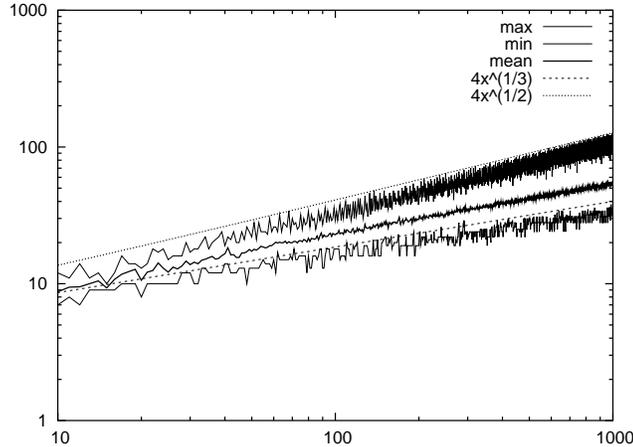


FIG. 3.3.1 – La courbe discrétisée est un disque de rayon 1, l’axe des abscisses représentant la résolution de la discrétisation. On représente ici le tracé en échelle logarithmique de la taille moyenne des segments maximaux mesurée avec la norme 1 de Minkowski.

Proposition 3.3.8

La moyenne des longueurs en norme 1 des parties communes du bord de $\text{Dig}G_h(S)$, notée $L_{PC}(S, h)$, se majore comme suit en asymptotique :

$$L_{PC}(S, h) \leq \Theta \left(\left(\frac{1}{h} \right)^{\frac{1}{3}} \log \frac{1}{h} \right).$$

La borne supérieure de la longueur moyenne des segments maximaux bouscule les précédentes hypothèses sur la croissance des segments discrets. À notre connaissance la seule précédente conjecture existante est donnée par Coeurjolly dans sa thèse (voir [Coe02]) et suppose que l’ordre de grandeur de la longueur des demi-tangentes discrètes est de $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$ en moyenne.¹⁰

Cette hypothèse semblait justifiée du fait qu’il existe effectivement des points pour lesquels cet ordre de grandeur est atteint. On le constate par exemple en observant la longueur maximale des segments maximaux sur un cercle, comme le montre la Figure 3.3.1. En effet si l’on discrétise un cercle centré en zéro de rayon 1, alors les demi-tangentes (et les segments maximaux les contenant par conséquent) des points situés à l’intersection du bord du discrétisé du cercle et des axes se comportent bien en $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$, ce qui est susceptible d’induire en erreur.

En fait cet ordre de grandeur en $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$ est une majoration de la croissance des segments maximaux pour les discrétisés d’un cercle :

Lemme 3.3.9

Si l’on considère la discrétisation de Gauss de pas h d’un cercle de rayon R alors la longueur euclidienne de tout segment le long de son contour est majorée par $2^{\frac{7}{4}} \left(\frac{R}{h} \right)^{\frac{1}{2}}$, soit une majoration en $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$.

Preuve:

Tout segment sur le bord du discrétisé d’un cercle est inclus dans une bande d’épaisseur $2^{\frac{1}{2}}$ puisque la droite standard de caractéristiques minimales l’est aussi. L’intersection de cette bande avec le

¹⁰Cette conjecture est d’ailleurs explicitement requise dans plusieurs preuves de convergence d’estimateurs discrets voir [CMT01] et [CT01].

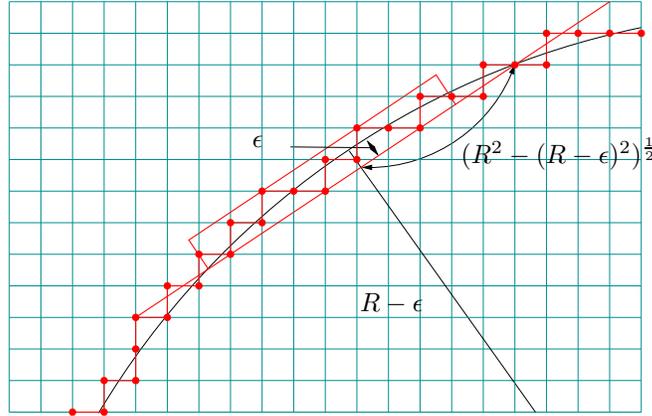


FIG. 3.3.2 – Une bande contenant un segment standard sur le bord du discrétisé d'un cercle de rayon R .

cercle euclidien de rayon R définit une corde au cercle de rayon R . Et la longueur de cette corde induit une majoration pour la longueur du segment standard considéré. En effet le bord extérieur de la bande est à distance $0 \leq \epsilon \leq 2^{\frac{1}{2}}$ du cercle, la longueur de la portion de la bande contenant le segment est donc majorée par $2(2R\epsilon - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$; voir la Figure 3.3.2 pour une illustration. Cette quantité est clairement majorée par $2(2R2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$.

Si l'on considère maintenant la discrétisation pour un pas de grille égal à h , la majoration précédente devient $2(2\frac{R}{h}2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$. \square

Cette majoration étant effectuée localement, on peut en conclure que la longueur de tout segment maximal se majore en $\Theta\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)$ sur une forme à courbure strictement positive. En effet la courbe se comportant localement comme un cercle de rayon inverse à sa courbure, la courbure admet un minimum le long du segment maximal. On en déduit ainsi une majoration de la longueur euclidienne du segment proportionnelle à la racine carrée de $\frac{R}{h}$ où R est l'inverse du minimum de courbure.

La borne supérieure est établie et vérifiée expérimentalement, poursuivons en nous intéressant à une minoration de la longueur des segments maximaux. Pour cela montrons tout d'abord que tous les segments maximaux grandissent :

Proposition 3.3.10

Soit $S \in \mathbb{F}_c^3$, la longueur discrète des segments maximaux sur le bord de $\text{Dig}G_h(S)$ n'est pas bornée lorsque h tend vers zéro.

Preuve:

Tout d'abord et en vertu du Lemme 3.1.4, deux segments maximaux égaux à une translation près ont des cercles séparants de rayon maximal de même rayon.

Notons $\mathcal{L}_R^1(M)$ la longueur déduite de la norme 1 de Minkowski du segment standard M par rapport au plan euclidien, *i.e.* le nombre de pas constituant le segment multiplié par h . Considérons maintenant l'ensemble de tous les segments maximaux de longueur l se trouvant sur le bord des discrétisés de formes convexes arbitraires. Le nombre de ces segments maximaux est fini (si on considère cet ensemble aux translations de segments près) ainsi que le nombre des rayons possibles pour les cercles séparants de rayons maximaux. Ces rayons étant en nombre fini, nous choisissons l'inverse du plus grand comme image de la fonction $\kappa_1(\cdot)$ en l .

L'interprétation du Lemme 3.1.4 stipule que tout contour dont le discrétisé a un segment maximal de longueur l admet un maximum de courbure supérieur ou égal à $\kappa_1(l)$ sur le contour réel sous-jacent au segment maximal considéré.

Supposons maintenant que quel que soit le pas de discrétisation, il existe des segments maximaux sur le bord de $DigG_h(S)$ dont la longueur discrète est majorée par une constante L . Nous supposons qu'il existe ainsi une suite (h_i) de pas de discrétisation de plus en plus petits tels que certains segments maximaux n'aient pas une longueur discrète supérieure à L pour tout pas de la suite (h_i) . Notons M_i un segment maximal vérifiant cette hypothèse pour un h_i donné.

Soit $\kappa_{\max}(S)$ le maximum de courbure sur le bord de S et soit $S \cdot \frac{1}{h_i}$ le dilaté de S par un facteur $\frac{1}{h_i}$, nous avons :

$$\kappa_{\max}(S) = \frac{1}{h_i} \kappa_{\max}\left(S \cdot \frac{1}{h_i}\right)$$

Puisque les discrétisations $DigG_{h_i}(S)$ et $DigG_1\left(S \cdot \frac{1}{h_i}\right)$ sont identiques, il vient :

$$\begin{aligned} \kappa_{\max}\left(S \cdot \frac{1}{h_i}\right) &\geq \kappa_1(\mathcal{L}_R^1(M_i)) \\ &\geq \min_{l=1}^L \kappa_1(l) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

L'Équation (3.3.2) indique que le maximum de courbure sur le bord de $S \cdot \frac{1}{h_i}$ est minoré par la courbure issue du cercle séparant de rayon maximal de M_i . Notons par $\kappa_1(1, L)$ la valeur non nulle $\min_{l=1}^L \kappa_1(l)$. En rassemblant ces termes nous obtenons :

$$\kappa_{\max}(S) \geq \frac{1}{h_i} \kappa_1(1, L)$$

La limite de $\kappa_{\max}(S)$ est ainsi clairement $+\infty$ lorsque h_i tend vers 0, impliquant que le contour de S admet un point où la courbure n'est pas bornée, ce qui est une contradiction. Nous pouvons ainsi conclure que les segments maximaux ont une longueur non bornée lorsque h tend vers zéro. \square

Nous terminons cette section en présentant un résultat récent bien plus fort puisqu'il indique une minoration de l'ordre pour la croissance des segments maximaux. La preuve du théorème peut être consultée dans l'habilitation à diriger des recherches de Lachaud [Lac06]. Elle exploite les propriétés des cercles séparants, les relations de longueurs entre les paramètres p, q et δ sur un segment maximal et des relations géométriques élémentaires.

Théorème 3.3.11 [HDR de Lachaud [Lac06]]

Soit S une forme convexe du plan de bord C^2 et courbure continue. La longueur discrète des segments maximaux du bord du PCD $DigG_h(S)$ est minorée par $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. Plus précisément, ce minorant, qui est non atteint, s'écrit :

$$\frac{3}{4} 5^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{h \kappa_{\max}(S)} - 3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

où $\kappa_{\max}(S)$ est la courbure maximale du bord de S .

Ce résultat est en accord avec la minoration de la longueur moyenne des segments maximaux. Il reste encore plusieurs questions actuellement sans réponse sur la croissance des segments maximaux. Nous avons obtenu une borne inférieure et une borne supérieure mais la distribution des longueurs des segments maximaux reste encore incertaine.

Si l'on a su obtenir des ordres de grandeur sur la croissance des segments maximaux, il faut noter que tous ces résultats proviennent des propriétés des PCD et de la décomposition combinatoire des segments maximaux en fonction de la parité de leurs pentes. En effet cette approche nous a permis d'obtenir la description complète de deux types de segments, permettant ainsi une étude plus fine. Il nous semble ainsi nécessaire d'étendre l'étude asymptotique aux arêtes discrètes et aux paramètres décrivant les segments standards.

3.4 Comportements des paramètres décrivant les arêtes

Les liens entre les segments maximaux et les arêtes nous conduisent naturellement à étudier les paramètres décrivant le comportement des arêtes de l'enveloppe convexe. L'une des quantités que l'on peut extraire facilement est leur longueur moyenne :

Corollaire 3.4.1

Il existe h_S tel que pour tout $0 < h < h_S$, la longueur discrète moyenne des arêtes $L_{EDGE}(S, h)$ pour $S \in \mathbb{F}_c^3$ est telle que :

$$\Theta \left(\frac{1}{h} \right)^{\frac{1}{3}} \leq L_{EDGE}(S, h) \leq \Theta \left(\frac{1}{h} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Preuve:

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème 3.3.2, puisque la somme des longueurs discrètes des arêtes est exactement égale au périmètre de $DigG_h(S)$ et que d'après le Lemme 3.3.4 cette quantité est bornée en $\Theta \left(\frac{1}{h} \right)$. \square

Bien que l'ordre moyen soit parfaitement déterminé, le comportement de la longueur de la plus petite arête n'est pas connu dans le cas général. En fait on ne sait pas si on peut minorer la longueur de la plus petite arête. L'étude des liens entre les segments maximaux et les arêtes ne peut suffire ici puisque l'on ne peut construire une bijection entre les segments maximaux et les arêtes. En effet nous avons déjà montré qu'il était possible de trouver des PCD pour lesquels la décomposition des segments maximaux admettait plusieurs arêtes très petites (la complexité de leur pente pouvant valoir un), ces arêtes n'étant pas l'arête support d'un segment maximal.

Il est en fait difficile de déterminer les facteurs influençant les comportements extrêmes de la longueur des arêtes. On pourrait invoquer plusieurs facteurs possibles :

- des pas de discrétisations particuliers,
- des points particuliers sur la forme euclidienne ou la forme elle-même (lieux des points d'une équation polynomiale de degré n en x et y),
- les longueurs d'arêtes ayant des pentes particulières.

Prenons l'exemple d'un cercle de rayon 1 centré sur l'origine et choisissons une suite de pas de discrétisations de plus en plus petits pour lesquels il n'y ait que 3 points d'ordonnée maximale; ces points sont de coordonnées $(-1, \lfloor \frac{1}{h} \rfloor)$, $(0, \lfloor \frac{1}{h} \rfloor)$ et $(1, \lfloor \frac{1}{h} \rfloor)$. En considérant l'enveloppe convexe de cette discrétisation on observe alors qu'il existe au moins quatre arêtes de longueur 2.¹¹ Une illustration dans le cas du cercle de rayon un est représentée sur la Figure 3.4.1. On peut généraliser cette construction à des pas de discrétisations situés dans les intervalles de la forme $\left] \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}, \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right]$ avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.

Le cas particulier présenté est la combinaison de pas de discrétisations particuliers et du choix de points particuliers sur la forme entraînant des pentes très particulières pour les arêtes. On peut d'ailleurs remarquer que toute forme euclidienne admettant des points où la dérivée s'annule sur une des coordonnées et où la courbure n'est pas nulle est sujette au même comportement puisque toute forme se comporte localement comme un cercle.¹²

Néanmoins on pourrait considérer que ces cas ne sont pas représentatifs du comportement général de la longueur des arêtes puisqu'ils ne concernent que des arêtes de pentes particulières.

La majoration de la longueur des arêtes s'effectue elle directement en $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$. En effet les arêtes discrètes sont des segments standards. Or la longueur maximale des segments est en $\Theta \left(\sqrt{\frac{1}{h}} \right)$

¹¹En considérant les arêtes traversant les points de coordonnées $(-\lfloor \frac{1}{h} \rfloor, 0)$, $(\lfloor \frac{1}{h} \rfloor, 0)$ et $(0, -\lfloor \frac{1}{h} \rfloor)$.

¹²Si (x_{s_0}, y_{s_0}) est un point admettant une tangente horizontale de courbure non nulle avec l'intérieur de la forme tourné vers les ordonnées négatives alors on obtiendrait un comportement similaire à celui des discrétisés du cercle de rayon $\frac{1}{\kappa(s_0)}$ centré en $(x_{s_0}, y_{s_0} - \frac{1}{\kappa(s_0)})$.

