Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète

Jacques-Olivier Lachaud[1]

[1]LaBRI - Université Bordeaux 1

soutenance d'HdR - 6 décembre 2006

Domaine de recherche

Analyse d'image I

Segmentation/Reconstruction (forme, partition)

continu
approche variationnelle, EDP
$I \equiv \mathbb{R}^n$ euclidien

- modèle déformable
- modèle déformable riemannien

discret/comb.
approche bayésienne, coupes dans graphes
$I \equiv$ graphe

- structuration
- modèle déformable discret

?

Extraction de caractéristiques (invariants, géométrie)

continu
analyse, approximation,

- traitement signal
- Tenseur structure

discret/comb.

- géométrie discrète
- topologie discrète et combinatoire
- surface discrète
- invariants topo.

- géométrie riemannienne

- géométrie discrète
- surface discrète

- géométrie euclidienne

asymptotique ?

Plan

1. Contexte et motivations : modèles déformables
2. Modèle déformable en géométrie riemannienne
3. Modèle déformable en géométrie discrète
4. Surfaces discrètes : représentation, géométrie, topologie
5. Géométrie discrète asymptotique

Plan

Segmentation d'image par modèles déformables

- recherche d'une composante significative dans une image I
- approche basée contours, sans *a priori* sur la forme finale

$\Rightarrow$ problème assez difficile

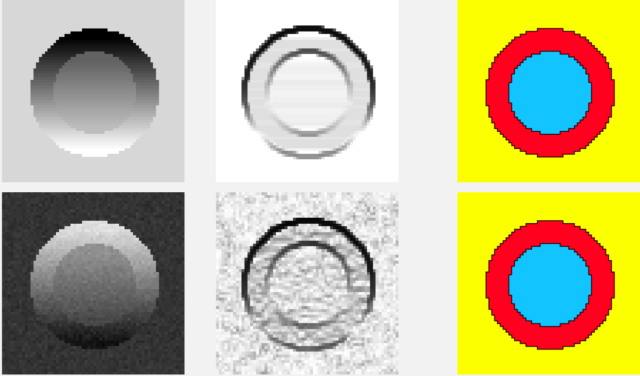
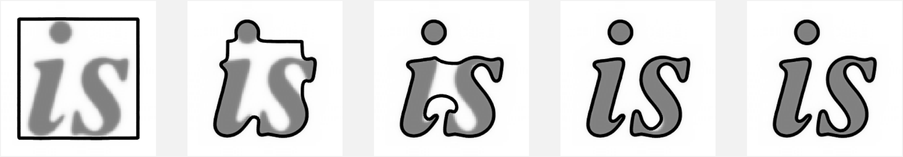


Image I — gradient $|\nabla I|$ — segmentation idéale

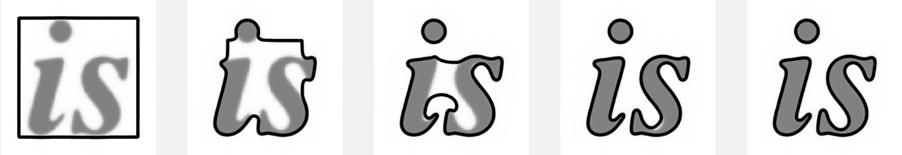
Segmentation d'image par modèles déformables

Modèle déformable = méthode itérative



Segmentation d'image par modèles déformables

Modèle déformable = méthode itérative



Modèle déformable

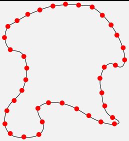
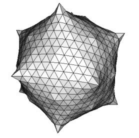
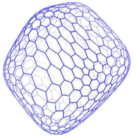
Approche variationnelle
= Famille de formes + critère(forme,I) + optimisation

Critère

balance adéquation avec l'image et régularité de la forme
critère(forme, I) = adéquation(forme,I) + régularité(forme)

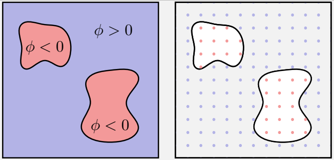
Applications en vision, imagerie médicale, vidéo, synthèse d'image, ...

Modèles déformables : approches classiques

catégorie	Explicite (snakes, etc.)
Formes (2D)	courbe/surface paramétrée et/ou échantillonnée $C \; : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
Exemple	  
Critère	$\int_C \underbrace{\alpha\|C'(s)\|^2 + \beta\|C''(s)\|^2}_{\text{régularisation}} + \underbrace{P(I, C(s))}_{\text{adéquation}} \, ds$
Optimisation	$\gamma C_t = \underbrace{-2\alpha C'' + 2\beta C^{(4)}}_{\text{régularisation}} - \nabla P$

[Kass *et. al.* 87, Terzopoulos *et. al.* 88, Cohen 91,. . .]

Modèles déformables : approches classiques

catégorie	Implicite (level-sets)
Formes (2D)	courbe/surface implicite échantillonnée $\Phi \ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, S = \{\Phi = 0\}$
Exemple	
Critère	(contour actif géodésique) $\underbrace{\int_S \overbrace{g(I,S)}^{\text{adéquation}} \, ds}_{\text{régularisation}}$
Optimisation	$\Phi_t = g(I,\cdot)(c_0 + \underbrace{\kappa}_{\text{régularisation}})\lvert\nabla\Phi\rvert + \nabla g \cdot \nabla\Phi$

[Caselles *et. al.* 93, Malladi *et. al.* 94, Caselles *et. al.* 97, Yezzi 97,. . .]

Modèles déformables : complexité

Image I, de taille N^d. Forme C d'aire $|C|$. Pas h. $P = \frac{|C|}{h^{d-1}}$.

catégorie	explicite (snakes, etc.)	implicite (level-sets)
nb de variables	$P \approx \Theta(N^{d-1})$	N^d
déplacement	P	N^d [Osher Sethian88] $K_1 P$ [Adalsteinson95] $K_2 P \log P$ [Strain99]
changement de topologie	N^d (T-snake, [McIT95,97]) P (2D, maille simplexe [DM99]) $P \log P$ (2-3D δ-snake [LM99]) $P \log P$ (2-4D simpliciale [BLS03])	naturel
En résumé	au mieux $\Theta(N^{d-1})$	au mieux $\Theta(N^{d-1})$

Première problématique : complexité en temps

	complexité / itération :	fct nb de variables
$\times$	nb d'itérations :	fct init., vitesse déplacement
$=$	complexité segmentation	

Comment rendre cette complexité plus indépendante de celle de l'image ?

- meilleure initialisation (spécifique à l'application)
- approche multirésolution [Elomary 94,Ronfard 94,. . .]
- adaptabilité locale [Delingette 94,Bredno *et. al.* 03,. . .]
- augmentation pas d'intégration [Weickert *et. al.* 03,. . .]
- amélioration des forces [Xu Prince 98,. . .]

Conclusion : nb de variables $\propto$ résolution de I, déplacement max $< \frac{h}{2}$
$\Rightarrow$ complexité très dépendante de la résolution de I

Deuxième problématique : minimum local $\neq$ optimum

évolution EDP $\Rightarrow$extraction d'un minimum local

Comment espérer trouver l'optimum dans l'espace des formes ?

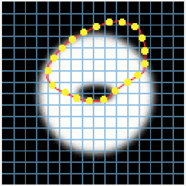
- initialisation (spécifique à l'application)
- « convexification » fonctionnelle [Zhu Yuille 96,Jehan-Besson *et. al.* 03,. . .]
- optimum dans des cas particuliers [Cohen Kimmel 97, Deschamps Cohen 01, Ardon Cohen 05]
- discrétisation partielle + programmation dynamique [Amini *et. al.* 90,Tagare 97, Gunn 97,. . .]
- méthodes combinatoires de segmentation : qqs résultats d'optimalité

Conclusion : version combinatoire des modèles déformables ?

Démarche : changement de la géométrie

Indépendance complexité et résolution ?

Géométrie riemannienne

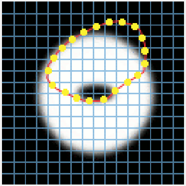


Géométrie euclidienne

Analogue combinatoire des modèles déformables ?

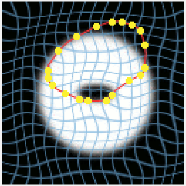
Géométrie discrète

Démarche : changement de la géométrie



Indépendance complexité et résolution ?

Géométrie riemannienne



Géométrie euclidienne

Analogue combinatoire des modèles déformables ?

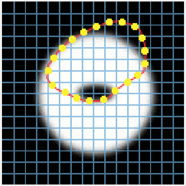
Géométrie discrète

Géométrie riemannienne

Déformer l'espace pour densité adaptée à l'information image.

Démarche : changement de la géométrie

Indépendance complexité et résolution ?

