

Chapitre 12

Approximation par triangulation

12.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons de l'approximation des surfaces discrètes par des maillages. Cette transformation ne sera pas forcément réversible, contrairement aux approches décrites dans le chapitre 11. La relaxation de cette contrainte offre en effet plus de flexibilité. Nous aborderons plusieurs problématiques :

- Volumique vers surfacique. Les surfaces discrètes ne sont pas toujours exploitables directement, et la transformation de l'image 3D directement en une représentation surfacique (un maillage) est parfois souhaitable, notamment pour le rendu ou l'extraction quantitative de caractéristiques. Dans la section 12.2.1 nous verrons une technique d'extraction de surfaces d'intérêt directement à partir d'une image 3D, binaire ou non.

- Surface discrète vers surface triangulée. Il est parfois commode de passer d'une représentation par surface discrète à une représentation par surface triangulée. Nous présenterons deux techniques complémentaires : la section 12.2.2.1 utilise la dualité surface discrète et isosurface pour construire une surface triangulée approchant la surface discrète (approximation réversible), la section 12.2.2.2 montre une technique non réversible d'approximation de surface discrète sous forme d'une surface triangulée, qui est basée sur de la triangulation de points caractéristiques par amincissement homotopique.

- Simplification et remaillage de surfaces. Un maillage possède parfois trop d'éléments pour être affiché ou traité sur une machine possédant des ressources limitées (mémoire, vitesse). La simplification du maillage résout ce problème en réduisant son

Ce chapitre a été rédigé par Jacques-Olivier LACHAUD et Sébastien VALETTE.

nombre d'éléments tout en conservant au mieux les caractéristiques géométriques initiales. Ces techniques sont présentées dans la section 12.3. Plusieurs critères peuvent être pris en compte lors de la simplification : type des éléments créés (triangles, quadrangles, polygones), qualité de l'approximation (distance de HAUSDORFF), qualité des éléments générés (rapport d'aspect, régularité de la triangulation). D'autre part, l'efficacité de certaines applications est parfois dépendante de la qualité du maillage (régularité de l'échantillonnage, facteur de forme des éléments). En particulier, la précision des applications de simulation par éléments finis est directement dépendante du facteur de forme des éléments du maillage. Dans ce cas, remailler un modèle permet de rester fidèle à la forme initiale de l'objet, tout en améliorant les résultats d'une éventuelle simulation numérique.

12.2. Extraction de surfaces triangulées à partir de volumes de données

De nombreux moyens d'acquisition produisent des images 3D, telle l'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM), le scanner X, la tomographie à émissions de positon (TEP), etc (voir le chapitre 21). Leur visualisation, leur appréhension et leur analyse quantitative sont donc primordiales. Une image 3D, même après traitement et/ou segmentation, est rarement utilisable telle quelle. D'une part, sa visualisation naturelle coupe par coupe est difficilement exploitable, à part par l'expert chevronné. D'autre part, il est souvent nécessaire de reconstruire la surface d'une ou des régions de l'image pour effectuer des post-traitements. Ainsi les algorithmes de rendu volumique, même élaborés, ne permettent pas d'analyse quantitative.

Pour analyser ces images, on identifie une ou plusieurs régions d'intérêt, dont on va extraire la géométrie. Une façon de procéder consiste à extraire le bord de l'objet discret (i.e. l'ensemble des voxels de la région d'intérêt) en tant que surface discrète par les techniques présentées au chapitre 3. Néanmoins, il est souvent nécessaire de reconstruire une *surface triangulée*, ou *triangulation*, qui approche ce bord. Les surfaces triangulées ont l'avantage d'être très communes en informatique graphique, et un nombre considérable d'applications et de technologies spécifiques leur sont dédiées : visualisation câblée sur les cartes graphiques, algorithmes de simplification, estimateurs géométriques. De plus, des formats standards de sauvegarde des surfaces triangulées existent et elles constituent donc des structures de données naturelles d'entrées/sorties.