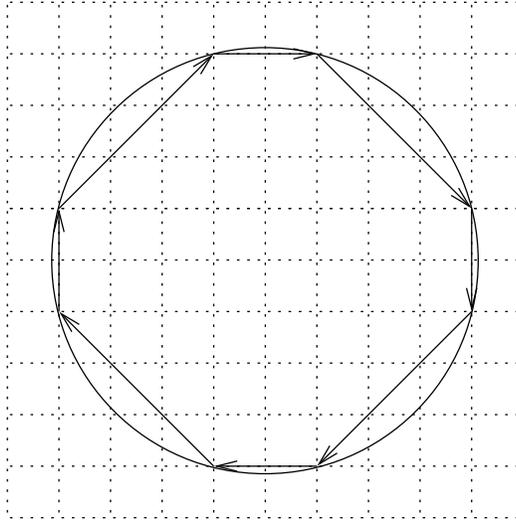


FIG. 3.4.1 – Discrétisé d’un cercle de rayon 1 centré sur l’origine et sur lequel on peut trouver quatre arêtes de longueur 2 en des points particuliers. Le pas de discrétisation appartient à l’intervalle $\left] \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{17}} \right]$.

en vertu du Lemme 3.3.9, donc celle des arêtes l’est aussi. Ajoutons que l’on peut trouver aussi sur le cercle des arêtes grandissant en $\Theta\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)$. Ces arêtes sont situés aux changements de quadrants et les pas de discrétisations sont alors dans des intervalles de la forme $\left] \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{n^2}} \right]$ avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.

Revenons au comportement moyen des arêtes et rappelons que la longueur discrète d’une arête e vaut exactement $\delta(p+q)$ où $\frac{p}{q}$ est la fraction irréductible donnant sa pente. La question est alors de savoir comment se comporte en moyenne les paramètres δ , p et q sachant que la longueur moyenne des arêtes grandit en $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.

Expérimentalement, on observe que sur les discrétisés d’un disque de rayon un la moyenne du paramètre δ semble bornée et ce même à très haute résolution. En conséquence, il est logique que la moyenne du rapport $\frac{p}{q}$ semble elle aussi bornée. Ces deux résultats sont illustrés sur la Figure 3.4.2.

En conséquence, nous sommes amenés à proposer la conjecture suivante sur les paramètres des arêtes discrètes :

Conjecture 3.4.2

En moyenne, les paramètres p , q des arêtes de $\text{Dig}G_h(S)$ où $S \in \mathbb{F}_c^3$ grandissent en $\Theta\left(\frac{1}{h}^{\frac{1}{3}}\right)$, alors que le paramètre δ est borné, lorsque h tend vers 0.

Une question légitime est de se demander vers quoi tend le rapport $\frac{p}{q}$ pour les arêtes voisines d’un point du bord de S pour des résolutions de plus en plus petites. Tout d’abord la distance verticale entre l’arête et le bord de S est majorée en $\Theta\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$ d’après la Proposition 3.1.5. Si l’on admet le comportement moyen des paramètres des arêtes on observe alors que l’aire moyenne entre le bord de S et une arête est majorée par un $\Theta(h^2)$. En effet la distance verticale est majorée en $\Theta\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$ sur une distance euclidienne moyenne de $h\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$.¹³ En sommant cette

¹³Les ordres de grandeur entre la longueur discrète avec la norme 1 et la longueur discrète avec la norme 2 sont identiques puisque nous sommes en dimension finie. La longueur euclidienne est ensuite obtenue par dilatation de la longueur discrète.

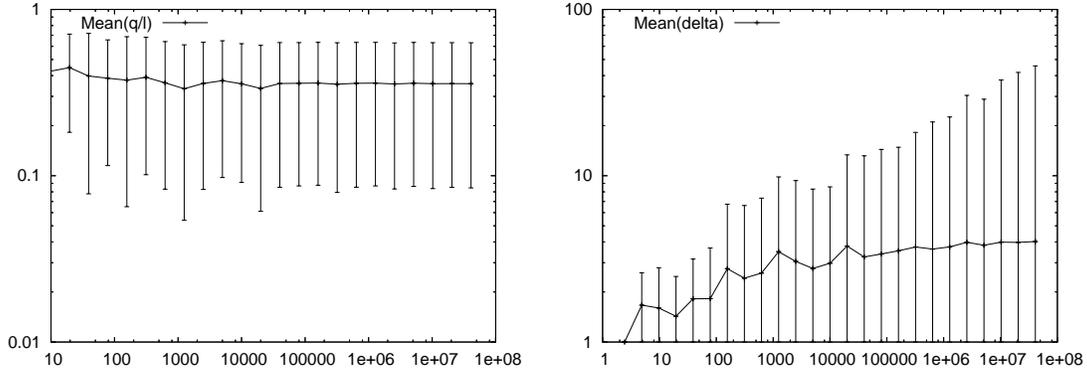


FIG. 3.4.2 – Tracés en échelle logarithmique des moyennes des paramètres $\frac{q}{l}$ (gauche) et δ (droite) pour les arêtes du PCD formant la discrétisation de Gauss d'un disque de rayon 1. On représente en abscisses l'inverse $\frac{1}{h}$ du pas de discrétisation, les barres d'erreurs représentent l'écart-type.

erreur sur toutes les arêtes on obtient une majoration directe de la différence d'aire entre S et l'enveloppe convexe de son discrétisé en $\Theta\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$.

D'autre part la pente de l'arête discrète tend vers la pente du bord de la forme. Plus précisément l'intuition est que les paramètres p et q grandissent en $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ pour se rapprocher de la pente de la tangente du bord de la forme au voisinage de l'arête. Il semble que la convergence suppose naturellement que le développement en fraction continue de $\frac{z}{q}$ tende vers celui de $f'(s_0)$. Intuitivement la profondeur de la pente des arêtes grandirait alors en $\Theta\left(\log\left(\frac{1}{h}\right)\right)$ si l'on admet que le paramètre δ est borné.

3.5 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté un nombre important de relations entre les segments maximaux et les arêtes discrètes des PCD. Les liens très forts mis en évidence dans ce chapitre expriment que les segments maximaux et les arêtes sont tous deux des représentants de la convexité discrète. Notons qu'il reste quelques points à éclaircir, notamment l'alternance des types des segments maximaux, l'impact du choix du pas de la grille sur la discrétisation de la forme en des points particuliers et enfin comprendre ce que représentent les arêtes n'étant pas les parties principales des segments maximaux et savoir si elles sont issues des défauts de la discrétisation ou non.

Ces relations nous ont permis de généraliser les comportements des segments maximaux des PCD aux discrétisés de formes lisses et convexes et ce en fonction du pas de la grille. Ces résultats sont très importants puisqu'ils nous permettent de donner des bases formelles à la comparaison d'estimateurs. En effet les comportements mis en évidence sur les segments maximaux nous permettront de démontrer la convergence d'estimateurs géométriques locaux basés sur les segments maximaux et de prévoir leurs vitesses de convergence.

Chapitre 4

Conséquences du comportement des parties linéaires

Ce chapitre constitue une application directe des résultats asymptotiques obtenus au chapitre précédent. En effet nous proposerons dans cette partie un estimateur de tangente discrète construit sur les segments maximaux dont nous pourrions prouver formellement la convergence. Nous comparerons aussi cet estimateur avec d'autres estimateurs discrets de tangente selon les critères préconisés au Chapitre 1. Selon nos critères l'estimateur présenté, appelé λ -MST, se distingue très clairement des autres. Sur les bases du comportement des segments maximaux nous discuterons la possibilité de construire un estimateur de courbure convergent. Enfin nous mènerons une brève étude expérimentale sur deux estimateurs de tangente utilisant des approches continues, mettant en relief le bon comportement de l'estimateur λ -MST.

Le chapitre se présente comme suit :

- La section 1 est dédiée à la comparaison des estimateurs discrets de tangente basés sur les segments de droites. Ces résultats expérimentaux ont été publiés dans [LVdV05, LdV06].
- La section 2 est une discussion sur les autres estimateurs géométriques reposant sur les parties linéaires, en particulier le problème de la courbure est abordé.
- La section 3 est une brève étude expérimentale sur deux estimateurs de tangente utilisant une approche continue. Les expériences menées indiquent clairement que l'estimateur discret λ -MST est bien meilleur.

4.1 Estimateur discret de tangente

La notion de vecteur dérivé sur une courbe est principalement liée à la notion de paramétrisation. Étant donné le graphe d'une fonction, il existe une infinité de paramétrisations possibles. Celles-ci donnent alors pour le même point repéré sur le graphe des valeurs de vecteur dérivé différentes. Dans le cas de la dérivée première il est facile de voir que la paramétrisation influe sur la norme du vecteur dérivé mais pas sur sa direction. Sur une courbe euclidienne lisse, son graphe suffit à déterminer sa tangente, indiquant la direction du vecteur dérivé.

Lorsque l'on veut estimer cette quantité dans le monde discret, la première difficulté est de choisir un représentant pour la tangente discrète. En effet une tangente est une droite dans le monde euclidien, ayant un seul point de contact avec la courbe. Dans le monde discret, on cherche un segment standard comme support de la droite standard qui tiendrait lieu de tangente discrète. Ce segment standard doit alors être celui qui représente le mieux la partie linéaire autour du point discret considéré. Ce segment doit par conséquent être sur le bord de la forme discrète et épouser au mieux son bord. Ce choix implique déjà que la pente de la tangente discrète est rationnelle. Ainsi si l'on considère la courbe euclidienne sous-jacente la pente de la tangente discrète se veut une estimation de la tangente euclidienne. Parmi les choix possibles l'on peut retenir ceux de la Définition 2.4.7, page 68, illustrés sur la Figure 4.1.1.

D'un point de vue local au point d'intérêt sur la courbe discrète le choix d'une tangente discrète consiste à trouver un compromis entre la localisation (segments centrés sur le point) ou l'information (segments les plus longs possibles contenant le point). Les définitions de ces tangentes discrètes sont indépendantes du sens de parcours de la courbe sauf pour FTT (voir Figure 4.1.1e). ET peut être considéré comme une version non ambiguë de FTT. Remarquons que FTT et ET sont les segments standards les plus longs, au prix d'une perte de la localisation autour du point d'intérêt. FTT et ET ont tendance à polygonaliser la courbe discrète, même si la forme sous-jacente est lisse.

ST et HT ont une très bonne localisation autour du point d'intérêt (parfaitement centré pour ST). Ces deux types de segments ont cependant des comportements médiocres et ce même sur des formes très régulières (par exemple aux points où un cercle de rayon entier intersecte les axes). Les parties convexes ou concaves sont aussi mal localisées. Remarquons que HT est aussi utilisé pour estimer la courbure (voir [Coe02]).

Les points d'inflexion sont un trait caractéristique des courbes. Un estimateur de tangente robuste doit pouvoir les détecter sans créer de faux points d'inflexion. Les estimateurs ST et HT ne sont malheureusement pas dans ce cas là. La Figure 4.1.2 illustre la détection d'un faux point

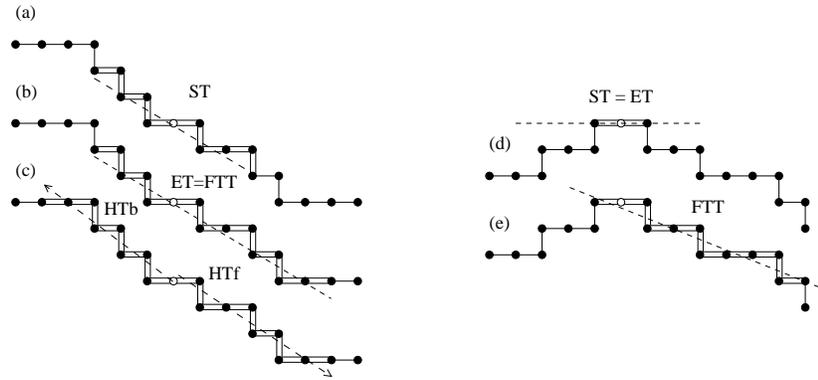


FIG. 4.1.1 – Illustration des différentes définitions de tangente discrète. Le point d'intérêt est repéré en blanc ainsi que les segments standards associés à la tangente discrète. (a) Tangente symétrique (ST). (b) Tangente étendue (ET), identique sur cet exemple à la tangente de Feschet-Tougne (FTT). (c) Demi-tangentes gauche et droite (HT). (d) Tangente étendue (ET) et tangente symétrique (ST) identiques sur cet exemple et qui sont parfaitement centrées. (e) Tangente de Feschet-Tougne (FTT) Le point d'intérêt est complètement rejeté à l'une des extrémités.

d'inflexion pour ST, la forme sous jacente considérée est un arc de cercle. Le changement de quadrant autour du point d'intérêt induit que la tangente symétrique a une pente plus grande que celle trouvée autour des points suivant le contour. ST a ici repéré une concavité sur un disque.

Ceci n'est finalement pas très surprenant, puisque ST n'est pas relié à l'enveloppe convexe comme les segments maximaux le sont (voir la Définition 3.1.1 et le théorème 4.1 de [RDDR04]).

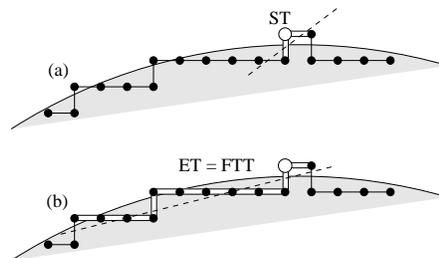


FIG. 4.1.2 – Estimation de la tangente le long du bord du discrétisé d'un arc de cercle. Fausse concavité détectée par ST (a) ET et FTT ne détectent pas de fausse concavité (b).

Ces défauts étant relevés nous proposons dans la prochaine section un estimateur de tangente discrète basé sur les segments maximaux.

4.1.1 Construction d'un nouvel estimateur discret de tangente

Le nouvel estimateur de tangente proposé ici est basé sur l'ensemble des segments maximaux qui traversent un point du contour discret. Cet ensemble est appelé *faisceau* et a déjà été défini au Chapitre 2 (voir la Définition 2.4.5). Comme remarqué par Feschet et Tougne dans [FT99], plusieurs points consécutifs du contour discret peuvent avoir le même faisceau. En conséquence notre estimateur doit prendre en compte la position du point d'intérêt par rapport au faisceau. Pour ce faire, nous attribuons une excentricité à chaque segment maximal dans le faisceau d'un point. Cette excentricité est relative à la position du point dans le segment maximal et est dans l'intervalle $[0, 1]$. La direction de la tangente est ensuite estimée en combinant les orientations de chaque segment maximal pondéré par une fonction λ selon la valeur de l'excentricité.

Nous noterons dans la suite θ_i la direction du segment maximal M_i .

Définition 4.1.1

L'excentricité $e_i(k)$ d'un point C_k relative à un segment maximal M_i est calculé ainsi :

$$e_i(k) = \begin{cases} \frac{\|C_k - C_{m_i}\|_1}{L_i} = \frac{k - m_i}{L_i} & \text{si } M_i \in \mathcal{P}(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } L_i = \|C_{n_i} - C_{m_i}\|_1. \quad (4.1.1)$$

Plus le point est proche du centre du segment maximal plus cette valeur est proche de $\frac{1}{2}$. À l'inverse, plus un point est excentré du segment plus la valeur de l'excentricité est proche des bornes de l'intervalle $[0, 1]$, comme l'illustre la Figure 4.1.3.