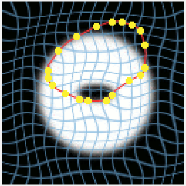


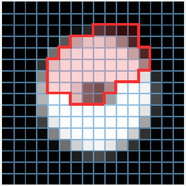
Analogue combinatoire des modèles déformables ?

Géométrie riemannienne

Géométrie euclidienne

Géométrie discrète





Géométrie discrète

Estimateurs géométriques discrets pour approcher formulation variationnelle.

Plan

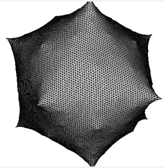
Modèle déformable riemannien : principe

Problématique

Réduire le nombre de variables, diminuer le nombre d'itérations.

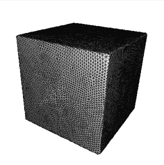
Idée directrice

- concentrer l'effort de calcul au voisinage des zones d'intérêt
- adapter la densité des variables selon la position dans l'image
- utiliser la géométrie riemannienne, qui peut déformer l'espace



(euclidien)

itérations . . .



densité de variables uniforme dans l'espace **euclidien**

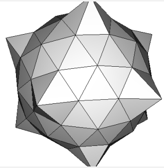
Modèle déformable riemannien : principe

Problématique

Réduire le nombre de variables, diminuer le nombre d'itérations.

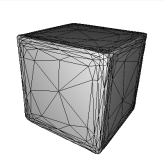
Idée directrice

- concentrer l'effort de calcul au voisinage des zones d'intérêt
- adapter la densité des variables selon la position dans l'image
- utiliser la géométrie riemannienne, qui peut déformer l'espace



(riemannien)

itérations ...

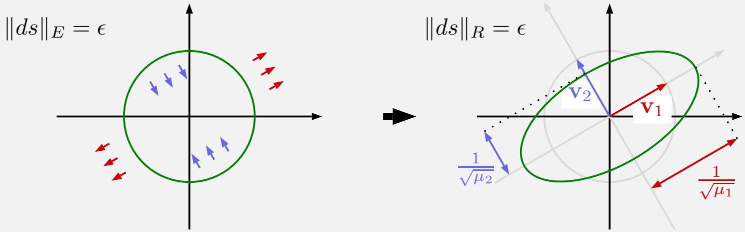


densité de variables uniforme dans l'espace **riemannien**

adaptative dans l'espace **euclidien**

Géométrie riemannienne : déformer l'espace

Norme/produit scalaire variable en tout point de l'espace $\mathbb{R}^n$



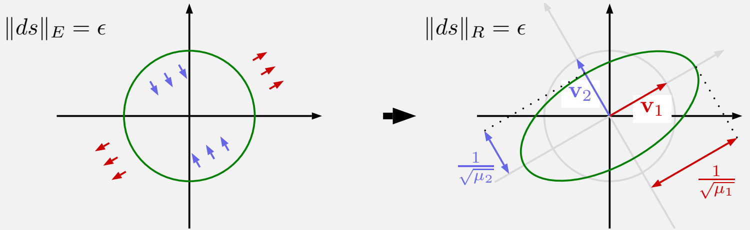
	euclidien	riemannien au point **x**
$\mathbf{ds}^2 =$	$(dx^1 \cdots dx^n) \times {}^T(dx^1 \cdots dx^n)$	$(dx^1 \cdots dx^n) \times G(\mathbf{x}) \times {}^T(dx^1 \cdots dx^n)$

où la matrice G, symétrique, définie positive, dépend de l'origine $\mathbf{x}$ du déplacement, de valeurs/vecteurs propres $(\mu_i, \mathbf{v}_i)$.

- application $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x})$ appelée **métrique**
- longueur chemin γ : $\mathrm{L}_\mathrm{R}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{{}^T\gamma'(t) \times G(\gamma(t)) \times \gamma'(t)}\, dt$
- distance de u à v $d_R(u, v)$: plus court chemin riemannien

Géométrie riemannienne : déformer l'espace

Norme/produit scalaire variable en tout point de l'espace $\mathbb{R}^n$



euclidien | riemannien au point $\mathbf{x}$

$$\mathbf{ds}^2 = \quad (dx^1 \cdots dx^n) \times {}^T(dx^1 \cdots dx^n) \qquad (dx^1 \cdots dx^n) \times G(\mathbf{x}) \times {}^T(dx^1 \cdots dx^n)$$

où la matrice G, symétrique, définie positive, dépend de l'origine $\mathbf{x}$ du déplacement, de valeurs/vecteurs propres $(\mu_i, \mathbf{v}_i)$.

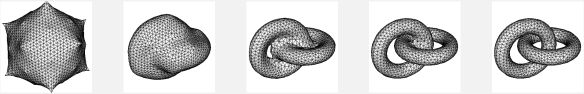
Définition de la métrique G

En tout point de l'image, choix de

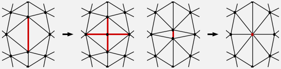
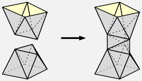
- n directions orthogonales $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$
- n coefficients de dilatation $\mu_1, \ldots, \mu_n$

MD sensible à une métrique

- Modèle déformable initial [Lachaud Montanvert 99]



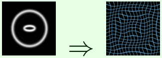
- Adaptation de topologie basée *distance euclidienne* d_E

sommets	contrainte	si non-satisfaite
(u, v) voisins	$\delta \leq d_E(u, v) \leq \zeta\delta$	
(u, v) non-voisins	$\lambda\zeta\delta \leq d_E(u, v)$	

Substitution de d_E par une mesure riemannienne d_R

- sur-estimer distances autour des zones d'intérêt ⇒ densité plus grande
- sous-estimer distances partout ailleurs ⇒ densité plus faible

Métrique riemannienne adaptée à l'image



- Construction *automatique* de la métrique
- Approche contour : structures pertinentes autour contours forts

contour en $\mathbf{x}$

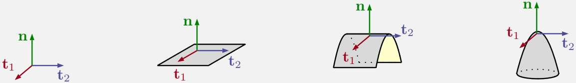
intensité s

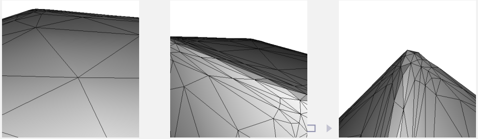
courbures κ_1, κ_2

directions $\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$

métrique en $\mathbf{x}$

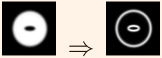
$$\left.\begin{array}{ll} \mu_1 \propto s^2 & \mathbf{v}_1 = \mathbf{n} \\ \mu_2 \propto {\kappa_1}^2 \mu_1 & \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_1 \\ \mu_3 \propto {\kappa_2}^2 \mu_1 & \mathbf{v}_3 = \mathbf{t}_2 \end{array}\right] G(\mathbf{x})$$





faible densité

Estimation de la géométrie de l'image



$\forall \mathbf{x}$, calculer gradient $s\mathbf{n}$ et courbures $\kappa_1 \mathbf{t}_1$ et $\kappa_2 \mathbf{t}_2$ de l'isophote passant par $\mathbf{x}$ sur l'image I.

- classiquement filtres dérivatifs [Monga *et. al.* 95, Rieger *et. al.* 02]
- diagonalisation tenseur de structure [Kass Witkin 87]

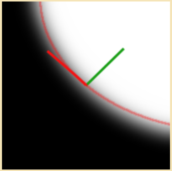
$$Q_{\rho,\sigma} : \mathbf{v} \longmapsto g_\rho * (\mathbf{v} \cdot \nabla(g_\sigma * I))^2 \qquad \text{vecteurs / valeurs propres}$$
$$Q_{\rho,\sigma} : \mathbf{v} \longmapsto {}^T\mathbf{v} \times J_{\rho,\sigma} \times \mathbf{v} \qquad (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)/(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

Theorem (Courbures par diagonalisation)

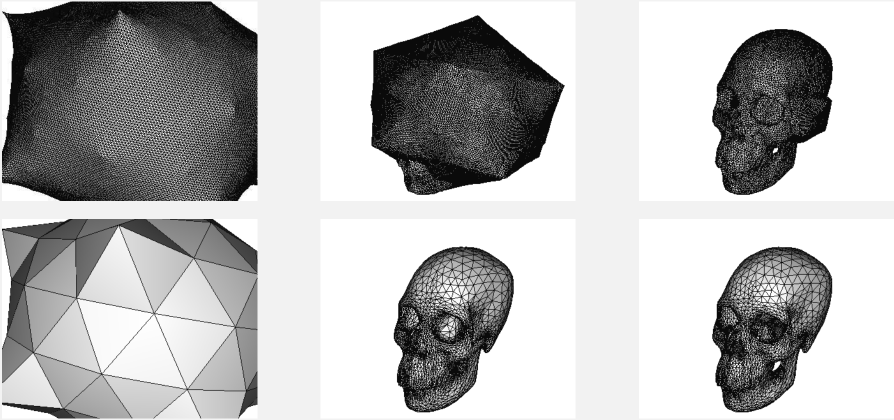
contour **idéal** *de tenseur $J_{\rho,\sigma}$ alors*