Dans cette section, nous nous intéressons donc aux techniques de construction de surfaces triangulées à partir d'un objet discret préalablement identifié dans l'image. Nous ne présenterons ici que deux familles de techniques de construction : les algorithmes qui construisent une surface triangulée directement par balayage de l'image, les algorithmes qui triangulent la surface discrète correspondante au bord de l'objet discret (cf. chapitre 3). Les algorithmes de segmentation/reconstruction plus évolués

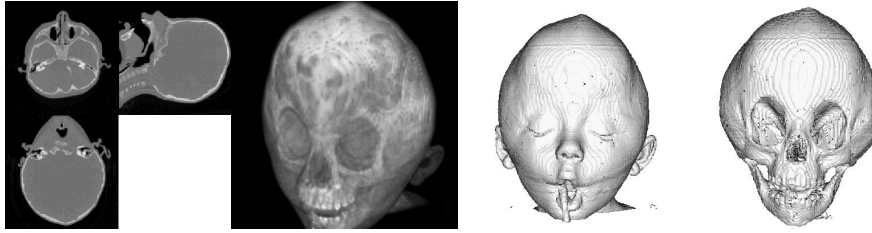


Figure 12.1. (a) Coupes dans une image scanner, (b) Rendu volumique, (c) Isosurfaces $s = 0.1$ et (d) $s = 0.3$

comme les modèles déformables ou les méthodes de polygonalisation de surfaces implicites ne seront pas abordées, même si elles pourraient être utilisées dans ce cadre.

12.2.1. Isosurfaces et algorithme *Marching Cubes*

Dans la suite, une *image 3D* I est une fonction d'un sous-ensemble parallélépipédique P de \mathbb{Z}^3 à valeur dans un espace scalaire, que l'on ramène à l'intervalle $[0, 1]$. On s'intéresse donc aux images en niveaux de gris, même si une partie significative des techniques présentées est adaptable à des images couleurs. Si s est un nombre dans $]0, 1[$ alors l'image $I_s : (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mapsto 1_{I(x,y,z) \geq s}$ est une image binaire. Les voxels (i.e. un élément de \mathbb{Z}^3) de valeur 1 (resp. 0) seront appelés *1-voxel* (resp. *0-voxel*). On rappelle que, pour une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle *isosurface* de niveau s la surface implicite définie par $f(x, y, z) = s$. On utilisera parfois que l'image I provient de l'échantillonnage d'une fonction g . On note alors que l'isosurface de niveau s de g sépare 1-voxels et 0-voxels de l'image I_s tandis que le bord discret entre 0- et 1-voxels de I_s est une approximation de cette isosurface.

Un premier moyen d'appréhender une image 3D I est de visualiser ses surfaces d'intensité constante, c'est-à-dire ses isosurfaces. Pour certains moyens d'acquisition comme le scanner, on sait que les os ou les tissus mous auront approximativement une intensité donnée dans l'image. Il suffit alors de choisir une valeur s entre ces deux intensités pour que l'isosurface résultante approche assez finement les contours des os (figure 12.1). Bien entendu, comme nous ne disposons pas de la fonction *continue* originelle dont l'image n'est qu'un échantillonnage, il est impossible de calculer une isosurface exactement. Les algorithmes d'extraction d'isosurfaces supposent en général que l'interpolation trinéaire de I est une bonne approximation de cette fonction continue.¹ On notera \bar{I} cette interpolation de I .