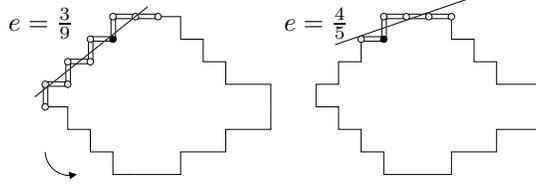


FIG. 4.1.3 – Calcul de l'excentricité e sur un point du contour discret (en noir) relativement à un segment maximal (en blanc).

Dans la suite la fonction λ est une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^+ avec $\lambda(0) = \lambda(1) = 0$ et $\lambda > 0$ partout ailleurs. Nous pouvons maintenant définir notre estimateur, appelé λ -MST :

Définition 4.1.2

La direction estimée par λ -MST au point C_k est définie comme :

$$\hat{\theta}(k) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}(k)} \lambda(e_i(k)) \theta_i}{\sum_{i \in \mathcal{P}(k)} \lambda(e_i(k))} \quad (4.1.2)$$

Au vu des propriétés de l'excentricité et du fait que le faisceau d'un point n'est jamais vide, cette valeur est définie sur tout point du contour discret et peut être calculée localement.

Cet estimateur discret s'étend naturellement pour des valeurs non-entières de k , en considérant le segment euclidien reliant les points $C_{\lfloor k \rfloor}$ et $C_{\lceil k \rceil}$. Si la fonction λ est continue, alors la fonction donnant l'angle estimé $\hat{\theta}(k)$ l'est aussi.

Ajoutons que le calcul de toutes les directions par l'estimateur λ -MST sur une forme discrète convexe est linéaire en le nombre de points du bord de la forme. Ceci est une conséquence directe de la majoration du cardinal moyen des faisceaux (voir la Proposition 3.2.13) et de l'utilisation d'un algorithme incrémental optimal en temps de calcul pour extraire les caractéristiques des segments maximaux.

Nous avons vu précédemment l'importance du respect des parties convexes/concaves. Un estimateur de tangente à une courbe discrète respecte les propriétés de convexité/concavité si et seulement si l'angle de la tangente estimée est non décroissante (resp. non croissante) sur tout sous-ensemble connexe de points où la courbe est localement convexe (resp. concave).¹ Cette propriété est vérifiée pour ET et FTT mais fait défaut dans les estimateurs ST et HT (voir par exemple la Figure 4.1.2 ou la Figure 4.1.5). Pour l'estimateur λ -MST, cela dépend du choix de la fonction λ choisie comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 4.1.3

Si λ est dérivable sur $]0, 1[$, alors l'estimateur λ -MST satisfait la propriété de convexité/concavité si et seulement si : $\frac{d}{dt}(t \frac{\lambda'}{\lambda}(t)) \leq 0$ et $\frac{d}{dt}((1-t) \frac{\lambda'}{\lambda}(t)) \leq 0$ sont vraies sur cet intervalle.

La preuve de ce théorème est présentée dans [LVdV06].

¹Voir la Définition 3.1.1 issue des travaux de Debled-Rennesson et Doerksen.

4.1.2 Comparaison expérimentale

Dans cette sous-section nous proposons une évaluation expérimentale (selon les critères préconisés à la Section 1.3.4) des estimateurs de tangente discrète basés sur les segments standards. Le comportement de l'estimateur λ -MST dépend de la fonction λ qui pilote l'estimation de la courbe sous-jacente. Parmi l'ensemble des fonctions vérifiant le Théorème 4.1.3, nous choisissons la fonction qui minimise la courbure de la courbe sous-jacente. Nous choisissons ainsi la fonction symétrique en forme de triangle ayant un pic en $\frac{1}{2}$. Cette fonction estime la courbe euclidienne sous-jacente comme un arc circulaire lorsque le faisceau de segments maximaux est réduit à deux segments. En pratique cette fonction donne de très bons résultats et est très simple à calculer.

Les résultats expérimentaux présentés ici sont calculés par rapport aux lignels et non les points, ainsi les quantités géométriques sont estimées pour l'abscisse curviligne $k + \frac{1}{2}$ et tous les segments du faisceau incluent les points k et $k + 1$.

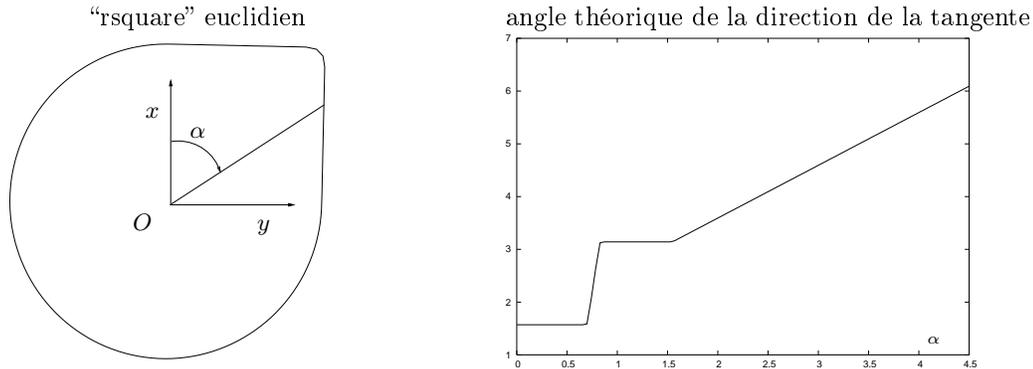


FIG. 4.1.4 – (gauche) La forme euclidienne “rsquare” et le repère associé pour le calcul des coordonnées polaires. (droit) Angle de la direction de la tangente théorique. Les points sur le bord de la forme sont repérés par l’angle de leurs coordonnées polaires.

Nous comparons tout d’abord le comportement des estimateurs de tangente sur les parties lisses, les parties plates et les coins. La forme est un cercle sur trois quadrants et a un angle droit dans le quatrième (voir la forme “rsquare” sur la Figure 4.1.4). La Figure 4.1.5 montre un sous-ensemble des estimations de l’angle de la tangente. Les estimateurs vérifiant la propriété de convexité/concavité, c’est à dire ET et λ -MST, donnent une suite non-décroissante d’angles. Les estimateurs ST et HT ne vérifient pas cette propriété et ce plus particulièrement sur les points proches d’un changement de quadrant. La plupart des estimateurs se comportent correctement sur les coins. λ -MST lisse légèrement le coin à basse résolution. Les estimateurs ET et FFT ont tendance à polygonaliser la courbe, ce comportement apparaît clairement sur la Figure 4.1.5c.

Ensuite nous évaluons l’anisotropie des estimateurs selon le procédé décrit sur la Figure 4.1.6. L’estimateur λ -MST est moins sujet aux changements de comportements selon les angles reconnus avec une erreur moyenne et maximale plus régulière.

Enfin nous examinons le comportement asymptotique de l’erreur absolue pour quelques formes sur le Tableau 4.1.1 : l’une de courbure constante (le cercle), une avec de fortes courbures (la fleur) et enfin une avec des parties plates et un coin (“rsquare”). Les estimateurs λ -MST et ET semblent converger en moyenne et en erreur maximale. Selon les résultats expérimentaux, l’erreur maximale de ST et de HT ne converge pas vers 0 comme prouvé dans [LdV05]. Bien que l’estimateur λ -MST ne soit pas toujours le meilleur en moyenne à basse résolution, il semble posséder le taux de convergence le plus rapide pour l’erreur moyenne et l’erreur maximale sur les formes considérées.

Nous avons comparé ici plusieurs estimateurs de tangente discrètes et après analyse de leurs défauts un nouvel estimateur discret a été proposé, répondant aux déficiences des précédents estimateurs. Tout d’abord cet estimateur vérifie les propriétés de convexité/concavité locales : il ne

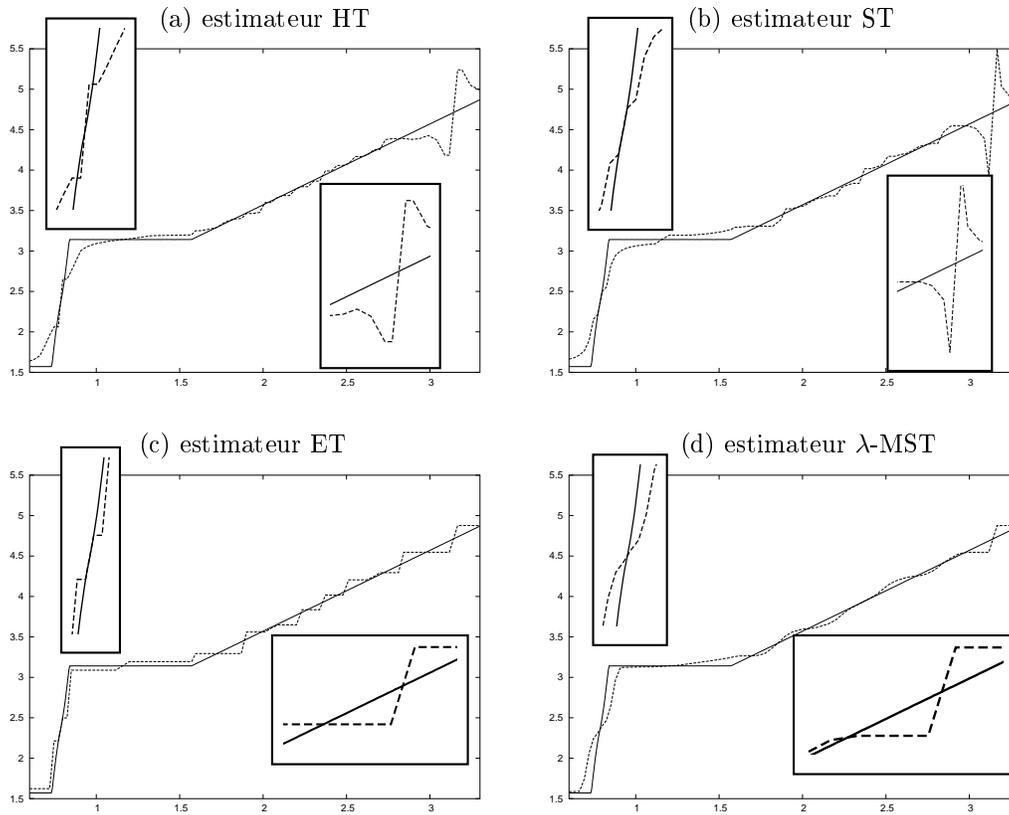


FIG. 4.1.5 – Tracé des estimations de l'angle de la tangente en fonction de l'angle repéré par les coordonnées polaires. La forme est un cercle de rayon 10 ayant un coin en forme d'angle droit dans le premier quadrant. Les lignes en traits pleins correspondent aux valeurs attendues, les lignes en tirets aux estimations lorsque le pas de la grille vaut 0.5. Pour l'estimateur λ -MST la fonction utilisée est la fonction triangle avec un pic en $\frac{1}{2}$.

crée pas de faux point d'inflexions sur les formes convexes discrètes. Expérimentalement la fonction triangle symétrique a été retenue comme fonction λ . Son bon comportement est vérifié (isotropie, reconnaissance des parties plates) et fait de l'estimateur λ -MST le plus robuste et le plus précis dans presque tous les cas. Les résultats sont résumés dans le Tableau 4.1.2.

Expérimentalement on observe que l'estimateur λ -MST semble converger ; la prochaine sous section tâchera de démontrer formellement sa convergence et de déterminer sa vitesse de convergence.

4.1.3 Preuve de convergence multi-grille

Nous commencerons cette section par un théorème montrant les relations entre les pentes des segments maximaux et la géométrie locale d'une forme euclidienne. Plus précisément nous montrerons que la direction des segments maximaux converge vers la direction de la tangente des points qu'ils couvrent. Cette preuve s'appuie sur un développement de Taylor au premier ordre, la convergence sera démontrée *localement* sur le bord de forme \mathcal{C}^3 .

Remarquons que pour des pas de grille suffisamment petits, tout point P du bord d'une forme euclidienne S possède des points discrets associés (voir la Définition 1.4.6), on dit que les segments maximaux contenant un ou plusieurs points discrets *associés* à un point du bord *couvrent* le point

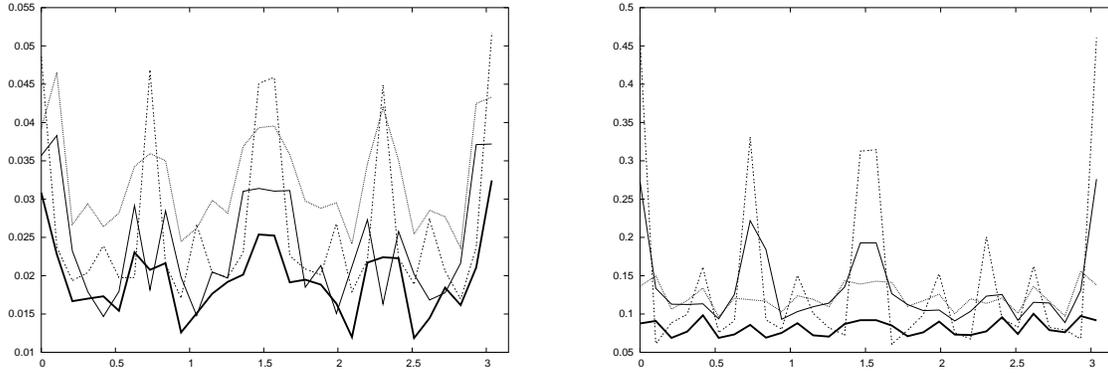


FIG. 4.1.6 – Isotropie des estimations de tangente mesurée par l’erreur absolue $|\hat{\theta}(t) - \theta(t)|$ (ligne épaisse en trait plein : λ -MST, ligne fine en trait plein : HT, ligne en tirets : ST, ligne en pointillé : ET). Gauche : moyenne de l’erreur absolue. Droite : maximum de l’erreur absolue. Pour chaque estimateur, 100 expériences sont faites sur les discrétisés d’un cercle de rayon 50 dont le centre a été déplacé arbitrairement dans le carré de côté 1 centré sur l’origine. L’erreur absolue est tracée en fonction de l’angle polaire et est moyennée sur des secteurs angulaires de largeur d’angle $\frac{5}{180}\pi$.

du bord considéré. Le faisceau d’un point discret n’étant jamais vide, ceux des points discrets associés à P ne le sont jamais non plus.

Théorème 4.1.4

Soit P un point sur le bord de S , avec S une forme de bord \mathcal{C}^3 . La direction des segments maximaux dans le faisceau d’un point associé à P tend vers la direction de la tangente au point P lorsque h tend vers 0.