- *directions principales $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ = vecteurs propres*
- *intensité s, courbures principales κ_1 et κ_2*

$$\xi_1 = s^2 \qquad \xi_2 = \rho^2 s^2 {\kappa_1}^2 \qquad \xi_3 = \rho^2 s^2 {\kappa_2}^2$$



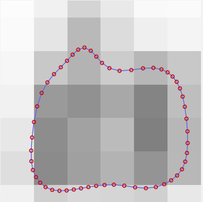
Réduction du nombre de sommets et du nombre d'itérations



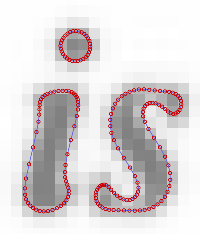
Initialisation — Itération 100 — Itération 200

Influence de la résolution

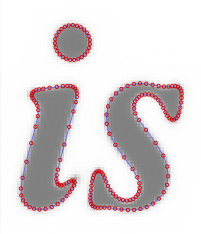
- Même image, échantillonnée à des fréquences croissantes.



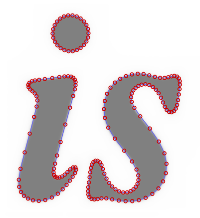
10 × 10



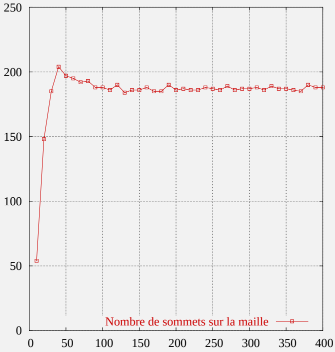
30 × 30



100 × 100



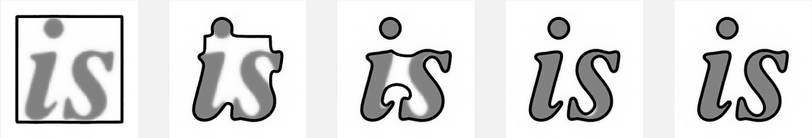
400 × 400



NbSommets(résolution)

Comparaison avec l'approche multi-résolution

- approche classique (densité uniforme, résolution fine) : 10,14s, 458 sommets

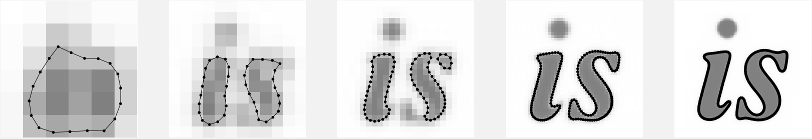


it. 100 — it. 200 — it. 300 — it. 400 — it. 900

- approche multi-résolution (densité uniforme, résolution progressive) : 9,23s, 392 sommets
- approche riemannienne (densité adaptative) : 1,73s, 150 sommets

Comparaison avec l'approche multi-résolution

- approche classique (densité uniforme, résolution fine) : 10,14s, 458 sommets
- approche multi-résolution (densité uniforme, résolution progressive) : 9,23s, 392 sommets

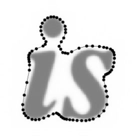


8×8	16×16	32×32	64×64	128×128
it. 310	it. +810	it. +760	it. +1020	it. +510
0,08s	0,40s	0,87s	3,10s	4,78s

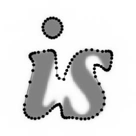
- approche riemannienne (densité adaptative) : 1,73s, 150 sommets

Comparaison avec l'approche multi-résolution

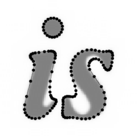
- approche classique (densité uniforme, résolution fine) : 10,14s, 458 sommets
- approche multi-résolution (densité uniforme, résolution progressive) : 9,23s, 392 sommets
- approche riemannienne (densité adaptative) : 1,73s, 150 sommets



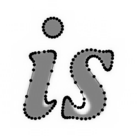
it. 25



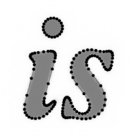
it. 50



it. 75

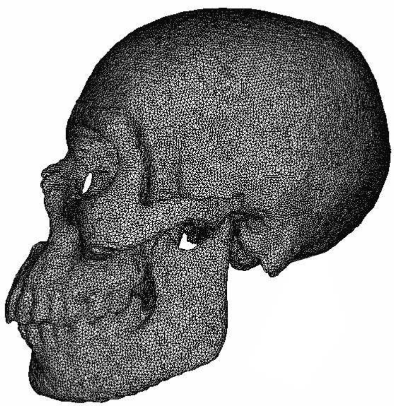


it. 100

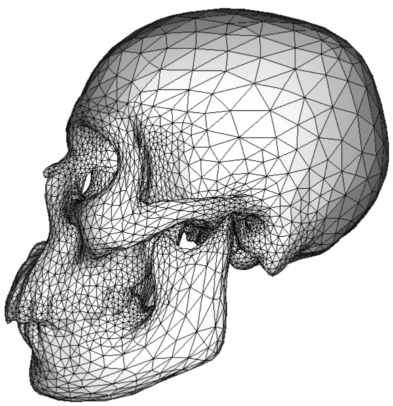


it. 280

Evaluation sur scanner

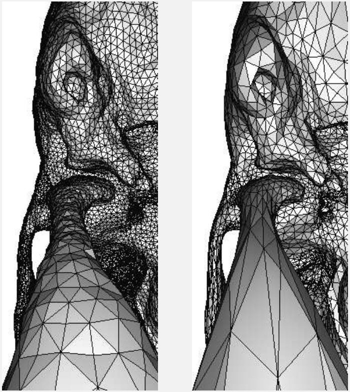


Uniforme fin

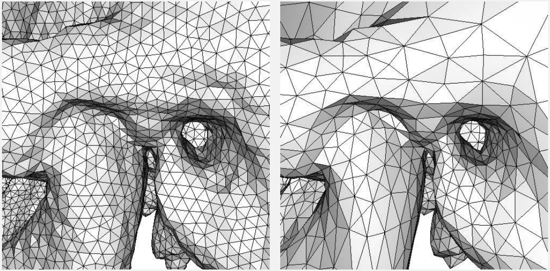


Adaptatif

Evaluation sur scanner



Vue inférieure de la mâchoire



Vue latérale de l'oreille

	Uniforme	Adaptatif
Sommets	142.340	15.936
Itérations	900	500
Temps de calcul	3h22min	22min (+3min 49s)

Discussion

- modèle hautement déformable à densité adaptative : $\approx 10\times$ moins de sommets, $\approx 5\times$ moins d'itérations, entre 3 à 10 fois + rapide
- complexité dépendante de la géométrie de l'image
- nouvel estimateur de courbure(s) image : robuste, précis, comparativement rapide

Thèse de Benjamin Taton [2004]

[Computer Vision Image Understanding 2005]

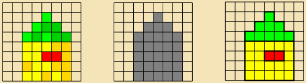
[ECCV02,3DIM03,ICPR04]

Plan

Approches combinatoires de la segmentation

segmentation de l'image I par minimisation

- segmentation = étiquetage f en N classes
- partitions f (nb fini) + critère(partition,I) + optimisation

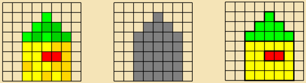


I $N = 2$ $N > 2$

Approches combinatoires de la segmentation

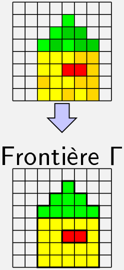
segmentation de l'image I par minimisation

- segmentation $=$ étiquetage f en N classes
- partitions f (nb fini) $+$ critère(partition,I) $+$ optimisation



I $\quad N = 2 \quad N > 2$

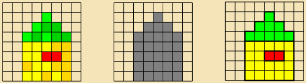
- minimisation d'énergie sur un graphe (V, W)
  optimum à $t = +\infty$ [Geman 87], optimum pour $N = 2$ [Greig *et. al.* 89], $2 \times$ *optimum* [Boykov *et. al.* 01]
- discrétisation d'approx. par morceaux [Mumford Shah 89]
  optimum sur pyramide causale [Guigues *et. al.* 03]
- division-fusion, pyramides adaptatives, ligne de partage des eaux, variantes discrètes des modèles déformables, ...