1. Cette interpolation calcule la valeur en tout point réel à partir de 8 valeurs échantillonnées et stockées dans I .

Un algorithme très populaire pour extraire une isosurface de niveau s d'une image 3D est celui du *Marching Cubes (MC)* de LORENSEN et CLINE [LOR 87]. Son principe est de construire une surface triangulée morceau par morceau, surface qui est une approximation à l'ordre 1 de l'isosurface de niveau s de \bar{I} . L'idée est simple. Pour chaque bloc de 8 voxels tous 26-adjacents les uns aux autres (ou *8-cube*) on regarde les valeurs de ces voxels dans l'image seuillée binaire I_s . On a donc $2^8 = 256$ configurations locales possibles. Comme on sait que l'isosurface doit passer entre les 0-voxels et les 1-voxels d'un 8-cube, on attribue à chaque configuration un ensemble de triangles qui les séparent. La figure 12.2 dessine les configurations principales. Ensuite, chaque sommet A d'un de ces triangles est placé sur une arête reliant 2 voxels 6-adjacents, l'un étant un 0-voxel A_1 et l'autre un 1-voxel A_2 . Ce sommet A est placé sur l'arête en utilisant la valeur de l'image I en ces deux voxels :

$$A = \frac{s - I(A_1)}{I(A_2) - I(A_1)} A_1 + \frac{I(A_2) - s}{I(A_2) - I(A_1)} A_2 \quad (12.1)$$

Si \bar{I} est une bonne approximation de la fonction continue échantillonnée, alors le sommet A est alors très près de la vraie isosurface de niveau s , ce qui justifie l'utilisation de l'équation précédente. L'algorithme 27 détaille ce processus. Pour la visualisation, le vecteur normal en chaque sommet est défini comme le gradient de l'image en ce point.

L'algorithme originel se limitait à 14 configurations, et déduisait les autres par symétries, rotations, et complémentarité. La surface triangulée reconstruite pouvait alors ne pas être une 2-variété, c'est-à-dire comportait des trous. Plusieurs travaux ont proposé des corrections à ce problème, certains en calculant différemment les configurations, d'autres en raffinant le calcul à ces endroits problématiques (voir par exemple le tour d'horizon de [VAN 94]). Nous donnons sur la figure 12.2 les tables de configurations de [LAC 96, LAC 00], qui garantissent les bonnes propriétés topologiques de la surface extraite et qui sont aussi reliées à la topologie discrète. Suivant la connexité choisie pour les 1-voxels et celle choisie pour les 0-voxels (dans $\{6, 18, 26\}$), les isosurfaces triangulées ne seront pas exactement les mêmes, même si tous les sommets auront exactement la même position dans l'espace.

Le choix des ces configurations présentent les avantages suivants :

- Elles construisent des surfaces qui sont bien des variétés [LAC 00]. On note aussi que l'on peut faire des algorithmes d'extraction de frontières dans des espaces plus généraux que \mathbb{Z}^d . L'isosurface est alors un sous-ensemble d'un graphe d'incidence décrivant l'espace. Ainsi, DARAGON *et al.* [DAR 05] utilise le formalisme des ordres frontières pour définir des analogues d'isosurfaces. Ils montrent alors qu'en considérant le cas particulier de la grille \mathbb{Z}^d doublée de KHALIMSKY (qui est un ordre), les configurations induites par les ordres frontières sont exactement les mêmes que les configurations précédentes après simplification. Ces configurations trouvent donc