Preuve:

Soit M_h un segment maximal contenant un point associé à P . Nous supposons que M_h est dans le premier octant et que P est l’origine du repère. Nous considérons que P est situé sur la partie gauche de M_h , l’autre cas étant symétrique. Notons l l’abscisse du point discret de M_h ayant l’abscisse maximale. Nous choisissons de paramétrer localement le bord de S , $\partial S(t) = \gamma(t) = (x(t), y(t))$, comme $(x, f(x))$. Soit Q le point du bord de S d’abscisse l , on a donc $Q = (l, f(l))$. La Figure 4.1.7 illustre les notations précédentes.

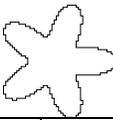
Soit $\epsilon(h)$ l’épaisseur verticale de M_h , i.e. la distance verticale entre les deux droites d’appui du segment M_h . Puisque M_h contient un point associé à P , la distance verticale entre P et les droites d’appui de M_h est majorée par $\epsilon(h) + h$, ceci est aussi vrai pour le point Q . Cette hypothèse est vérifiée pour les courbes \mathcal{C}^3 et la discrétisation de Gauss passé une certaine résolution, dépendante de la courbure euclidienne au point P . Si l’on note p_h la pente de M_h nous avons alors :

$$\forall x \in [0, l] \quad p_h x - \epsilon(h) - h \leq f(x) \leq p_h x + \epsilon(h) + h. \quad (4.1.3)$$

Considérons que P soit sur une partie linéaire de γ , alors tout segment maximal contenant un point associé à P s’étend jusqu’au bout d’un coté de la partie linéaire considérée. Ainsi si D est l’abscisse du point délimitant la fin de cette partie linéaire nous avons :

$$\forall x \in [0, D] \quad f(x) = f'(0)x \quad (4.1.4)$$

En substituant l’Équation (4.1.4) dans l’Équation (4.1.3) puis en choisissant $x = D$ et en résolvant cette équation pour p_h , il vient :

		cercle				fleur				rsquare			
													
		HT	ET	ST	λ-MST	HT	ET	ST	λ-MST	HT	ET	ST	λ-MST
erreur moyenne	$\frac{1}{10}$	0.0624	0.0830	0.0665	0.0541	0.1736	0.1364	0.1258	0.1541	0.0734	0.0876	0.0834	0.0529
	$\frac{1}{20}$	0.0411	0.0565	0.0443	0.0378	0.1050	0.0868	0.0756	0.0881	0.0501	0.0572	0.0560	0.0344
	$\frac{1}{40}$	0.0265	0.0367	0.0295	0.0218	0.0621	0.0561	0.0487	0.0519	0.0328	0.0357	0.0368	0.0194
	$\frac{1}{80}$	0.0174	0.0236	0.0185	0.0144	0.0364	0.0369	0.0311	0.0293	0.0204	0.0220	0.0220	0.0127
	$\frac{1}{160}$	0.0115	0.0152	0.0120	0.0086	0.0209	0.0232	0.0190	0.0165	0.0130	0.0137	0.0137	0.0080
	$\frac{1}{320}$	0.0077	0.0098	0.0079	0.0057	0.0128	0.0151	0.0123	0.0098	0.0081	0.0087	0.0084	0.0052
	$\frac{1}{640}$	0.0049	0.0062	0.0049	0.0035	0.0078	0.0095	0.0075	0.0059	0.0052	0.0054	0.0052	0.0032
	erreur maximale	$\frac{1}{10}$	0.5432	0.3887	0.7700	0.2934	1.2836	1.4821	1.2415	1.4821	0.5228	0.3858	0.7496
$\frac{1}{20}$		0.5267	0.2695	0.7840	0.1997	1.1753	1.2028	0.9831	1.1705	0.5201	0.2903	0.7775	0.1775
$\frac{1}{40}$		0.0353	0.0455	0.0383	0.0306	0.8760	0.9690	0.7803	0.9576	0.2871	0.2049	0.4701	0.1216
$\frac{1}{80}$		0.2717	0.1232	0.4639	0.0770	0.7220	0.7317	0.8201	0.6496	0.2151	0.1498	0.3270	0.0832
$\frac{1}{160}$		0.0137	0.0174	0.0142	0.0108	0.6070	0.5023	0.7796	0.3872	0.2671	0.1055	0.4645	0.0597
$\frac{1}{320}$		0.1395	0.0592	0.2450	0.0383	0.5269	0.3312	0.7931	0.2483	0.1809	0.0763	0.3202	0.0440
$\frac{1}{640}$		0.0935	0.0422	0.1651	0.0281	0.5018	0.2178	0.7878	0.1479	0.1359	0.0543	0.2452	0.0304
écart-type(10^{-3})		$\frac{1}{10}$	3.0355	4.6088	4.5854	2.2948	23.13	17.58	15.205	21.56	2.5668	3.7235	3.7503
	$\frac{1}{20}$	1.5298	2.0248	2.2530	0.9036	11.41	9.570	8.096	11.025	1.30458	1.7415	1.7463	0.8679
	$\frac{1}{40}$	0.6966	0.8301	0.9847	0.3411	5.05	4.478	4.004	4.480	0.5835	0.7531	0.7707	0.3395
	$\frac{1}{80}$	0.3139	0.3663	0.4497	0.1411	1.939	2.109	1.978	1.4257	0.2796	0.3439	0.3417	0.1488
	$\frac{1}{160}$	0.1382	0.1563	0.1885	0.0568	0.717	0.8563	0.845	0.4638	0.1224	0.1519	0.1405	0.0607
	$\frac{1}{320}$	0.0624	0.0673	0.0809	0.0247	0.296	0.3773	0.3821	0.1653	0.0616	0.0684	0.0674	0.0278
	$\frac{1}{640}$	0.0267	0.0281	0.0331	0.0100	0.121	0.1561	0.1537	0.0624	0.0244	0.0286	0.0266	0.0116

TAB. 4.1.1 – Erreur absolue moyenne et maximale, écart-type de la moyenne des erreurs absolues pour les estimateurs discrets de tangente, pour des pas de grille de plus en plus petits. La meilleure valeur est grisée. Les pas de la grille varient de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{640}$. Les courbures théoriques extrêmes des formes sont pour le “cercle” : $\kappa_M = \kappa_m = 1$, pour la “fleur” : $\kappa_M \approx 5.8$, $\kappa_m \approx -26.1$ et pour “rsquare” : $\kappa_M = 100$, $\kappa_m = 0$.

estimateur de tangente	parties droites	parties lisses	coins	convexité /concavité	isotropie	erreur moyenne	erreur maximale	convergence expérimentale
λ-MST	+	+	=	Oui*	+	++	++	Oui
HT	=	+/-	+	Non	-	+	-	Non
ET	+	=	+	Oui	=	+	+	Oui
ST	=	+/-	=	Non	-	+	-	Non

(*) Pour les fonctions λ vérifiant les conditions du Théorème 4.1.3.

TAB. 4.1.2 – Comparaison des estimateurs de tangente discrète. L’estimateur λ-MST a un comportement passable sur les coins mais semble être le meilleur partout ailleurs.

$$f'(0) - \frac{\epsilon(h) + h}{D} \leq p_h \leq f'(0) + \frac{\epsilon(h) + h}{D}$$

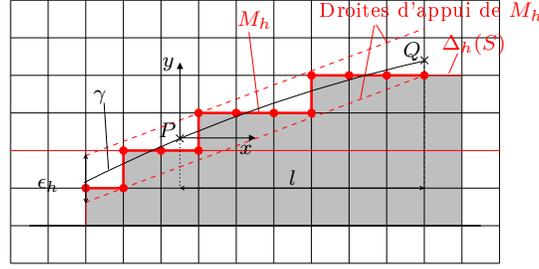


FIG. 4.1.7 – Illustration des notations utilisées dans la preuve du Théorème 4.1.4.

Puisque $0 < \epsilon(h) \leq 2h$, il suit :

$$f'(0) - \frac{3h}{D} \leq p_h \leq f'(0) + \frac{3h}{D}$$

Ce qui donne la relation asymptotique $\lim_{h \rightarrow 0} p_h = f'(0)$ pour les parties linéaires.

Considérons maintenant que γ soit \mathcal{C}^2 au voisinage de P , d'après le développement de Taylor de f , on obtient :

$$f(l) = lf'(0) + O(l^2) \quad (4.1.5)$$

Des Équations (4.1.5) et (4.1.3) il suit :

$$p_h l - \epsilon(h) - h \leq lf'(0) + O(l^2) \leq p_h l + \epsilon(h) + h \Leftrightarrow p_h = f'(0) \pm \frac{\epsilon(h) + h}{l} + O(l)$$

En notant $\mathcal{L}^1(M_h)$ la longueur discrète de M_h (i.e. le nombre de pas le constituant), la position du point Q sur le coté droit de M_h donne l'encadrement :

$$\frac{h\mathcal{L}^1(M_h)}{4} \leq l \leq h\mathcal{L}^1(M_h). \quad (4.1.6)$$

La combinaison des deux précédentes relations induit :

$$p_h = f'(0) \pm 4 \frac{\epsilon(h) + h}{h\mathcal{L}^1(M_h)} + O(h\mathcal{L}^1(M_h))$$

Puisque $0 < \epsilon(h) \leq 2h$ et que $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}^1(M_h) = +\infty$ (selon la Proposition 3.3.10), nous obtenons la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\epsilon(h) + h}{h\mathcal{L}^1(M_h)} = 0.$$

P étant sur une partie non-linéaire on a le bord de S au voisinage de P qui se comporte localement comme un cercle de rayon R . En utilisant le Lemme 3.3.9 et l'équivalence, en dimension 2, entre la norme 1 de Minkowski et la norme euclidienne, nous obtenons $h\mathcal{L}^1(M_h) = O(hR)^{1/2}$ dont la limite est 0 lorsque h tend vers 0. Ceci entraîne que la limite de la pente de M_h est telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_h = f'(0).$$

Nous avons ainsi prouvé que la direction de M_h (sa pente p_h) tend vers la direction de la tangente au point P (de pente $f'(0)$) sur des parties linéaires et sur des parties non linéaires du bord de la forme euclidienne. \square

Nous pouvons ainsi prouver la convergence multi-grille point-à-point de l'estimateur λ -MST et de l'estimateur FTT vers la direction de la tangente.

Théorème 4.1.5

Les estimateurs λ -MST et FTT sont multi-grille convergents point à point et tendent vers la direction de la tangente le long du bord de toute forme convexe ayant un bord \mathcal{C}^3 et de courbure continue. Une borne supérieure locale pour la vitesse de convergence est en $O\left(h^{\frac{1}{3}}\right)$, lorsque le pas de la grille h tend vers 0.

Preuve:

Soient S une telle forme, P un point du bord de S et $\theta(P)$ la direction de la tangente au point P . Soit (h_i) une décroissante de pas de grille tendant vers 0. Notons par P_{h_i} un point associé à P sur le bord discret de $DigG_h(S)$. Tout segment maximal dans le faisceau de P_{h_i} couvre P . Considérons maintenant l'estimation du λ -MST au point P_{h_i} :

$$\hat{\theta}(P_{h_i}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{P}(P_{h_i})} \lambda(e_j(P_{h_i})) \theta_j}{\sum_{j \in \mathcal{P}(P_{h_i})} \lambda(e_j(P_{h_i}))}.$$

La direction $\hat{\theta}(P_{h_i})$ est ainsi une combinaison convexe des directions de chaque segment maximal contenant P_{h_i} . Les segments maximaux dans le faisceau de P_{h_i} couvrent P . Ainsi, en vertu du Théorème 4.1.4, lorsque i tend vers l'infini, chaque segment maximal dans le faisceau de P_{h_i} à une direction tendant vers $\theta(P)$. Toute combinaison convexe de valeurs tendant vers $\theta(P)$ tend aussi vers $\theta(P)$. L'estimateur λ -MST est donc multi-grille convergent pour la direction de la tangente. Pour l'estimateur FTT, il suffit de remarquer que sa direction est déterminée par l'un des segments maximaux dans le faisceau de P_{h_i} , c'est-à-dire un segment maximal couvrant P ; le Théorème 4.1.4 permet alors de conclure.

Nous examinons maintenant la vitesse de convergence de ces estimateurs. De la preuve du Théorème 4.1.4, la vitesse de convergence de la direction d'un segment maximal couvrant un point sur une partie linéaire de γ est linéaire pour le pas de la grille. Elle est donc majorée par un $O(h)$. En utilisant les mêmes notations que précédemment nous obtenons pour les parties non-linéaires de γ :

$$p_h = f'(0) \pm 4 \frac{\epsilon(h) + h}{h \mathcal{L}^1(M_h)} + O(h \mathcal{L}^1(M_h))$$

Puisque $h \leq \epsilon(h) \leq 2h$, la vitesse de convergence du premier terme est celle de $\frac{1}{\mathcal{L}^1(M_h)}$. En vertu du Théorème 3.3.11, $\mathcal{L}^1(M_h)$ est minoré par $\Omega\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.

Pour le deuxième terme, rappelons que selon le Lemme 3.3.9 la longueur de tout segment standard est majorée en $\Theta\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)$.

Ceci implique alors que la vitesse de convergence de la direction des segments maximaux est majorée par $O(h^{\frac{1}{3}}) + O(\sqrt{h}) = O(h^{\frac{1}{3}})$. \square

La preuve précédente s'applique en fait à tous les estimateurs de tangente discrète basés sur une combinaison convexe des directions des segments maximaux. Cette classe d'estimateur est notée $\hat{\theta}^{\text{MS}}$ dans [Lac06]. La vitesse de convergence observée sur l'estimateur λ -MST semble plus rapide que $O(h^{\frac{1}{3}})$, du moins pour le cercle comme illustré sur la Figure 4.1.8.

Enfin, ainsi que Lachaud l'observe dans son HDR [Lac06], sous l'hypothèse de la Conjecture 3.4.2, nous pouvons apprécier la vitesse de convergence d'un estimateur de tangente basé sur les arêtes discrètes d'un PCD. La définition et les deux propositions suivantes utilisent les notations issues de son HDR. En particulier $\text{bd} \cdot$ est le bord topologique euclidien. Pour un ensemble discret bien composé \mathcal{E} , $\text{bd} \mathcal{E}$ est le bord topologique de \mathcal{E} en tant que sous ensemble de \mathbb{R}^2 (les points sont des carrés de côtés h). De plus, pour $x \in \text{bd} S$ et pour y appartenant à $\text{bd} DigG_h(S)$ tel que sa rétro-projection² soit x , les notations $l(x, h)$, $p(x, h)$, $q(x, h)$ et $\delta(x, h)$ désignent respectivement les paramètres $\delta(p + q)$, p , q et δ de l'arête discrète du CDP $DigG_h(S)$ qui contient

²Définie dans l'Annexe B de [Lac06].