Approches combinatoires de la segmentation

segmentation de l'image I par minimisation

- segmentation = étiquetage f en N classes
- partitions f (nb fini) + critère(partition,I) + optimisation



I $\quad$ $N = 2$ $\quad$ $N > 2$

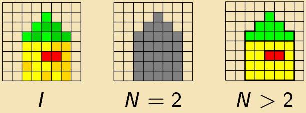
Approches combinatoires / variationnelles : optimalité

Plusieurs algorithmes intéressants vis-à-vis optimalité

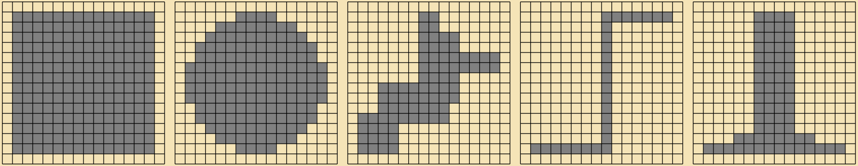
Approches combinatoires de la segmentation

segmentation de l'image I par minimisation

- segmentation = étiquetage f en N classes
- partitions f (nb fini) + critère(partition,I) + optimisation



Approches combinatoires / variationnelles : régularisation



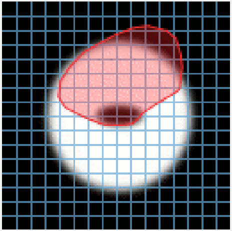
Régularisation simpliste : valeur du critère identique sur toutes ces formes

Analogue combinatoire des modèles déformables avec meilleure régularisation ?

Processus de discrétisation Dig

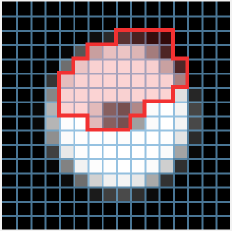
$$\text{Discrétisation de Gauss } \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}} \; : \; X \mapsto X \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

$$\text{Discrétisation de Gauss de pas } h \; \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}} \; : \; X, h \mapsto X \cap (h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z})$$



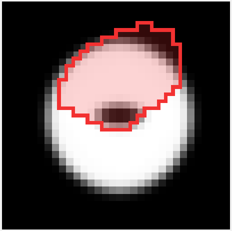
X

$E(X)$



$O_h = \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$

$E(O_h)$



$O_{\frac{h}{2}} = \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, \frac{h}{2})$

$E(O_{\frac{h}{2}})$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$

Modèle déformable discret *asymptotiquement euclidien*

Peut-on garantir que l'énergie discrète tende vers l'énergie continue lorsque le pas de grille h tend vers 0 ?

Modèle déformable discret

- Energie d'un modèle déformable type *snake*

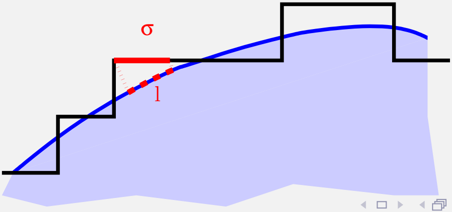
courbe param. C	$E(C) = \int_C \alpha\|C'(u)\|^2 + \beta\|C''(u)\|^2 + P(I, C(u))du$
sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^2$	$E(X) = \int_{\mathrm{bd}\ X} \alpha + \beta\kappa^2(s) + P(I, s)ds$

Modèle déformable discret 2D

Famille de formes $\mathcal{O} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$

Forme discrète $O \in \mathcal{O}$: $E(O) = \sum_{\sigma \in \partial O}(\alpha + \beta\hat{\kappa}^2(\sigma) + P(I, \sigma))\hat{l}(\sigma)$

- $\hat{l}(\sigma)$: longueur élémentaire estimée
- $\hat{\kappa}(\sigma)$: courbure estimée

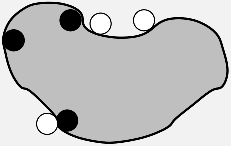


Projection et rétro-projection

- Application continue entre $\mathrm{bd}\, X$ et $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$?

Lemma (extension à Dig_G de [Latecki *et. al.* 98])

Si X est par(r)-régulier, $\exists$ homéomorphisme pour $h < \frac{\sqrt{10}}{5} r$

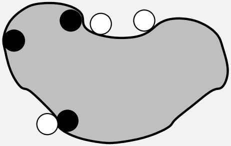


- projection de $\mathrm{bd}\, X$ sur $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$? non
- rétro-projection π de $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$ sur $\mathrm{bd}\, X$: continue, surjective

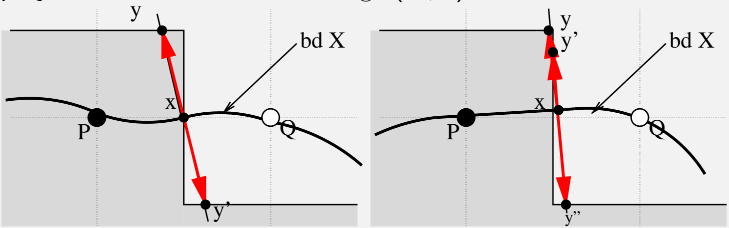
- Application continue entre $\mathrm{bd}\, X$ et $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$?

Lemma (extension à Dig_G de [Latecki *et. al.* 98])

Si X est par(r)-régulier, $\exists$ homéomorphisme pour $h < \frac{\sqrt{10}}{5} r$



- projection de $\mathrm{bd}\, X$ sur $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$? non

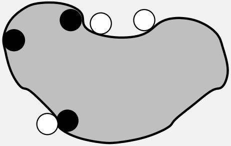


- rétro-projection π de $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, h)$ sur $\mathrm{bd}\, X$: continue, surjective

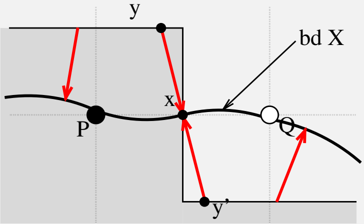
- Application continue entre $\mathrm{bd}\, X$ et $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X,h)$?

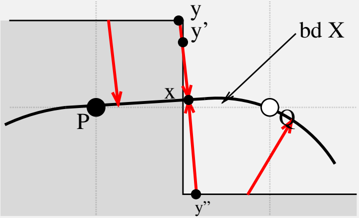
Lemma (extension à Dig_G de [Latecki *et. al.* 98])

Si X est par(r)-régulier, $\exists$ homéomorphisme pour $h < \frac{\sqrt{10}}{5} r$

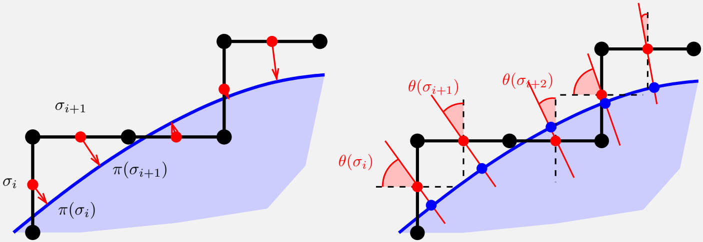


- projection de $\mathrm{bd}\, X$ sur $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X,h)$? non
- rétro-projection π de $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X,h)$ sur $\mathrm{bd}\, X$: continue, surjective





Modèle déformable discret asymptotiquement euclidien



$$\theta(\sigma) = \angle(\text{normale } \pi(\sigma), \text{normale } \sigma)$$

Theorem

Le MD d'énergie $E(O) = \sum_{\sigma \in \partial O} (\alpha + \beta \hat{\kappa}^2(\sigma) + P(I,\sigma)) \hat{l}(\sigma)$ *est asymptotiquement euclidien ssi*

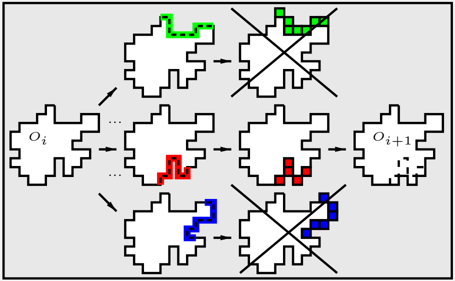
1. *longueur élémentaire* $\hat{l}(\sigma)/h$ *tend vers* $|\cos(\theta(\sigma))|$
2. *courbure* $\hat{\kappa}(\sigma)$ *tend vers* $\kappa(\pi(\sigma))$

Convergence des quantités estimées $\hat{l}$ et $\hat{\kappa}$?

Peut-on construire un modèle déformable asymptotiquement euclidien ?