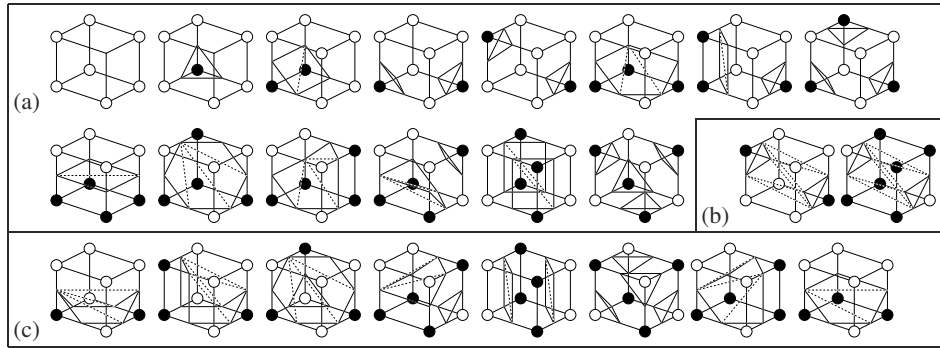


Figure 12.2. Tables de configurations pour extraire une isosurface en fonction des connexités (κ, λ) choisies pour les 1-voxels et les 0-voxels. (a) configurations pour $(\kappa, \lambda) \in \{(6, 18), (6, 26)\}$, (b) Cas particulier pour $(26, 6)$ (son complémentaire est le cas particulier pour $(6, 26)$). (c) Si $(\kappa, \lambda) \in \{(18, 6), (26, 6)\}$, ces configurations sont triangulées ainsi.

une justification théorique provenant d'un cadre très général pour définir des surfaces combinatoires.

- La surface construite sépare les κ -composantes de 1-voxels des λ -composantes de 0-voxels. Elle est donc l'analogie continu des $\kappa\lambda$ -bords de JORDAN du chapitre 3. On verra dans la suite qu'on peut la calculer à partir de ces surfaces discrètes.

- On les détermine par un simple calcul d'enveloppe convexe des sommets et des 1-voxels (pour $\kappa \in \{18, 26\}$). Ce principe s'étend en dimension quelconque [LAC 00, BHA 04] pour extraire des isosurfaces d'hypervolume de données.

La figure 12.3 montre que la table de configurations permet d'extraire par balayage une surface triangulée qui approche bien le bord de l'image I seuillée selon un paramètre s . Si on dispose de plus d'une image en niveau de gris, on peut repositionner les sommets de cette surface pour approcher au mieux l'isosurface de niveau s de \bar{I} . La figure 12.1 montre quant à elle deux isosurfaces de niveaux différents extraites d'un volume de données acquis par scanner avec cet algorithme. Sur des gros volumes de données, les choix de connexités influent peu sur le résultat.

12.2.2. Triangulations de surfaces discrètes

Il est parfois utile de transformer une surface discrète en une surface triangulée. Des algorithmes de polyédrisation ont déjà été présentés dans les chapitres précédents (par exemple au chapitre 11). Nous présentons ici deux algorithmes de triangulation de surfaces discrètes. Le premier explicite le lien entre surfaces discrètes et isosurfaces. Il montre qu'une isosurface triangulée peut être construit directement à partir d'une

Algorithme 27 : Algorithme *Marching Cubes* de construction d'isosurface. Un sommet est un couple de voxels 6-adjacents. Un triangle est un triplet de sommets.

Entrées : Image I de taille $L \times H \times P$, seuil s , table de configurations

$C : \{0, 1, \dots, 255\} \rightarrow (\text{triangles})$.

Sorties : Un ensemble ES de sommets. Une liste LT de triangles. Un plongement $P : ES \rightarrow \mathbb{R}^3$.

1 a : Tableau[8] = $\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$;

2 ES : ensemble de sommets (couple de voxels) ;

LT : liste de triangles (triplets de sommets) ;

P : tableau associatif entre sommets et triplets de réels ;

3 **pour** z de 1 à $P - 1$ **faire**

pour y de 1 à $H - 1$ **faire**

pour x de 1 à $L - 1$ **faire**

 // Calcul de la configuration c ;

$c \leftarrow 0$;

pour i de 0 à 7 **faire** $c \leftarrow c + 2^i \times I_s((x, y, z) + a[i])$;

 // Obtention et repositionnement des triangles ;

$QT \leftarrow T[c]$;

tant que QT non vide **faire**

 Retirer triangle $((\vec{u}_1, \vec{v}_1), (\vec{u}_2, \vec{v}_2), (\vec{u}_3, \vec{v}_3))$ de QT ;

pour i de 1 à 3 **faire**

$\vec{u}_i \leftarrow \vec{u}_i + (x, y, z)$;

$\vec{v}_i \leftarrow \vec{v}_i + (x, y, z)$;