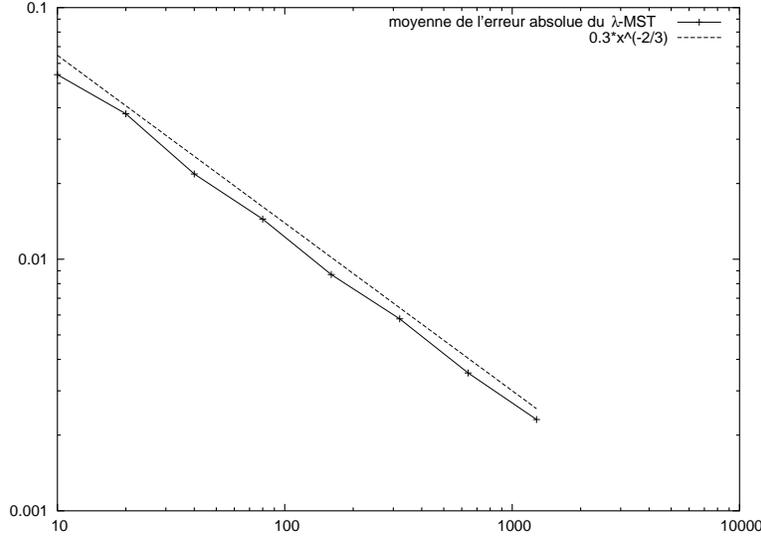


FIG. 4.1.8 – Tracé en échelle logarithmique de la moyenne de l'erreur absolue entre la direction estimée de la tangente par l'estimateur λ -MST et la direction de la tangente théorique. La fonction λ utilisée est la fonction triangle symétrique ayant un pic en $\frac{1}{2}$. La forme discrétisée est un disque de rayon 1. L'abscisse représente l'inverse du pas de la grille. La vitesse de convergence ici observée semble être en $\Theta(h^{\frac{2}{3}})$.

y .

Définition 4.1.6

On note $\hat{\theta}^{conv}$ l'estimateur fonctionnel discret de tangente à un CDP Γ , défini pour tout point y du bord de Γ comme la direction de l'arête discrète $[V_k V_{k+1}[$ contenant y .³

Ajoutons que $\theta(S, x)$ est la direction de la tangente au point x sur le bord de S .

Proposition 4.1.7

Soit $S \in \mathbb{F}_c^3$. Pour un pas h suffisamment petit, $\forall x \in \text{bd } S, \forall y \in \text{bd } \text{Dig}G_h(S), \|x - y\| \leq h$,

$$\|\hat{\theta}^{conv}(\text{bd } \text{Dig}G_h(S), y) - \theta(S, x)\| \leq \frac{2}{\delta(x, h)q_n(x, h)q_{n-1}(x, h)} + \mathcal{O}(h\delta(x, h)q_n(x, h)).$$

Si $l(x, h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes et si la Conjecture 3.4.2 est satisfaite, on a de plus

$$\|\hat{\theta}^{conv}(\text{bd } \text{Dig}G_h(S), y) - \theta(S, x)\| \leq \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right).$$

De même si l'on utilise la Proposition 3.1.16, la classe d'estimateur $\hat{\theta}^{MS}$ doit avoir le même comportement moyen que $\hat{\theta}^{conv}$:

Proposition 4.1.8

Soit $S \in \mathbb{F}_c^3$. Pour un pas h suffisamment petit, $\forall x \in \text{bd } S, \forall y \in \text{bd } \text{Dig}G_h(S)$, avec $\|x - y\| \leq h$. Si $l(x, h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes et si la Conjecture 3.4.2 est satisfaite, on a

$$\|\hat{\theta}^{MS}(\text{bd } \text{Dig}G_h(S), y) - \theta(S, x)\| \leq \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right).$$

Cette dernière proposition confirme la vitesse de convergence suggérée par la Figure 4.1.8.

³Il s'agit ici du bord discret de Γ .

4.2 Autres estimateurs discrets

L'estimation de la direction de la tangente n'est pas la seule quantité géométrique que l'on peut chercher à estimer. De nombreuses formules mathématiques utilisées en analyse de forme cherchent souvent à calculer des quantités géométriques telles que la position ou la courbure. Dans cette section nous discuterons des quantités géométriques liées au calcul de la courbure, pour finalement discuter de sa faisabilité sur la base du comportement asymptotique des segments discrets.

4.2.1 Estimation de la position

Nous cherchons ici à estimer la distance entre le bord d'une forme et le bord de son discrétisé. Cette notion se comprend bien en mesurant l'aire entre le bord d'une forme et celle de son discrétisé, mais est plus difficile à formaliser point-à-point. Ainsi Lachaud dans son HDR [Lac06] Annexe B propose d'utiliser une fonction de rétro-projection pour associer à un point du bord discret de $DigG_h(S)$ un point du bord de $bd S$. Par une étude fine des ensembles par(r)-régulier il parvient aussi à énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.2.1

Soit X par(r)-régulier. Soit $0 < h \leq r$. Tout point $x \in bd X$ est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de $bd DigG_h(X)$ (dans la direction de sa normale). Tout point $y \in bd DigG_h(X)$ est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de $bd X$ (aussi dans la direction de la normale de ce point le plus près). Autrement dit :

$$\forall x \in bd X, \exists y \in bd DigG_h(X), \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h).$$

$$\forall y \in bd DigG_h(X), \exists x \in bd X, \|x - y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h).$$

où $n(x, w)$ désigne le segment de longueur $2w$, centré en x et dirigé selon la normale à $bd X$ en x .

Ainsi si l'on définit un estimateur de position noté \hat{x} , de domaine $Dig_G(S, h)$ et qui estime $y \in bd Dig_G(S, h)$ comme la position sur $bd S$, il montre que cet estimateur est uniformément convergent et de vitesse de convergence h . Plus modestement, sous l'hypothèse de la Conjecture 3.4.2, nous pouvons déduire :

Proposition 4.2.2

Soit $S \in \mathbb{F}_c^3$ et $DigG_h(S)$ sa discrétisation de Gauss. Pour h suffisamment petit, dans chaque octant, la distance verticale entre toute arête de $DigG_h(S)$ et ∂S est bornée. En moyenne, cette borne est de l'ordre de $\mathcal{O}\left(h^{\frac{4}{3}}\right)$ (et jamais pire que $\mathcal{O}(h)$).

Preuve:

Il suffit d'utiliser la Proposition 3.1.5 conjuguée avec la Conjecture 3.4.2. □

Cette proposition implique donc qu'en moyenne la forme discrète se rapproche de la forme euclidienne plus rapidement qu'en effectuant une simple dilatation. Cependant si l'on peut trouver un point du bord de S tel que les arêtes discrètes qui le couvrent sont de longueurs bornées et ce quel que soit le pas de discrétisation, alors la forme discrète ne se rapprochera pas plus vite qu'une simple dilatation. La longueur de telles arêtes ne se comporte tout simplement pas comme la moyenne des longueurs des arêtes.

4.2.2 Estimation de l'angle moyen

Avant d'étudier la courbure, nous énonçons certains résultats élémentaires concernant les angles moyens ainsi que l'existence d'estimateurs de longueur multi-grille convergent.

Lemme 4.2.3

La différence d'angle moyenne entre les segments maximaux consécutifs sur les discrétisés de forme de \mathbb{F}_c^3 , notée Δ_{MS}^\ominus est égale à $\frac{2\pi}{n_{MS}}$. En asymptotique cette quantité est encadrée par :

$$\Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right) \leq \Delta_{MS}^\ominus \leq \Theta\left(h^{\frac{2}{3}} \log \frac{1}{h}\right)$$

Preuve:

La somme des différences des angles consécutifs est égale 2π . L'utilisation du Théorème 3.3.3 conclut immédiatement pour l'asymptotique. \square

De même la différence d'angle moyenne entre les arêtes suit un comportement semblable :

Lemme 4.2.4

La différence d'angle moyenne entre les segments maximaux consécutifs sur les discrétisés de forme de \mathbb{F}_c^3 , notée Δ_{EDGE}^\ominus est égale à $\frac{2\pi}{n_{EDGE}}$. En asymptotique cette quantité est encadrée par :

$$\Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right) \leq \Delta_{EDGE}^\ominus \leq \Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$$

Remarquons que si l'on admet que la longueur des parties communes des segments maximaux se comportent comme la longueur des arêtes, alors le Théorème 2.4.14 implique que la différence de pente entre deux segments maximaux consécutifs est bien de l'ordre de $\Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$.

4.2.3 Estimation de la courbure

La courbure est une quantité géométrique très importante pour apprécier les traits caractéristiques des formes. Nous rappelons la définition d'un estimateur de courbure discret basé sur le cercle circonscrit utilisant une fenêtre de calcul reposant sur les demi-tangentes discrètes (voir [CT01, Coe02, CMT01]) :

Définition 4.2.5 [Estimateur discret par cercle circonscrit]

Soit P un point du bord de la discrétisation d'une forme euclidienne S pour la pas de discrétisation h , Soient les points discrets $Q = B(P)$ et $R = F(P)$ étant les extrémités des segment discrets les plus longs à gauche et à droite de P . Alors l'estimation de courbure par cercle circonscrit en P est l'inverse du rayon du cercle circonscrit à P, Q et R , multiplié par h .

La convergence de cet estimateur a déjà été étudiée dans la thèse de D. Coeurjolly, en particulier le Théorème B.4 de [Coe02] montre la convergence multi-grille moyenne de cet estimateur sous la contrainte de la conjecture suivante :

Conjecture 4.2.6 [Coe02]

Les demi-tangentes discrètes sur les bords des discrétisés grandissent (en nombre de pas) en moyenne à la vitesse $\Theta\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)$.

Cependant les demi-tangentes sont incluses dans les segments maximaux, et le comportement moyen des segments maximaux suit, comme l'indique le Théorème 3.3.7 :

$$\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \leq L_{MS}(S, h) \leq \Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}} \log \frac{1}{h}\right).$$

La conjecture s'avère ainsi non vérifiée, invalidant la preuve de convergence multi-grille de l'estimateur par cercle circonscrit. Cependant plusieurs questions restent ouvertes. Premièrement cet estimateur est-il convergent *point-à-point* dans le voisinage de points pour lesquels la discrétisation est telle que les segments maximaux grandissent en $\Theta\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)$. Deuxièmement cet estimateur

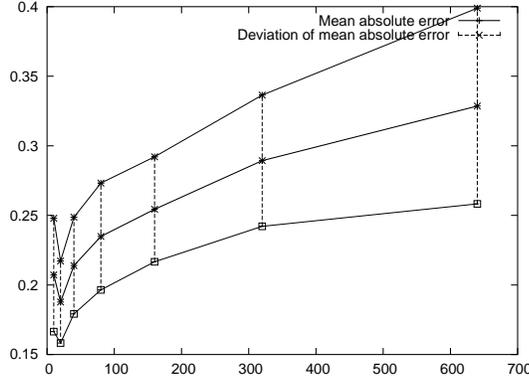


FIG. 4.2.1 – Erreur absolue moyenne et déviation standard de l'estimateur de courbure par cercle circonscrit sur un cercle de rayon 1. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation.

de courbure est-t-il convergent en moyenne, étant donnée la vitesse moyenne de croissance des segments maximaux. À ce sujet les expérimentations semblent laisser penser qu'il ne l'est pas (voir Figure 4.2.1). Enfin troisième point, est-il possible de construire un estimateur de courbure convergent utilisant uniquement une fenêtre de calcul qui est basée sur les segments standards ?

À ce sujet il est important de remarquer que le Lemme 4.2.3 et le Théorème 3.3.7 confirment les doutes quant à la possibilité de construire un tel estimateur. Considérons l'une des définitions mathématiques de la courbure :

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$$

Du point de vue d'un estimateur discret basé sur les segments maximaux cette formule met en jeu $d\theta$ qui est estimé par la variation d'angle entre deux segments maximaux consécutifs, cette quantité se comporte en moyenne en $\Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$. D'autre part la quantité ds est vue ici comme le déplacement infinitésimal nécessaire pour obtenir la variation d'angle des segments maximaux. Cette quantité est donc de l'ordre de la longueur des segments maximaux soit en $\Theta\left(h^{\frac{2}{3}}\right)$ ici aussi. Les ordres des quantités géométriques de ce rapport laissent supposer qu'il ne diverge pas, mais qu'il ne converge pas non plus vers la courbure. L'on obtiendrait une erreur constante, dont l'expression dépendrait probablement de la courbure au point considéré (cf. Théorème 3.3.11 sur la borne inférieure de la croissance des segments maximaux). Pour assurer la convergence il faudrait probablement augmenter la taille de la fenêtre de calcul. Par exemple si au voisinage d'un point particulier d'une certaine forme euclidienne, les segments maximaux grandissent (en nombre de points) plus vite que $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, disons $\Theta\left(\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{3}+\beta}\right)$ avec $\beta > 0$. Alors leurs longueurs du point de vue du plan euclidien sont en $\Theta\left(h^{\frac{2}{3}-\beta}\right)$, et en considérant le même rapport que précédemment on obtiendrait cette fois une convergence en $\mathcal{O}\left(h^{\beta}\right)$.

4.3 Estimateurs continus

Nous présentons ici quelques résultats expérimentaux sur deux estimateurs continus et comparons leurs comportements avec l'estimateur λ -MST. Les estimateurs étudiés sont : un estimateur de tangente par filtre médian [MSK95] et un estimateur de tangente par approximation par une parabole [TLC05].

4.3.1 Estimateur de tangente par filtre médian

Nous présentons les résultats expérimentaux de cet estimateur, brièvement présenté au premier chapitre. Cet estimateur ne peut converger asymptotiquement du fait du paramètre dont il dépend : la fenêtre de calcul. En utilisant une échelle logarithmique sur les expérimentation cet estimateur fait une erreur moyenne constante passé une certaine résolution et ce en fonction de la taille de fenêtre choisie, voir la Figure 4.3.1.

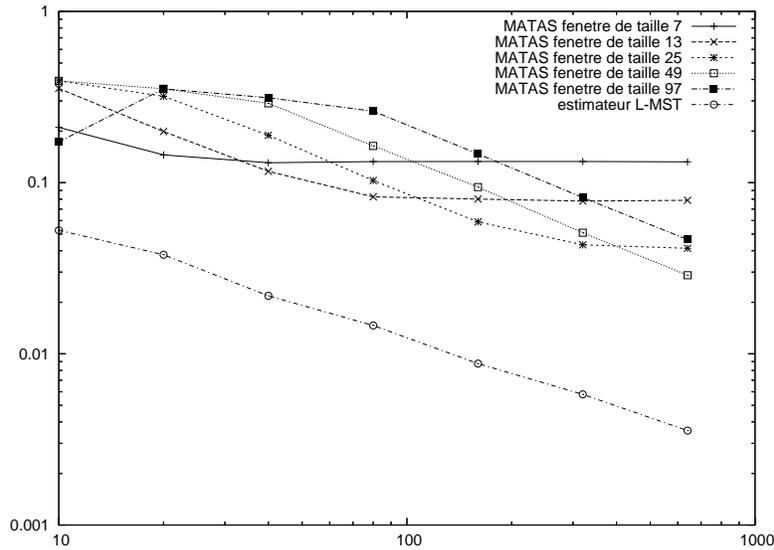


FIG. 4.3.1 – Tracé en échelle logarithmique de l'erreur absolue moyenne de l'estimateur de tangente de Matas *et. al.* sur un cercle de rayon 1. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation.