- convergence longueur élémentaire $\Leftrightarrow$ convergence estimateur de tangente
- $\hat{l}$:tangente symétrique $\hat{\theta}^{ST}$
- $\hat{\kappa}$: courbure par cercle circonscrit aux demi-tangentes $\hat{\kappa}^{CC}$
- estimateurs admis convergents dans un premier temps [Coeurjolly02]
- validation expérimentale

- Algorithme de minimisation *a posteriori* (bulle déformable [Elomary Chassery 94])
  1. expansion progressive dans la direction d'énergie minimale

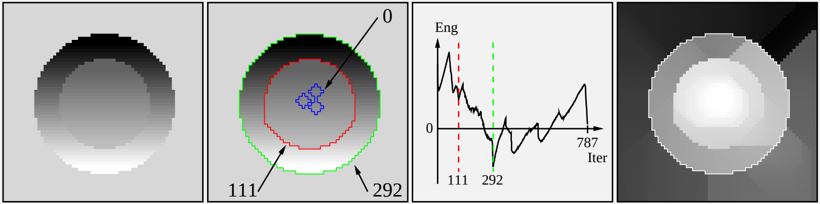


  2. à la fin, extraction de la position intermédiaire optimale.

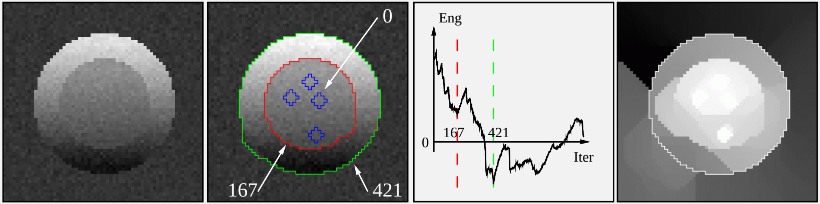
Validation expérimentale II

Test du MD discret à échelle fixée

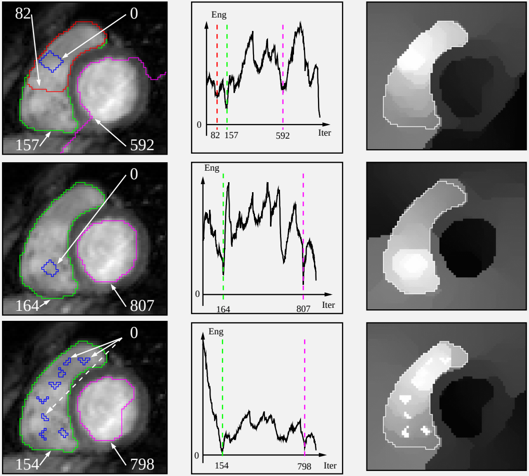
1. Segmentation de composantes inhomogènes : $\alpha = 0.5$



2. Robustesse au bruit Gaussien : $\alpha = 0.5$, bruit Gaussien d'écart-type 12.8



3. Robustesse à l'initialisation (IRM cœur diastole)



Synthèse et problématiques induites

- discrétisation valide d'un modèle déformable géométrique
- extension nD naturelle
- approximation d'intégrales curvilignes sur des contours discrets

Représentation efficace des surfaces discrètes de $\mathbb{Z}^n$ et calcul rapide d'estimations géométriques ?

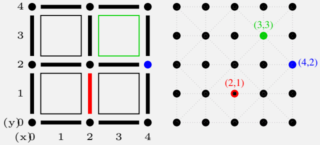
Convergence d'estimateurs géométriques discrets de quantités géométriques locales ? Vitesse de convergence ?

collaboration avec Anne Vialard
projet Jeunes chercheurs GdR-ISIS avec David Cœurjolly et Laure Tougne (LIRIS)

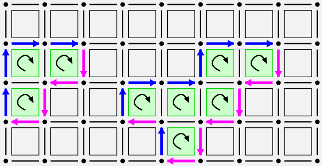
[IWVF01],[HdR06]

Plan

- grille cellulaire $\mathbb{C}^n$: identification avec Khalimsky + topologie algébrique

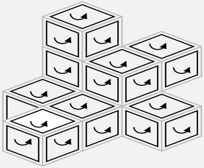


cellule = n coord. entières

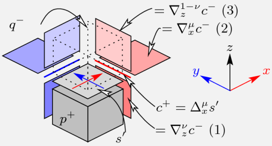


(bord) $\Delta \sum$(voxels$^+$) = $(\sum \text{surfels}^+)$ $+(\sum \text{surfels}^-)$

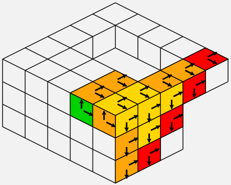
- voisinage, suivi de surface nD



surface = ΔVolume



(co-bord ∇)



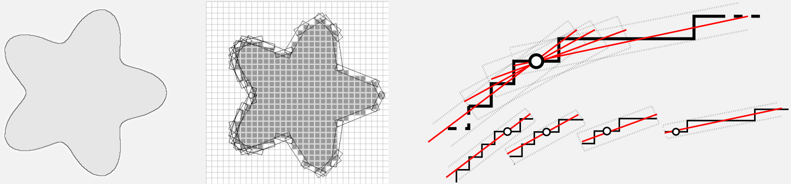
$\Delta\Delta = 0$

- codage : 1 cellule = 1 entier, opérateurs = { || ,&&, ! ,« ,»}*
  $\Rightarrow$ Implémentation générique nD, très efficace, compacte

[IWCIA03], Cours EJC Algo. Calc. Formel 2005

Géométrie des courbes 2D et surfaces discrètes nD

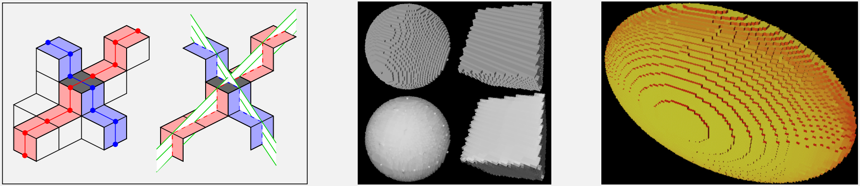
- estimateurs géométriques discrets basés segments de droites discrètes



forme de $\mathbb{R}^2$ segments maximaux tangente $\hat{\theta}$ = comb. convexe directions

Propriétés : précis, convexité respectée, isotrope, convergent, calcul en temps optimal

- estimateurs nD par croisement de géométries 2D



$n-1$ chemins par surfel normale $\hat{\mathbf{n}}$ orth. aux $(\hat{\theta}_i)$ Aire $= \sum_\sigma |\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_{\perp\sigma}|$

Collaboration avec Anne Vialard, thèse de François de Vieilleville
[DGCI03,DGCI05], [Image and Vision Computing 2006]

Topologie des surfaces combinatoires nD

- Surfaces nD ? : modèles combinatoires de subdivision de variétés
- résultats d'équivalences de modèles topologiques

n-G-cartes [Lienhardt94]

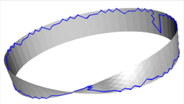
- $n+1$ involutions sur des brins
- + simpliciales, connexes, fermées

⟺

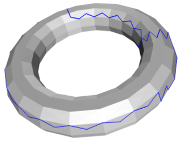
n-surfaces [Bertrand99]

- ordre partiel
- décomposition récursive

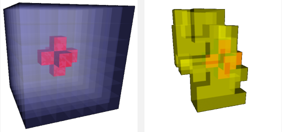
- calcul d'invariants topologiques sur les complexes cellulaires ($\Delta\Delta = 0$)
  groupes d'homologie par mise en forme de Smith/Agoston [Agoston76]



Bande de Möbius



Tore



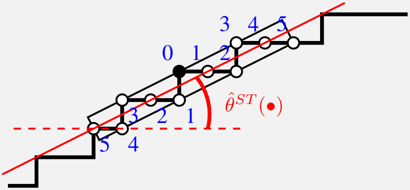
Cube avec cavité

thèse de Sylvie Alyrangues [2005]
Collaboration avec Pascal Lienhardt (SIC), Xavier Daragon (ESIEE), Laurent Fuchs (SIC) et Samuel Peltier (SIC/PRIP)
[CVWW02,IWCIA04,DGCI05], [Computers & Graphics 2006]

Plan

Definition (Estimateur géométrique discret)

Cherche à estimer une quantité géométrique de X à partir de sa seule discrétisation.



tangente symétrique (ST)
direction du plus long segment de droite discrète symétrique autour du point $\bullet$

Convergence estimateur géométrique [Serra 82]

Soit une famille de formes F. L'estimateur géométrique $\hat{\epsilon}$ est multigrille-convergent pour F vers la mesure géométrique ϵ ssi

$$\forall X \in F, \lim_{h \to 0} |\hat{\epsilon}(\mathrm{Dig}_G(X,h)) - \epsilon(X)| = 0$$

Résultats connus de convergence multigrille

Quantité	Forme de $\mathbb{R}^2$	technique	B. sup erreur	Ref
aire	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	*[Huxley90]*
moments	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	*[Klette,Žunić00]*
longueur	poly. conv.	polygonalisation	$\approx 4.5h$	*[Kovalevsky,Fuchs92]*
longueur	poly. conv.	"saucissonnage"	$\approx 5.844h$	*[Klette* et. al. *98]*
longueur	C3-convexes	"Grid continuum"	$\approx 8h$	*[Sloboda,Zatko96]*
longueur	convexe	$\int$ normales	(non connu)	*[Coeurjolly02]*