Ajoutons que même à base résolution, cet estimateur semble avoir des défauts similaires à ceux de l'estimateur de tangente symétrique : une très mauvaise estimation pour des points particuliers autour des changements de quadrants, la Figure 4.3.2.

4.3.2 Approximation par une parabole

Nous utilisons ici la méthode décrite dans [TLC05] qui est comme Lewiner *et. al.* l'indiquent un cas particulier de [CP05]. Cette méthode considère une paramétrisation $(x, f(x))$ pour la courbe sous-jacente où f est un polynôme d'ordre 2; la courbe sous-jacente est donc supposée être une parabole. Ensuite on cherche à minimiser les valeurs de la dérivée première et seconde de f au point d'intérêt C_0 (choisit comme origine du repère) selon l'erreur définie par :

$$E(f'(0), f''(0)) = \sum_{i=-q}^q \left(y_{C_i} - f'(0)x_{C_i} - \frac{1}{2}f''(0)x_{C_i}^2 \right)^2$$

Les solutions $f'(0)$ et $f''(0)$ sont calculées explicitement (le problème est ramené classiquement à la résolution d'un système linéaire utilisant des matrices de Vandermonde). Le choix de la fenêtre de calcul n'est pas évident même sur la discrétisation d'une forme très régulière comme le cercle, en pratique on observe des résultats moins bons que ceux de l'estimateur λ -MST, comme l'atteste les Figure 4.3.3 et 4.3.4.

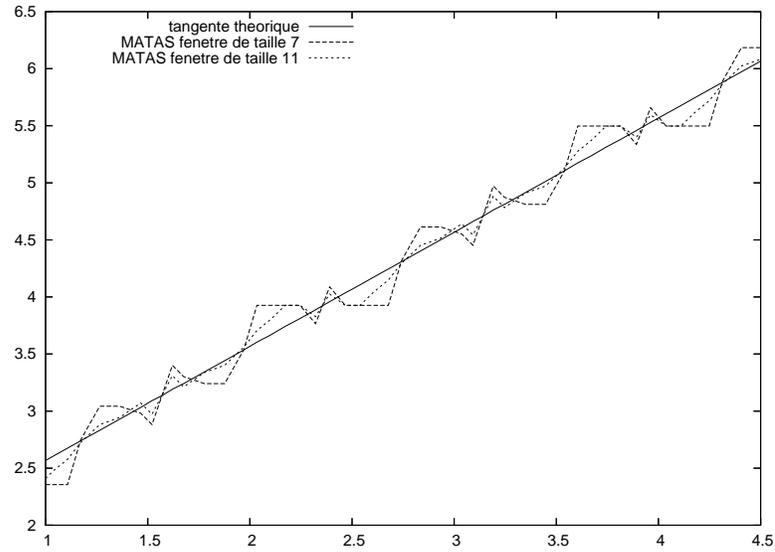


FIG. 4.3.2 – Tracé de l'angle de tangente en fonction de l'angle des points repérés en coordonnées polaires. La forme est un cercle de rayon 1 discrétisée pour un pas de grille égal à 0,1. Trait plein : tangente théorique ; avec des tirets : estimateur de Matas *et. al.* sur une fenêtre de calcul de taille 7 ; en pointillés : estimateur de Matas *et. al.* sur une fenêtre de calcul de taille 11.

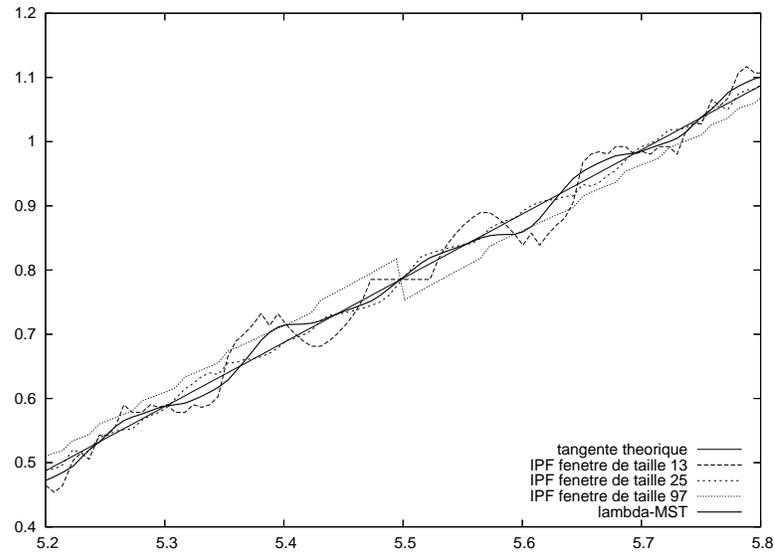


FIG. 4.3.3 – Tracé de l'angle de tangente en fonction de l'angle des points repérés en coordonnées polaire sur l'intervalle $[5, 2; 5, 8]$. La forme est un cercle de rayon 1 discrétisée pour un pas de grille égal à 0,01. Trait plein : tangente théorique ; avec des tirets épais : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 13 ; en tirets fins : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 25 ; en pointillés : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 97 ; en pointillés et tirets : estimateur discret λ -MST avec la fonction triangle symétrique.

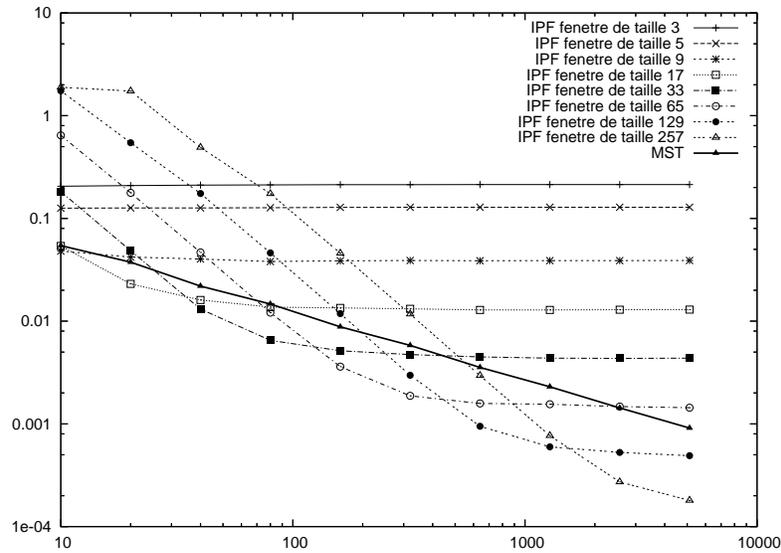


FIG. 4.3.4 – Tracé en échelle logarithmique de la moyenne de l'erreur absolue de l'estimateur de tangente utilisant l'approximation par une parabole, comparée avec l'estimateur λ -MST. La forme de référence est un cercle. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation. L'estimateur λ -MST apparaît ici être clairement meilleur.

4.4 Conclusion

Ce chapitre s'est concentré sur l'une des applications pratiques du comportement des segments maximaux : l'estimation de tangente. Nous avons proposé un nouvel estimateur appelé λ -MST et son bon comportement a été clairement établi. En le comparant à deux autres méthodes continues, son potentiel pour des applications en reconnaissance de forme semble très intéressant, surtout si les courbes à analyser sont de grandes tailles et que l'application nécessite une bonne précision de calcul.

Nous avons aussi indiqué les raisons qui nous poussent à croire que l'estimation de courbure sur la base des segments maximaux et plus généralement des parties linéaires n'est pas réalisable dans le cas général. Ces remarques induisent que la reconnaissance et l'extraction des caractéristiques des parties quadratiques des courbes discrètes pourraient certainement apporter des réponses au problème de l'estimation de la courbure.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a présenté de nombreux résultats sur les comportements des parties linéaires en combinant l'approche issue de la géométrie arithmétique et celle d'une description combinatoire basée sur les fractions continues. De plus ces résultats ont été généralisés aux discrétisés de formes finies convexes et lisses, ce qui nous a permis d'utiliser ces propriétés pour prouver la convergence multi-grille d'estimateurs discrets de tangente et de position, conséquence du comportement des parties linéaires. Nous synthétisons ici ces résultats chapitre par chapitre avant d'évoquer les pistes de recherches qui peuvent être dégagées de l'ensemble de ces travaux ainsi que les questions qu'ils soulèvent.

5.1 Synthèse

Chapitre 1 :

Ce chapitre a d'abord brièvement étudié la discrétisation de Gauss, notamment les conditions sous lesquelles nous avons conservation de la topologie et conservation de la convexité (Lemme 1.1.18). Il apparaît d'ailleurs que sous des hypothèses plus larges (forme de bord \mathcal{C}^2 au lieu de \mathcal{C}^3), ces propriétés sont conservées (voir [Lac06]). Pour la partie concernant les estimateurs locaux nous avons proposé des critères objectifs pour pouvoir les comparer (Section 1.3.4). Une extension de la définition de convergence multi-grille a été proposée pour les estimateurs locaux (Définition 1.4.7).

Chapitre 2 :

Nous nous sommes attachés à présenter les parties linéaires discrètes selon l'approche issue de la géométrie arithmétique et nous l'avons conjuguée avec une description combinatoire basée sur les fractions continues. Nous avons d'abord rappelé l'algorithme initial de Debled-Rennesson pour la reconnaissance des segments discrets et avons aussi rappelé ses extensions pour le retrait des points qui permet un calcul incrémental des segments discrets. La combinaison des deux approches nous a permis d'obtenir des propriétés sur la structure des segments discrets (Lemme 2.3.6 par exemple) et sur les liens entre l'arbre de Stern-Brocot et la reconnaissance des segments discrets. Ces résultats ont induit des propriétés géométriques sur les segments maximaux (Théorème 2.4.14).

Chapitre 3 :

Cette partie s'est concentrée sur une étude fine des liens entre la convexité et les segments maximaux, en particulier les relations entre les arêtes d'un PCD et les segments maximaux. Ces considérations ont amené de nombreux résultats : sur la position de la courbe convexe (Proposition 3.1.5), les types possibles de segments maximaux sur un PCD (Définitions 3.1.9 et 3.1.11), la façon dont ils peuvent être placés (Propositions 3.1.13, 3.1.14 et 3.1.15) et leurs contraintes vis-à-vis des pentes d'arêtes (Proposition 3.1.16). Ces relations s'expriment aussi par l'absorption des arêtes par un segment maximal (Théorème 3.2.3), le nombre des segments maximaux (Théorème 3.2.5), leurs longueurs locales (Propositions 3.2.6 et 3.2.7) et la somme de leurs longueurs (Théorème 3.2.11).

Les résultats précédents ont été étendus par l'étude asymptotique sur les discrétisés de formes finies lisses et convexes, reposant sur le théorème de Balog et Bárány. Nous avons ainsi obtenu les ordres de grandeurs pour le nombre de segments maximaux (Théorème 3.3.3) et leur longueur moyenne (Théorème 3.3.7). Enfin après une brève étude expérimentale des paramètres des arêtes sur des cercles discrets, nous avons été amenés à formuler une conjecture sur le comportement des paramètres décrivant les arêtes discrètes (Conjecture 3.4.2).

Chapitre 4 :

Ce chapitre a tout d'abord effectué une comparaison des estimateurs de tangente discrète basés sur les parties linéaires, et ce, selon les critères préconisés au premier chapitre (Section 1.3.4). Il apparaît ainsi très distinctement que l'estimateur de tangente discret proposé, appelé λ -MST, est probablement l'un des meilleurs existant. À cela nous avons ajouté la preuve de sa convergence multi-grille (Théorème 4.1.4). Nous avons aussi défriché les problèmes de l'estimation de la courbure basée sur la reconnaissance des segments discrets, notre opinion étant qu'elle n'est pas réalisable. Enfin nous avons mené quelques expériences avec d'autres estimateurs de tangente qui n'utilisent pas la reconnaissance de segments discrets. Il apparaît ici que ces méthodes sont moins précises et ne respectent pas la convergence multi-grille, montrant ainsi que les méthodes discrètes ont un fort potentiel pour l'extraction des caractéristiques géométriques.

5.2 La question des autres estimateurs et des parties quadratiques

Tout d'abord nous avons prouvé la convergence multi-grille des estimateurs de tangente basés sur les segments maximaux. Peut-être pourrions nous prouver la convergence moyenne de l'estimateur basé sur les tangentes symétriques, confirmant ainsi la convergence moyenne de l'estimateur de normales proposé par Coeurjolly [Coe02] sous des hypothèses différentes. La réutilisation des estimateurs de tangente pourrait être utilisée pour les estimateurs de longueurs, ceci faciliterait probablement les preuves de convergence de ces estimateurs. Lachaud propose aussi dans son HDR la notion de convergence multi-grille uniforme, ce qui permet d'ajouter un critère objectif supplémentaire pour le choix d'un estimateur, et probablement l'un des meilleurs. Les preuves de ce type de convergence sont plus ardues mais plus fortes, donnant plus de "garanties" d'un bon comportement que la convergence point-à-point.

D'autre part une preuve formelle concernant la non-convergence des estimateurs de courbures basés sur les parties linéaires nous semble importante et ce pour deux raisons : tout d'abord cela confirmerait l'intuition donnée par le comportement moyen des longueurs des parties linéaires, prouvant ainsi leur limites. Ensuite cela motiverait naturellement la recherche d'algorithmes pour la reconnaissance et l'extraction des parties quadratiques discrètes. Bien que ces pistes soient étudiées depuis de nombreuses années, il n'existe, à notre connaissance, aucune étude sur le comportement de ces parties (longueur, nombre, décomposition canonique).

Il y a fort à parier que le comportement de ces parties révélera de nombreuses pistes de recherche et ouvrira peut-être la voie pour la reconnaissance de parties discrètes d'ordre quelconque. Le but étant à terme de pouvoir formaliser, pour une forme euclidienne, une sorte de développement de Taylor par rapport au pas de discrétisation, de telles propriétés pourraient peut-être permettre d'attaquer la résolution d'équations différentielles d'une façon purement discrète et ce en utilisant l'arithmétique entière.

5.3 La question de la dimension trois

Une question qui se pose naturellement à la fin de ce mémoire est de se demander comment se comportent les parties linéaires des objets discrets en dimension trois ? Il nous semble que pour répondre à cette question, il faudrait déterminer un algorithme utilisant uniquement la géométrie arithmétique pour reconnaître ces parties et ce afin de comprendre comme dans le cas des segments discrets quels sont les objets mathématiques sous-jacents. On penserait naturellement aux fractions continues bi-dimensionnelles, et ce même si elles se révèlent insuffisantes pour approcher des plans de pentes irrationnelles. D'autre part même si l'on sait reconnaître des parties linéaires en dimension trois, la formalisation des différentes classes de plans discret est bien plus ardue que celle des segments.

Ajoutons que le théorème de Balog et Bárány utilisé dans ce mémoire est déjà généralisé aux dimensions quelconques, laissant entrevoir la possibilité d’une réutilisation similaire au cas de la dimension deux si l’on parvient à surmonter un autre problème difficile : relier les facettes de l’enveloppe convexe aux plans discrets. Ici aussi, le comportement des parties linéaires en dimension trois pourrait aider à concevoir un développement de Taylor par rapport au pas de discrétisation. Bien sûr l’intérêt de l’étude des parties quadratiques en dimension trois est immense mais cet objectif semble encore bien trop difficile pour l’instant.

5.4 La question des autres discrétisations

L’utilisation du théorème de Balog et Bárány impose la discrétisation de Gauss, mais une question légitime est de savoir si les ordres de grandeurs mis en jeu restent les mêmes en changeant de discrétisation, par exemple en choisissant une discrétisation par aire. Sur ce sujet notre opinion est que le comportement global n’est pas changé. Une première piste est de considérer que la discrétisation par aire pour ν égal à $\frac{1}{2}$ et la discrétisation de Gauss tendent vers le même objet discret à l’infini. En effet pour des pas de discrétisation suffisamment petits, la continuité de la forme euclidienne implique que le bord de la forme traversant une cellule est quasiment une droite. Ainsi pour obtenir une aire valant la moitié de celle de la cellule ou plus, l’intérieur de la forme intersecté avec la cellule contient le centre de cette cellule. C’est à dire la discrétisation de Gauss. D’autre part il nous semble clair que sur le bord des discrétisations extrêmes, $Dig_C(\mathcal{X})$ et $Dig_\cap(\mathcal{X})$, le comportement des tangentes discrètes est le même que sur le bord de la discrétisation de Gauss. L’intuition est que pour un point du bord de la forme euclidienne les tangentes discrètes associées à ce point sur le bord des discrétisations $Dig_C(\mathcal{X})$, $Dig_\cap(\mathcal{X})$ et $Dig_{G_{\mathcal{X}}}$ pour des petits pas de discrétisation ont des pentes très similaires ou identiques. Il suffit de prendre les discrétisations d’un demi-plan pour s’en convaincre. Bien sûr les mêmes arguments peuvent être utilisés pour les discrétisations par aire. Par conséquent il nous semble que le théorème de Balog et Bárány peut aussi s’appliquer au cas des discrétisations par aire. Induisant naturellement le même comportement des parties linéaires.

5.5 La question des autres pavages

Une question fondamentale qui est soulevée par le comportement des parties linéaires est de savoir si ce comportement est dépendant de la grille discrète choisie. Notre opinion sur ce sujet est que les ordres de grandeur des comportements des parties linéaires restent inchangés vis-à-vis des autres pavages réguliers (triangulaire et hexagonal). L’intuition est que l’on obtient le pavage triangulaire par “cisaillement” et subdivision du pavage carré (voir Figure 5.5.1). Tout ensemble de cellules carrées A du plan discret est contenu dans un ensemble de cellules triangulaires, le plus petit ensemble de cellules triangulaires contenant A est tel que le rapport du nombre de cellules entre A et T est une constante. On peut établir le même rapport entre le pavage hexagonal et le pavage triangulaire, donc aussi du pavage carré au pavage hexagonal. Ainsi l’ordre de grandeur des parties linéaires ne dépend pas du pavage choisi.

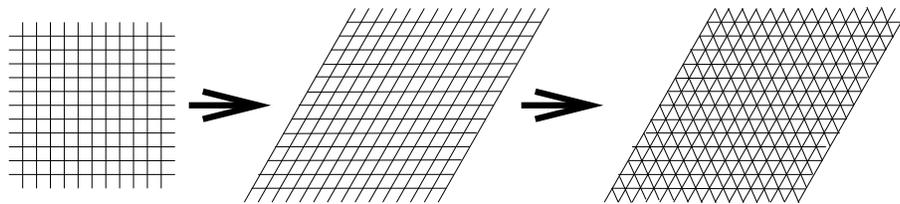


FIG. 5.5.1 – Du pavage carré au pavage triangulaire.

Bibliographie

- [And92] E. Andres. *Cercles Discrets et Rotations Discrètes*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg (France), 1992.
- [BB91] A. Balog and I. Bárány. On the convex hull of the integer points in a disc. In *SCG '91 : Proceedings of the seventh annual symposium on Computational geometry*, pages 162–165. ACM Press, 1991.
- [Ber90] J. Berstel. *Mots, Mélanges offerts à M.P. Schützenberger*, chapter Tracé de droites, fractions continues et morphisme itérés, pages 298–309. Hermès, 1990. In french.
- [Bro74] R. Brons. Linguistic methods for description of a straight line on a grid. *Computer Graphics Image Processing*, 2 :48–62, 1974.
- [BV99] J.-P. Braquelaire and A. Vialard. Euclidean paths : a new representation of boundary of discrete regions. *Graphical Models and Image Processing*, 61(1) :16–43, 1999.
- [CK04] D. Coeurjolly and R. Klette. A comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2) :252–258, 2004.
- [CM91] J.M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète en analyse d'image*. HERMES, 1991.
- [CMT01] D. Coeurjolly, S. Miguet, and L. Tougne. Discrete curvature based on osculating circle estimation. In C. Arcelli, L.P. Cordella, and G. Sanniti di Baja, editors, *Proc. 4th Int. Workshop on Visual Form (IWVF4)*, LNCS 2059, pages 303–312. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Coe02] D. Coeurjolly. *Algorithmique et géométrie pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. PhD thesis, Université Lyon 2, Décembre 2002.
- [CP05] F. Cazals and M. Pouget. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets. *Computer Aided Geometric Design*, 22 :121–146, 2005.
- [CT01] D. Coeurjolly and O. Teytaud. Multigrid convergence of discrete differential estimators : Discrete tangent and length estimation. Technical Report 0101, Laboratoire ERIC, Université Lumière - Lyon 2, France, 2001.
- [DGB90] S. Dulucq and D. Gouyou-Beauchamps. Sur les facteurs des suites de Sturm. (On the factors of the Sturmian sequences.). *Theor. Comput. Sci.*, 71(3) :381–400, 1990.
- [DR95] I. Debled-Rennesson. *Etude et reconnaissance des droites et plans discrets*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1995.
- [DRR95] I. Debled-Rennesson and J.-P. Réveillès. A linear algorithm for segmentation of discrete curves. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9 :635–662, 1995.
- [DS84] L. Dorst and A. W. M. Smeulders. Discrete representation of straight lines. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 6 :450–463, 1984.

- [dVLF05] F. de Vieilleville, J.-O. Lachaud, and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. In H. Kalviainen, J. Parkkinen, and A. Kaarna, editors, *14th Scandinavian Conference on Image Analysis*, number 3540 in LNCS, pages 988–997. Springer-Verlag, 2005.
- [E.K82] C. E.Kim. Digital convexity, straightness, and convex polygons. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 6(6) :618–626, 1982.
- [FdV05] J.-O. Lachaud F. de Vieilleville. New bounds on the number and length of maximal segment on convex digital polygons. Research Report 1364-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.
- [FdVF05] J.-O. Lachaud F. de Vieilleville and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. Research Report 1350-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.
- [FdVF07] J.-O. Lachaud F. de Vieilleville and F. Feschet. Convex digital polygons, maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 27(2) :139–156, 2007.
- [Fre70] H. Freeman. Boundary encoding and processing. *Pictures Processing and Psychopictorics*, 1970.
- [FT99] F. Feschet and L. Tougne. Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : application to the curvature. In *Discrete Geometry and Computer Imagery (DGCI)*, LNCS 1568, pages 31–40. Springer Verlag, 1999.
- [FT03] F. Feschet. and L. Tougne. On the Min DSS Problem of Closed Discrete Curves. In A. Del Lungo, V. Di Gesù, and A. Kuba, editors, *IWCIA*, volume 12 of *Electronic Notes in Discrete Math.* Elsevier, 2003.
- [FT05] F. Feschet and L. Tougne. On the min dss problem of closed discrete curves. *Discrete Applied Math.*, 151(1-3) :138–153, 2005.
- [HL83] A. S. Hayes and D. C. Larman. The vertices of the knapsack polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 6 :135–138, 1983.
- [IDR06] D. Jamet I. Debled-Rennesson, E. Domenjoud. Arithmetic discrete parabolas. In *Proc. International Symposium on Visual Computing*, pages 480–489, Novembre 2006.
- [Kov89] V. A. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 46 :141–161, 1989.
- [Kov90] V.A. Kovalevsky. New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs. In *Proc. 10th Intl. Conf. on Pattern Recognition*, pages 31–34, 1990.
- [KR02] R. Klette and A. Rosenfeld. Digital straightness - a review. *Discrete Applied Mathematics*, 43 :1–40, 2002.
- [KR04a] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry - Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- [KR04b] R. Klette and A. Rosenfeld. Digital straightness : a review. *Discrete Appl. Math.*, 139(1-3) :197–230, 2004.
- [KZ06] Reinhard Klette and Jovisa D. Zunic. On discrete moments of unbounded order. In *DGCI*, pages 367–378, 2006.
- [Lac06] J.-O. Lachaud. Espaces non-euclidien et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète, 2006. Habilitation à diriger des recherches.
- [LCG98] L. J. Latecki, C. Conrad, and A. Gross. Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 8(2) :131–159, mar 1998.

- [LdV05] J.-O. Lachaud and F. de Vieilleville. On the convergence of some local geometric estimators on digitized curves. Research Report 1347-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.
- [LdV06] J.-O. Lachaud and F. de Vieilleville. Convex shapes and convergence speed of discrete tangent estimators. In *Advances in Visual Computing*, volume 4292 of *LNCS*, pages 688–697. Springer, 2006.
- [LLR95] U. Eckhardt L. Latecki and A. Rosenfeld. Well-composed sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 8 :61 :70, 1995.
- [Lot87] M. Lotahire. *Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 1987. 2nd. ed.
- [Lot02] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 2002.
- [LV03] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Geometric measures on arbitrary dimensional digital surfaces. In *Proc. DGCI'03*, volume 2886 of *LNCS*, pages 434–443. Springer, 2003.
- [LVdV05] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In E. Andrès, G. Damiand, and P. Lienhardt, editors, *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France*, volume 3429 of *LNCS*, pages 240–251. Springer, 2005.
- [LVdV06] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image and Vision Computing*, XX(YY) :ZZ, 2006. To appear.
- [MSK95] J. Matas, Z. Shao, and J. Kittler. Estimation of curvature and tangent direction by median filtered differencing. In *Proc. of 8th International Conference on Image Analysis and Processing*, pages 83–88, 1995.
- [RDDR04] H. Reiter-Doerksen and I. Debled-Rennesson. Convex and concave parts of digital curves. In *Dagstuhl Seminar "Geometric Properties from Incomplete Data"*, March 2004.
- [Ros74] A. Rosenfeld. Digital straight line segments. *IEEE Trans. Computers*, 23 :1264–1269, 1974.
- [Ré91] J.-P. Réveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991. In french.
- [SDC03] I. Sivignon, F. Dupont, and J.-M. Chassery. New results about digital intersections. In *Proc. DGCI'03*, volume 2886 of *LNCS*, pages 102–113. Springer, 2003.
- [SDC04] I. Sivignon, F. Dupont, and J.-M. Chassery. Digital intersections : minimal carrier, connectivity and periodicity properties. 66 :226–244, 2004.
- [She81] V. N. Shevchenko. On the number of extreme points in linear programming. *Kibernetika*, 2 :133–134, 1981. In russian.
- [Siv04] I. Sivignon. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surfaces en géométrie discrète*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, France, 2004.
- [TAO01] R. Klette T. Asano, Y. Kawamura and K. Obokata. Minimum-length polygons in approximation sausages. In *Visual Form 2001 : 4th International Workshop on Visual Form*, number 2059 in *LNCS*. Springer Berlin / Heidelberg, 2001.
- [TD03] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In *DGCI'2003, Lecture Notes in Computer Science*, volume 2886 of *LNCS*, pages 114–123. Springer, 2003.
- [TLC05] Hélio Lopes Thomas Lewiner, João D. Gomes Jr. and Marcos Craizer. Curvature and torsion estimators based on parametric curve fitting. *Computers and Graphics*, 29 :641–655, 2005.

- [Tro93] A. Troesch. Interprétation géométrique de l'algorithme d'euclide et reconnaissance de segment. *Theoretical Computer Science*, 115(2) :291–319, 1993.
- [Via96] A. Vialard. *Chemins euclidiens : un modèle de représentation des contours discrets*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, 1996.
- [Vos93] K. Voss. *Discrete Images, Objects, and Functions in \mathbb{Z}^n* . Springer-Verlag, 1993.
- [Whi49a] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy i. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(3) :213–245, 1949.
- [Whi49b] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy ii. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(5) :453–496, 1949.
- [Wu82] L.D. Wu. On the chain code of a line. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4 :347–353, 1982.