Quantités géométriques locales ? (tangentes θ, courbures κ)

- lien avec *croissance* segments discrets avec $h \longrightarrow 0$ [Coeurjolly02]
- tangente symétrique $\hat{\theta}^{ST}$ convergente vers tangente θ
  ... si segments discrets grandissent partout
- courbure par cercle circonscrit $\hat{\kappa}^{CC}$ convergente vers courbure κ
  ... si segments discrets grandissent en $O(\frac{1}{\sqrt{h}})$

Résultats connus de convergence multigrille

Quantité	Forme de $\mathbb{R}^2$	technique	B. sup erreur	Ref
aire	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	*[Huxley90]*
moments	C3-convexes	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	*[Klette,Žunić00]*
longueur	poly. conv.	polygonalisation	$\approx 4.5h$	*[Kovalevsky,Fuchs92]*
longueur	poly. conv.	"saucissonnage"	$\approx 5.844h$	*[Klette* et. al. *98]*
longueur	C3-convexes	"Grid continuum"	$\approx 8h$	*[Sloboda,Zatko96]*
longueur	convexe	$\int$ normales	(non connu)	*[Coeurjolly02]*

Quantités géométriques locales ? (tangentes θ, courbures κ)

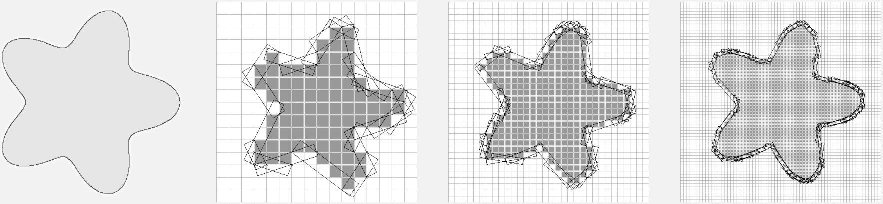
- lien avec *croissance* segments discrets avec $h \to 0$ [Coeurjolly02]
- tangente symétrique $\hat{\theta}^{ST}$ convergente vers tangente θ

  . . . si segments discrets grandissent partout — faux
- courbure par cercle circonscrit $\hat{\kappa}^{CC}$ convergente vers courbure κ

  . . . si segments discrets grandissent en $O(\frac{1}{\sqrt{h}})$ — faux

Théorèmes de convergence d'estimateurs discrets

Preuves basées sur croissance asymptotique des segments de droites discrètes sur bord des discrétisés : segments maximaux



X $\quad$ $\mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, 2)$ $\quad$ $\mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, 1)$ $\quad$ $\mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(X, 0,5)$

Théorèmes de convergence d'estimateurs discrets

Preuves basées sur croissance asymptotique des segments de droites discrètes sur bord des discrétisés : segments maximaux

Bornes asymptotiques en nombre et longueur des segments maximaux

- outils

(DSS)	segments de droites discrètes
	approches arithmétique et combinatoire
(MS)	segments maximaux sur un contour discret
(CDP)	polygones convexes discrets

- propriétés des MS sur CDP
- propriétés asymptotiques CDP $\Rightarrow$ propriétés asymptotiques MS

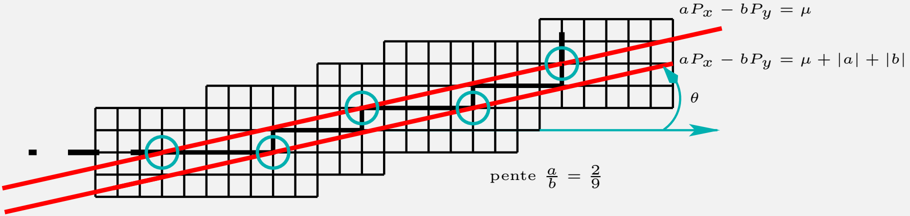
Segments de droites discrètes (DSS)

Approche arithmétique [Reveillès 91]

Definition

Un ensemble fini C de points 4-connexes sur la grille discrète $\mathbb{Z}^2$ est un segment de droite discrète (DSS) ssi $\exists(a, b, \mu)$ tels que

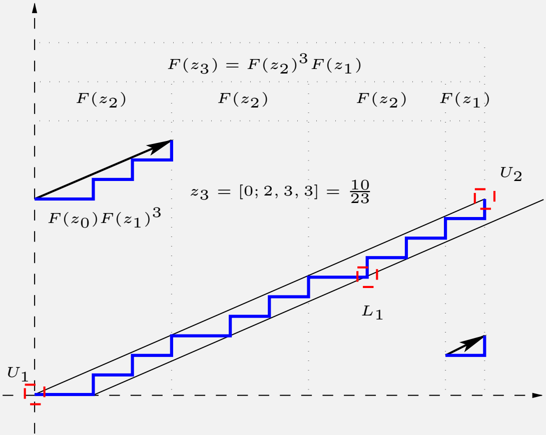
$$\forall P \in C \quad \mu \leq aP_x - bP_y < \mu + |a| + |b|$$



1. extraction DSS avec algorithmes optimaux (e.g. [Debled Reveillès 95])
2. tangentes discrètes sont des DSS particuliers

Segments de droites discrètes (DSS)

Approche combinatoire [Berstel 97]



- motif de pente $z = \frac{p}{q}$ $=$ chemin $U_1 U_2$, codé sur $\{0 = \text{pas } x, 1 = \text{pas } y\}$
- fractions continues

$$\begin{aligned} z &= 0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{u_n}}} \\ &= [0; u_1, \ldots, u_n] \end{aligned}$$

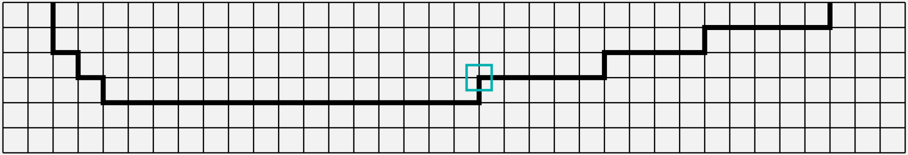
- construction récursive

$F(z_0) = 0$ (0), $F(z_1) = 0^{u_1}1$ (001), $F(z_2) = F(z_0)F(z_1)^{u_2}$ (0001001001), ...
n est la profondeur du motif z.

Segments maximaux (MS)

Definition

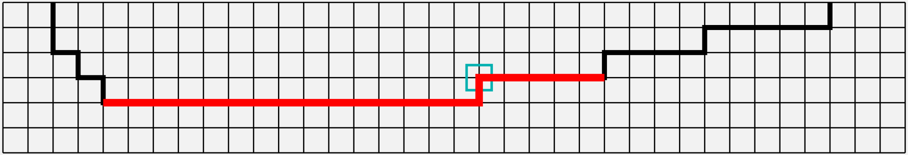
segment maximal sur courbe discrète = DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

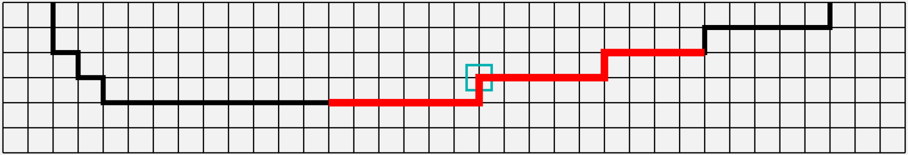
segment maximal sur courbe discrète = DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

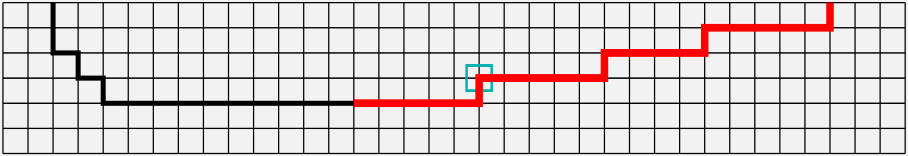
segment maximal sur courbe discrète = DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.



Segments maximaux (MS)

Definition

segment maximal sur courbe discrète = DSS qui ne peut pas être étendu à gauche ou à droite et rester encore un DSS.

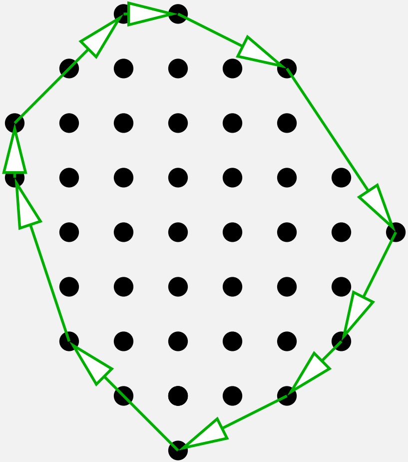


Polygones convexes discrets (CDP)

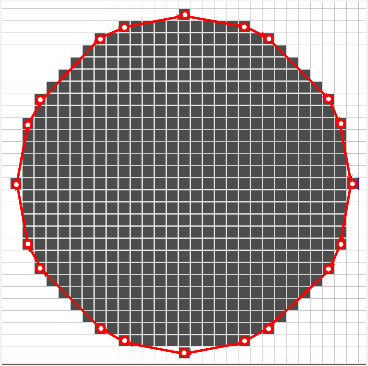
Definition (*polygone convexe discret* (CDP) Γ)

sous-ensemble 4-connexe de $\mathbb{Z}^2$ égal à la discrétisation de son enveloppe convexe.

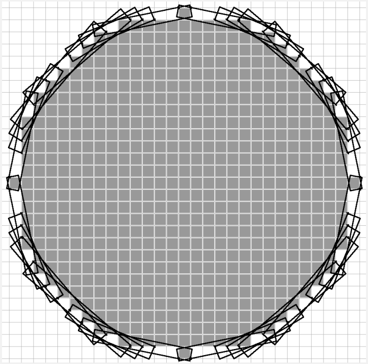
- $n_e(\Gamma)$ = nb de sommets de Γ
- $\mathrm{Per}(\Gamma)$ = périmètre de Γ



Segments maximaux sur bord d'un CDP

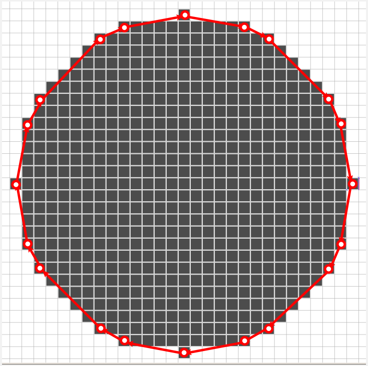


sommets ○, arêtes

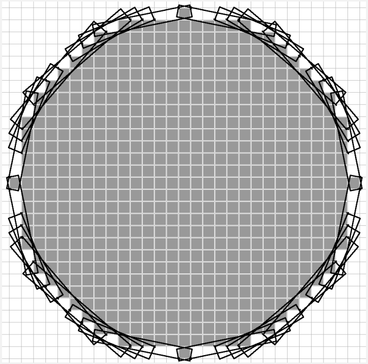


segments maximaux

Segments maximaux sur bord d'un CDP



sommets ○, arêtes

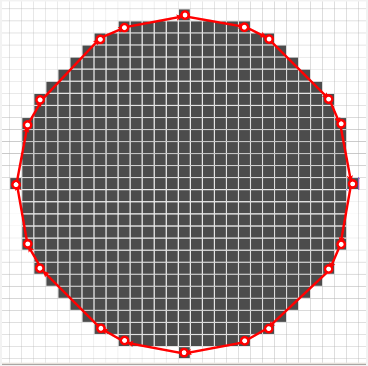


segments maximaux

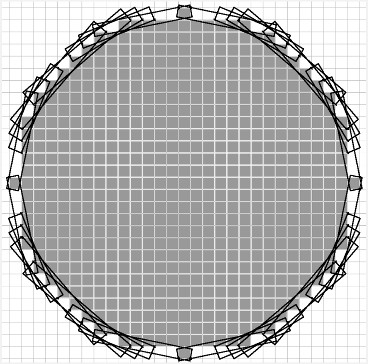
Theorem ([Debled-Rennesson Reiter-Doerksen 04])

Un ensemble 4-connexe de $\mathbb{Z}^2$ est un CDP ssi les directions des segments maximaux successifs sont monotones.

Segments maximaux sur bord d'un CDP



sommets ∘, arêtes

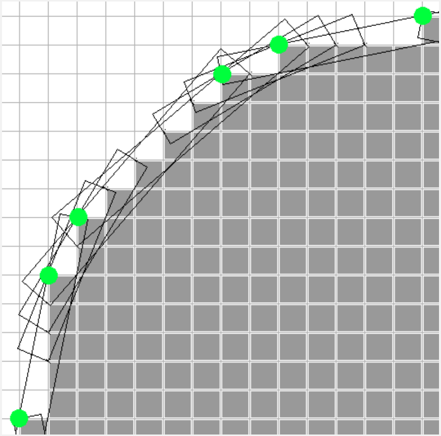


segments maximaux

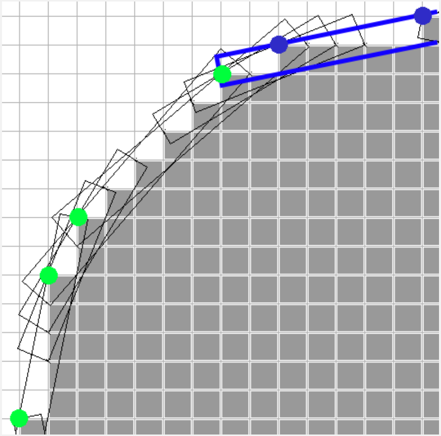
Theorem ([Feschet 05])

On peut construire des courbes discrètes où autant de segments maximaux que l'on souhaite traversent un même point.

Liens entre arêtes du CDP et segments maximaux



- convexité ⇒2 classes de MS
- Segments maximaux "arête"
- Segments maximaux "sommet"



- convexité $\Rightarrow$2 classes de MS
- Segments maximaux "arête"
  pente z_n = pente arête
  1 MS "arête" par arête

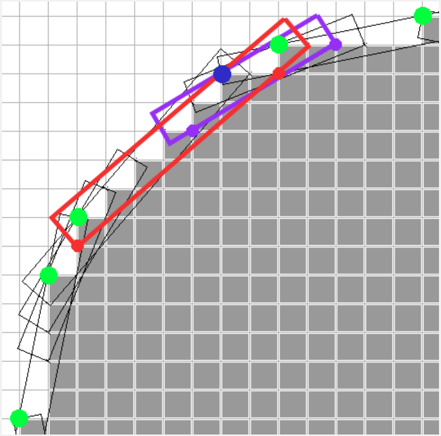
Lemma (basé motifs)

MS contient $\leq 2n+1$ arêtes

Ex : pente $z_n = \frac{1}{5} \Rightarrow$ 3 arêtes

- Segments maximaux "sommet"

Liens entre arêtes du CDP et segments maximaux



- convexité ⇒2 classes de MS
- Segments maximaux "arête"
- Segments maximaux "sommet"

Lemma (basé motifs)

Max. 2 MS "sommet" par sommet
1 prof. pair + 1 prof. impair

gauche $\frac{7}{8} = [0; 1, 7]$, droite $\frac{3}{5} = [0; 1, 1, 2]$

Lemma (basé motifs)

MS contient $\leq 2n$ arêtes

Nombre de segments maximaux sur CDP

Theorem (Nombre segments maximaux et nombre d'arêtes)

Si Γ *CDP inclus dans grille* $m \times m$ *alors*

$$\frac{n_e(\Gamma)}{\Theta(\log m)} \leq n_{MS}(\partial\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma)$$

Démonstration.

- Lemmes précédents +
- plus court DSS de profondeur n : $[0; 2, 2, \ldots]$

$\Rightarrow$ profondeur max. d'un DSS dans $\subset m \times m$

$\square$

longueurs des segments maximaux sur un CDP

Theorem (somme des longueurs des MS sur CDP)

Sur le bord d'un CDP Γ de segments maximaux $(MS_i)_i$

$$\mathrm{Per}(\Gamma) \leq \sum_i L_D(MS_i) \leq 19\mathrm{Per}(\Gamma)$$

Theorem (longueur moyenne des MS sur CDP)

Si Γ CDP inclus dans grille $m \times m$ alors

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{Per}(\Gamma)}{n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_i L_D(MS_i)}{n_{MS}(\partial\Gamma)} \leq 19\frac{\mathrm{Per}(\Gamma)}{n_e(\Gamma)}\Theta(\log m)$$

longueurs des segments maximaux sur un CDP

Theorem (somme des longueurs des MS sur CDP)

Sur le bord d'un CDP Γ de segments maximaux $(MS_i)_i$

$$\mathrm{Per}(\Gamma) \leq \sum_i L_D(MS_i) \leq 19\mathrm{Per}(\Gamma)$$

Theorem (longueur moyenne des MS sur CDP)

Si Γ CDP inclus dans grille $m \times m$ alors

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{Per}(\Gamma)}{n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_i L_D(MS_i)}{n_{MS}(\partial\Gamma)} \leq 19\frac{\mathrm{Per}(\Gamma)}{n_e(\Gamma)}\Theta(\log m)$$

asymptotique CDP $\Rightarrow$ asymptotique MS

Theorem (Balog Bárány 91)