Table des figures

1.1.1	Trois pavages réguliers possibles en dimension deux. De gauche à droite : carré, triangulaire, hexagonal.	11
1.1.2	Grille orthogonale régulière dans le plan avec les différents types de cellule.	11
1.1.3	Un point du plan discret en noir avec ses 4-voisins (gauche) et ses 8-voisins (droite) en blanc.	12
1.1.4	De gauche à droite et de haut en bas : discrétisation de Gauss, par sous-ensemble carré, par intersection et par aire ($\nu = \frac{1}{6}$) d'une ellipse.	14
1.1.5	Plan euclidien et grille discrète de pas h superposé.	15
1.1.6	Convexe de \mathbb{R}^2 dont la discrétisation de Gauss est toujours déconnectée quel que soit le pas de discrétisation $h \leq 1$	16
1.1.7	Cette configuration spatiale des points et sa rotation à 90 degrés ne peuvent être présentes dans $Dig(r, A)$ sous les conditions du Théorème 1.1.17.	16
1.1.8	Points discrets triangulaires à un triplet de points. Les trois points en noir représentent le triplet, en blanc les points dits triangulaires. L'ensemble obtenu (points blancs et points noirs) est 8-connexe.	17
1.2.1	Exemple de 4-chemins n'étant pas des 4-arcs, certains points ayant plus de deux 4-voisins.	20
1.2.2	À gauche une 8-courbe sépare son complémentaire en deux composantes 4-connexes. À droite une 4-courbe sépare son complémentaire en deux composantes 8-connexes.	20
1.2.3	Problème possible pour la définition du bord en tant que points du plan discret. En gris les points de l'objet, les traits représentent le bord.	21
1.2.4	Décomposition de cellules carrées en leurs éléments de dimensions inférieures. En gris clair les 2-cellules, en gris foncé les 1-cellules, en noir les 0-cellules.	22
1.2.5	Ensemble des 0-cellules et des 1-cellules associées au bord d'un objet bien composé en dimension deux.	23
1.2.6	Bord d'un objet exprimé selon le code de Freeman à partir du point entouré : 011030030323221221.	24
1.3.1	Discrétisation de Gauss de formes réelles donnant la même discrétisation.	29
1.4.1	Discrétisations de Gauss d'un demi plan dans le premier quadrant. L'estimation de longueur de son bord (par intégration des longueurs élémentaires des pas horizontaux et verticaux le constituant) ne change pas avec la résolution.	33
1.4.2	Bord d'une forme continue, son bord discret associé par discrétisation de Gauss, et les points discrets associés à un point de la courbe continue.	34
2.1.1	(a) Codes de Freeman ; (b) portion du graphe de la demi-droite $\gamma_{\alpha,\beta}$, (en gris) sous-ensemble des points de $I_{\alpha,\beta}$; (c) un préfixe du mot infini défini par le chemin associé à $I_{\alpha,\beta}$ en code de Freeman.	39

2.1.2	Positions des points faiblement extérieurs sur une droite standard de caractéristiques (3, 10, 12). Les carrés représentent les points faiblement extérieurs : U' pour les supérieurs et L' pour les inférieurs. Les cercles représentent les points d'appui : U pour les supérieurs et L pour les inférieurs.	44
2.1.3	Portion d'une droite standard de caractéristiques (10, 23, 0) entre l'origine et son deuxième point d'appui inférieur. On remarque que $\frac{10}{23} = [0, 2, 2, 3]$, la pente de cette droite est donc de complexité impaire.	47
2.2.1	(gauche) Ensemble de points du plan discret ; (droite) Contraintes associées dans l'espace des paramètres (α, β)	49
2.2.2	Ajout d'un point à gauche d'un segment standard. (a) Segment standard $C_{i+1,j}$. (b) Le point C_i se situe juste au-dessus de la droite d'appui supérieure et son ajout va faire décroître la pente du segment. (c) Segment discret $C_{i,j}$. Sa pente et les points d'appui U'_l et L'_r doivent être mis à jour.	52
2.2.3	Exemple de retrait d'un point pour un segment de pente $[0, 2, 3, 2]$ contenant deux points d'appui supérieurs et un point d'appui inférieur. Les cercles représentent les points d'appui avant le retrait du point M , les carrés représentent les nouveaux points d'appui après le retrait du point M . En haut le segment avant le retrait du point M ; en dessous les notations de l'algorithme présenté dans la Table 2.2.3. . .	54
2.2.4	Exemple de retrait d'un point pour un segment de pente $[0, 2, 3, 2]$ contenant deux points d'appui inférieurs et un point d'appui supérieur. Les cercles représentent les points d'appui avant le retrait du point M , les carrés représentent les nouveaux points d'appui après le retrait du point M . En haut le segment avant le retrait du point M ; en dessous les notations de l'algorithme présenté dans la Table 2.2.3. . .	57
2.3.1	Le motif impair $E(z_{2l-1}) \prec_s E(z'_{2i+1}) \prec_s E(z_{2l+1})$	60
2.3.2	Construction de l'arbre de Stern-Brocot sur les deux premières itérations.	63
2.3.3	Représentation partielle de l'arbre de Stern-Brocot et des complexités des noeuds associés. Les noeuds de complexité un sont $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ceux de complexité deux sont $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$, ceux de complexité trois sont $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{7}$ et celui de complexité quatre est $\frac{5}{8}$	63
2.3.4	Évolution de la pente d'un segment standard sur l'arbre de Stern-Brocot. Les valeurs successives de la pente sont $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$. Les changements de pente sont déclenchés par l'ajout de points supérieurs faiblement extérieurs. Les pentes alors obtenues sont de complexité un, trois et quatre.	64
2.3.5	Interprétation sur l'arbre de Stern-Brocot, en termes de déplacements dans les noeuds, de l'évolution de la pente d'un segment standard par l'algorithme DR_1995 . Le schéma sépare le cas où la pente est paire (en haut) et impaire (en bas). Le point U' (resp. L') est un point supérieur (resp. inférieur) faiblement extérieur ajouté à gauche du segment (colonne de gauche) ou à sa droite (colonne de droite).	65
2.3.6	Pentes pouvant être atteintes lorsque l'on ajoute un point faiblement extérieur au motif de pente $\frac{1}{2}$. Les cercles représentent les noeuds de complexité paire et les carrés en pointillés représentent les noeuds de complexité impaire. L'_l et U'_l (resp. L'_r et U'_r) représentent des points inférieurs et supérieurs faiblement extérieurs ajoutés à gauche (resp. à droite). Les symboles δ et δ' désignent respectivement le nombre de motifs et de motifs-renversés. Ainsi " $L'_r \wedge \delta' = 1$ " signifie que l'on a ajouté un point inférieur faiblement extérieur à droite d'un segment standard de pente $\frac{1}{2}$ contenant un motif-renversé.	65
2.4.1	Couverture tangentielle d'un contour discret. Chaque segment maximal est représenté par sa boîte rectangulaire englobante. Gauche : la forme discrète est un disque de rayon 14 pour un pas de grille valant 1. Droite : la forme discrète est une "fleur" présentant de fortes variations de courbure et de nombreux points d'inflexion.	67

2.4.2 Deux segments maximaux consécutifs et leur partie commune. Les carrés représentent les points délimitant la partie commune des deux segments maximaux consécutifs. Les nombres représentent les restes relatifs par rapport au segment standard $C_{i,j}$ de certains points. Sur cet exemple on peut voir que les deux points qui délimitent la partie commune sont tous deux des points inférieurs faiblement extérieurs. 70

2.4.3 Position et index des segments maximaux sur un contour C en fonction de l'indice des points. Ici le premier point du premier segment maximal est le point d'index zéro. 71

3.1.1 Cet exemple ne peut pas être la discrétisation d'une forme localement convexe S . La pente définie par U'_1 et E' est inférieure à celle définie par U'_1 et B' , E' étant dans le complémentaire de S . Les caractéristiques (a, b) de la droite standard Z sont $(5, 7)$. 79

3.1.2 Discrétisation d'une forme localement convexe S . Tout cercle séparant l'intérieur de l'extérieur a un rayon fini majoré par le rayon du cercle circonscrit à A'' , U' et B'' . 80

3.1.3 Une arête constituée d'un seul motif de pente $\frac{2}{7}$ sur une partie d'un polygone convexe discret. Le point P est le point le plus proche de l'arête $[V_1, V_2]$ 81

3.1.4 Deux contraintes locales exprimées sur l'arête d'un PCD pour la forme réelle convexe sous-jacente. Le bord de la forme sous-jacente se trouve nécessairement entre les parties pleines. 81

3.1.5 Une arête support et son segment maximal associé. Les sommets de l'arête sont entourés par un cercle en pointillé et les points d'appui du segment sont entourés par un carré en pointillé. Le segment maximal considéré admet trois points d'appui supérieurs et trois points d'appui inférieurs. 83

3.1.6 Un segment maximal supporté par un sommet sur une portion d'un PCD. Le sommet support est entouré par un cercle en pointillé et les points d'appui du segment maximal associé sont entourés par un carré en pointillé. 84

3.2.1 Deux exemples de construction où un segment maximal en position ULU absorbe le plus d'arêtes possible. Les points d'appui sont entourés par un carré en pointillé. On remarquera que dans le cas de la pente $[0, 1, 1, 2]$ (figure du bas) le segment maximal ne peut absorber que cinq arêtes. 91

3.2.2 Polygone convexe discret dont le bord admet 4 segments maximaux, chacun contenant 7 arêtes discrètes. Le PCD admet 24 arêtes discrètes au total. 94

3.3.1 La courbe discrétisée est un disque de rayon 1, l'axe des abscisses représentant la résolution de la discrétisation. On représente ici le tracé en échelle logarithmique de la taille moyenne des segments maximaux mesurée avec la norme 1 de Minkowski. 102

3.3.2 Une bande contenant un segment standard sur le bord du discrétisé d'un cercle de rayon R 103

3.4.1 Discrétisé d'un cercle de rayon 1 centré sur l'origine et sur lequel on peut trouver quatre arêtes de longueur 2 en des points particuliers. Le pas de discrétisation appartient à l'intervalle $\left] \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{17}} \right]$ 106

3.4.2 Tracés en échelle logarithmique des moyennes des paramètres $\frac{q}{7}$ (gauche) et δ (droite) pour les arêtes du PCD formant la discrétisation de Gauss d'un disque de rayon 1. On représente en abscisses l'inverse $\frac{1}{h}$ du pas de discrétisation, les barres d'erreurs représentent l'écart-type. 107

4.1.1 Illustration des différentes définitions de tangente discrète. Le point d'intérêt est repéré en blanc ainsi que les segments standards associés à la tangente discrète. (a) Tangente symétrique (ST). (b) Tangente étendue (ET), identique sur cet exemple à la tangente de Feschet-Tougne (FTT). (c) Demi-tangentes gauche et droite (HT). (d) Tangente étendue (ET) et tangente symétrique (ST) identiques sur cet exemple et qui sont parfaitement centrées. (e) Tangente de Feschet-Tougne (FTT) Le point d'intérêt est complètement rejeté à l'une des extrémités. 111

4.1.2	Estimation de la tangente le long du bord du discrétisé d'un arc de cercle. Fausse concavité détectée par ST (a) ET et FTT ne détectent pas de fausse concavité (b).	111
4.1.3	Calcul de l'excentricité e sur un point du contour discret (en noir) relativement à un segment maximal (en blanc).	112
4.1.4	(gauche) La forme euclidienne "rsquare" et le repère associé pour le calcul des coordonnées polaires. (droit) Angle de la direction de la tangente théorique. Les points sur le bord de la forme sont repérés par l'angle de leurs coordonnées polaires.	113
4.1.5	Tracé des estimations de l'angle de la tangente en fonction de l'angle repéré par les coordonnées polaires. La forme est un cercle de rayon 10 ayant un coin en forme d'angle droit dans le premier quadrant. Les lignes en traits pleins correspondent aux valeurs attendues, les lignes en tirets aux estimations lorsque le pas de la grille vaut 0.5. Pour l'estimateur λ -MST la fonction utilisée est la fonction triangle avec un pic en $\frac{1}{2}$.	114
4.1.6	Isotropie des estimations de tangente mesurée par l'erreur absolue $ \hat{\theta}(t) - \theta(t) $ (ligne épaisse en trait plein : λ -MST, ligne fine en trait plein : HT, ligne en tirets : ST, ligne en pointillé : ET). Gauche : moyenne de l'erreur absolue. Droite : maximum de l'erreur absolue. Pour chaque estimateur, 100 expériences sont faites sur les discrétisés d'un cercle de rayon 50 dont le centre a été déplacé arbitrairement dans le carré de côté 1 centré sur l'origine. L'erreur absolue est tracée en fonction de l'angle polaire et est moyennée sur des secteurs angulaires de largeur d'angle $\frac{5}{180}\pi$.	115
4.1.7	Illustration des notations utilisées dans la preuve du Théorème 4.1.4.	117
4.1.8	Tracé en échelle logarithmique de la moyenne de l'erreur absolue entre la direction estimée de la tangente par l'estimateur λ -MST et la direction de la tangente théorique. La fonction λ utilisée est la fonction triangle symétrique ayant un pic en $\frac{1}{2}$. La forme discrétisée est un disque de rayon 1. L'abscisse représente l'inverse du pas de la grille. La vitesse de convergence ici observée semble être en $\Theta(h^{\frac{2}{3}})$.	119
4.2.1	Erreur absolue moyenne et déviation standard de l'estimateur de courbure par cercle circonscrit sur un cercle de rayon 1. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation.	122
4.3.1	Tracé en échelle logarithmique de l'erreur absolue moyenne de l'estimateur de tangente de Matas <i>et. al.</i> sur un cercle de rayon 1. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation.	123
4.3.2	Tracé de l'angle de tangente en fonction de l'angle des points repérés en coordonnées polaires. La forme est un cercle de rayon 1 discrétisée pour un pas de grille égal à 0,1. Trait plein : tangente théorique ; avec des tirets : estimateur de Matas <i>et. al.</i> sur une fenêtre de calcul de taille 7 ; en pointillés : estimateur de Matas <i>et. al.</i> sur une fenêtre de calcul de taille 11.	124
4.3.3	Tracé de l'angle de tangente en fonction de l'angle des points repérés en coordonnées polaire sur l'intervalle $[5, 2; 5, 8]$. La forme est un cercle de rayon 1 discrétisée pour un pas de grille égal à 0,01. Trait plein : tangente théorique ; avec des tirets épais : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 13 ; en tirets fins : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 25 ; en pointillé : approximation par une parabole sur une fenêtre de calcul de taille 97 ; en pointillé et tirets : estimateur discret λ -MST avec la fonction triangle symétrique.	124
4.3.4	Tracé en échelle logarithmique de la moyenne de l'erreur absolue de l'estimateur de tangente utilisant l'approximation par une parabole, comparée avec l'estimateur λ -MST. La forme de référence est un cercle. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation. L'estimateur λ -MST apparaît ici être clairement meilleur.	125
5.5.1	Du pavage carré au pavage triangulaire.	130

Liste des tableaux

2.1.1 Restes des 4-voisins d'un point à une droite arithmétique de pente $\frac{a}{b}$	42
2.1.2 Restes relatifs, indices et code de Freeman des points situés entre deux points d'appui supérieurs consécutifs (dont l'un est l'origine) de la droite standard de caractéristiques $(2, 7, 0)$	43
2.2.1 Algorithme DR_1995 pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on ajoute un point M à la droite du segment. On suppose que $S \cup M$ est un ensemble 4-connexe.	51
2.2.2 Algorithme DR_1995 pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on ajoute un point M à la gauche du segment. On suppose que $S \cup M$ est un ensemble 4-connexe.	51
2.2.3 Algorithme DR_1995 pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on retranche le point M situé à l'extrémité gauche du segment.	55
2.2.4 Algorithme DR_1995 pour un segment standard dont la pente est dans le premier octant auquel on retranche le point M situé à l'extrémité droite du segment.	56
2.4.1 Algorithme pour calculer le successeur d'un segment maximal à partir d'un segment maximal.	69
3.2.1 Constructions des $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour $n = 2i + 1$	92
3.2.2 Constructions des $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour $n = 2i$	93
4.1.1 Erreur absolue moyenne et maximale, écart-type de la moyenne des erreurs absolues pour les estimateurs discrets de tangente, pour des pas de grille de plus en plus petits. La meilleure valeur est grisée. Les pas de la grille varient de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{640}$. Les courbures théoriques extrêmes des formes sont pour le "cercle" : $\kappa_M = \kappa_m = 1$, pour la "fleur" : $\kappa_M \approx 5.8$, $\kappa_m \approx -26.1$ et pour "rsquare" : $\kappa_M = 100$, $\kappa_m = 0$	116
4.1.2 Comparaison des estimateurs de tangente discrète. L'estimateur λ -MST a un comportement passable sur les coins mais semble être le meilleur partout ailleurs.	116