Soit $S \in C^3$ − convexe. Le nombre d'arêtes de sa discrétisation suit

$$c_1(S)\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \leq n_e(\mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(S,h)) \leq c_2(S)\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}$$

Theorem (Asymptotique nombre et long. des segments maximaux)

Soit $S \in C^3$ − convexe. Si S_h est le CDP $\mathrm{Dig}_{\mathrm{G}}(S,h)$.

$$\begin{array}{lll} (\textit{nombre}) & \Theta(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}\log\frac{1}{h}}) & \leq n_{MS}(\partial S_h) \leq \Theta(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}) \\ (\textit{long.dis.}) & \Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}) & \leq L_D \textit{ moyenne MS sur } \partial S_h \leq \Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\log\frac{1}{h}) \end{array}$$

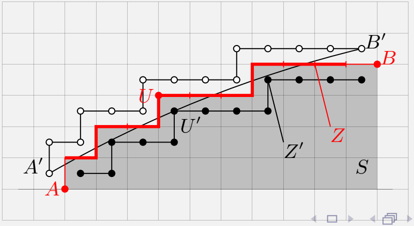
Autres résultats asymptotique MS

Résumé asymptotique segments maximaux

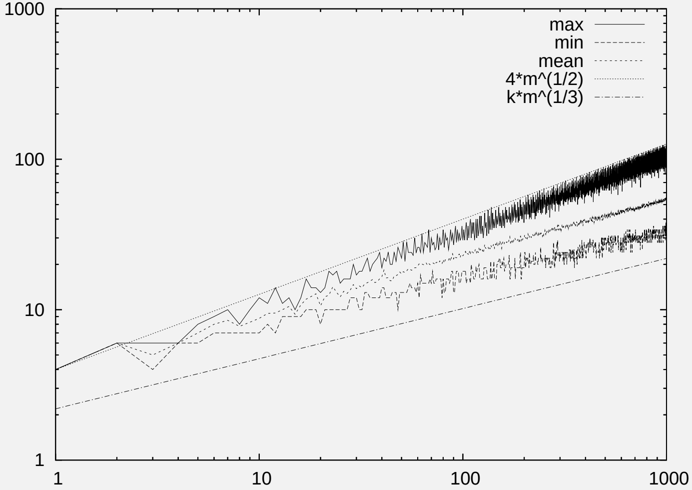
Sur les discrétisées de formes C^3-convexes ($\kappa > 0$).

	plus court	moyenne	plus long
$L_D(MS)$	$\Omega(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}})$	$\Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}) \leq \cdot \leq \Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \log \frac{1}{h})$	$\mathcal{O}(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}})$
$L(MS)$	$\Omega(h^{\frac{2}{3}})$	$\Theta(h^{\frac{2}{3}}) \leq \cdot \leq \Theta(h^{\frac{2}{3}} \log \frac{1}{h})$	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$

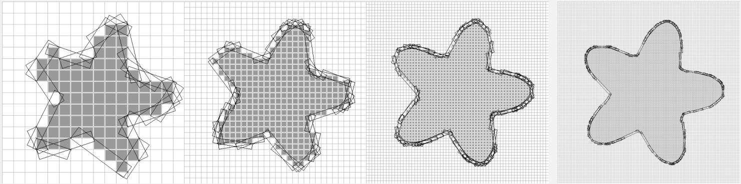
- plus long MS $= \mathcal{O}(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}})$ (géométrie)
- plus court MS $= \Omega(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}})$ (cercles séparants)



Vérification expérimentale



(tangente) estimateurs basés MS sont multigrille convergents



- long. discrète du + petit MS grandit en $1/h^{\frac{1}{3}}$
- long. euclidienne $\geq h^{\frac{2}{3}}$ et épaisseur en h
- bord de S enfermé dans un tube + Taylor

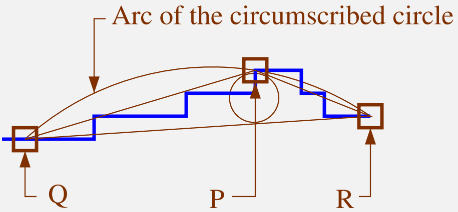
$\Rightarrow$ convergence uniforme en $h^{\frac{1}{3}}$

(courbure) estimateur par cercle circonscrit aux demi-tangentes

Estimateurs géométriques

(tangente) estimateurs basés MS sont multigrille convergents

(courbure) estimateur par cercle circonscrit aux demi-tangentes



- convergent si demi-tangentes grandissent en $1/h^{\frac{1}{2}}$ [Coe02]
- non car demi-tangentes $\subset$ MS
- expérimentalement non convergent

Discussion

- propriétés asymptotiques des parties linéaires des bords discrétisés
- convergence multigrille d'estimateurs géométriques discrets

Quantité	estimateur	Unif. convergent	Conv. moyenne
position	$\hat{x}^{\mathrm{conv}}$	$\mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}})$
tangente	tan. sym.	non	?
tangente	$\hat{\theta}^{\mathrm{conv}}$	?	$\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$
tangente	$\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}$	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$	$\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$
courbure	Cercle circ.	non	exp. non
courbure	Variation tang. sym.	non	non

Quantité	estimateur	B. sup erreur
longueur	$\int \hat{\theta}^{\mathrm{MS}}$	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$
intégrale	mesure discrète	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$

thèse de François de Vieilleville, collaboration avec Fabien Feschet (LAIC)

[J. Mathematical Image Vision 06]

[SCIA05,DGCI06,ISVC06],[HdR06]

Conclusion

Comment diminuer la complexité des modèles déformables ?

Modèle déformable en géométrie riemannienne

- moins de variables, moins d'itérations
- nb de variables fonction de la géométrie image

Analogue combinatoire des modèles déformables ?

Modèle déformable discret asymptotiquement euclidien
$E(O) = \sum_{\sigma \in \partial O} (\alpha + \beta \hat{\kappa}^2(\sigma) + P(I, \sigma)) \hat{l}(\sigma)$

- Oui pour α quelconque, potentiel P quelconque, mais $\beta = 0$
- $\forall$ estimateur tangente $\hat{\theta}$ basé segments maximaux, $\hat{l} = |cos(\hat{\theta})|$

Nouveaux résultats

- représentation, topologie, géométrie des surfaces discrètes
- estimateurs géométriques, convergence multigrille
- géométrie discrète asymptotique

Conclusion

Comment diminuer la complexité des modèles déformables ?

Modèle déformable en géométrie riemannienne

- moins de variables, moins d'itérations
- nb de variables fonction de la géométrie image

Analogue combinatoire des modèles déformables ?

Modèle déformable discret asymptotiquement euclidien
$E(O) = \sum_{\sigma \in \partial O} (\alpha + \beta \hat{\kappa}^2(\sigma) + P(I, \sigma)) \hat{l}(\sigma)$

- Oui pour α quelconque, potentiel P quelconque, mais $\beta = 0$
- $\forall$ estimateur tangente $\hat{\theta}$ basé segments maximaux, $\hat{l} = |cos(\hat{\theta})|$

Nouveaux résultats

- représentation, topologie, géométrie des surfaces discrètes
- estimateurs géométriques, convergence multigrille
- géométrie discrète asymptotique

Conclusion

Comment diminuer la complexité des modèles déformables ?

Modèle déformable en géométrie riemannienne

- moins de variables, moins d'itérations
- nb de variables fonction de la géométrie image

Analogue combinatoire des modèles déformables ?

Modèle déformable discret asymptotiquement euclidien

$E(O) = \sum_{\sigma \in \partial O} (\alpha + \beta \hat{\kappa}^2(\sigma) + P(I, \sigma)) \hat{l}(\sigma)$

- Oui pour α quelconque, potentiel P quelconque, mais $\beta = 0$
- $\forall$ estimateur tangente $\hat{\theta}$ basé segments maximaux, $\hat{l} = |cos(\hat{\theta})|$

Nouveaux résultats

- représentation, topologie, géométrie des surfaces discrètes
- estimateurs géométriques, convergence multigrille
- géométrie discrète asymptotique

Perspectives

Modèles déformables

- partitions déformables : algorithmes d'optimisation (pyramides, stochastiques, graph-cuts)
  thèse de Martin Braure de Calignon, collaboration avec Luc Brun [ISVC06]
- projet ANR FoGRIMMI : modèles déformables discrets pour analyse de très grandes images.

Géométrie discrète

- estimateurs géométriques : courbure convergente ?, estimateurs de tangente de meilleure vitesse de convergence
- projet ANR GeoDIB : Géométrie des objets discrets bruités
  étude des segments maximaux *épais*