 Insérer (\vec{u}_i, \vec{v}_i) dans ES

 Mettre le triangle $((\vec{u}_1, \vec{v}_1), (\vec{u}_2, \vec{v}_2), (\vec{u}_3, \vec{v}_3))$ dans LT ;

 // Calcul de la position de chaque sommet. ;

pour chaque sommet (\vec{u}, \vec{v}) de ES **faire**

$P[(\vec{u}, \vec{v})] \leftarrow \frac{s - I(\vec{u})}{I(\vec{v}) - I(\vec{u})} \vec{u} + \frac{I(\vec{v}) - s}{I(\vec{v}) - I(\vec{u})} \vec{v}$

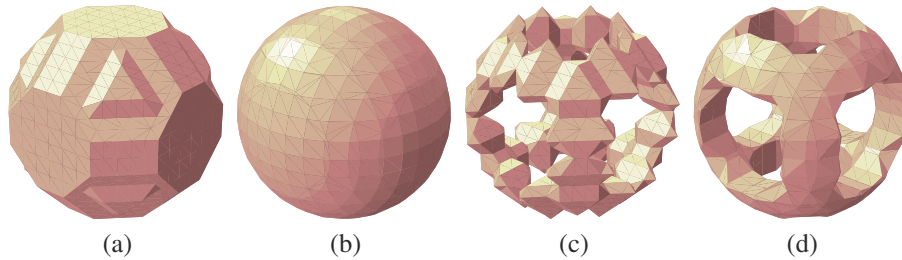


Figure 12.3. Isosurface triangulée extraite par *Marching Cubes* avec les tables données et influence du plongement P : (ab) boule, (cd) boule privée de trois cylindres alignés avec les axes.

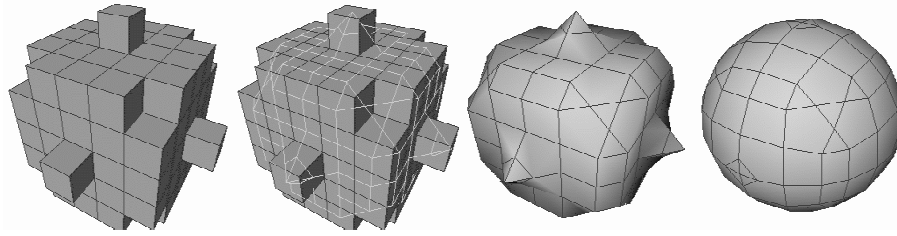


Figure 12.4. Dualité surface discrète et isosurface : (a) bord discret d'une boule discrétisée, (b) graphe d'adjacence entre bels de cette surface discrète, (c) triangulation de ce graphe, (d) déplacement des bels/sommets avec l'équation de positionnement du MC.

surface discrète. Le deuxième utilise la notion de points simples pour construire une surface triangulée qui approche une surface discrète.

12.2.2.1. Dualité surface discrète et isosurface triangulée

On rappelle que nous avons défini au chapitre 3 la notion d'adjacence entre surfels d'un bord d'une image binaire (ou *adjacence entre bels*). On sait déjà que l'isosurface présentée précédemment approche le $\kappa\lambda$ -bord de l'image seuillée. Comme chaque sommet de l'isosurface se situe entre un 0-voxel et un 1-voxel, les sommets de l'isosurface sont en bijection avec les bels de l'image seuillée. En choisissant une adjacence entre bels par arête β^e telle que $(\kappa, \lambda, \beta^e)$ est un triplet de JORDAN, le graphe d'adjacence de bels est un sous-ensemble des arêtes de la surface triangulée produite par le MC avec la table de configuration adaptée à (κ, λ) . On montre alors que l'on peut trianguler le graphe d'adjacence de façon à obtenir la même isosurface triangulée [LAC 98]. Cette dualité surface discrète et isosurface est illustrée sur la figure 12.4.

Cette triangulation du graphe peut se faire localement en temps constant par sommet [LAC 98]. Comme on peut extraire un $\kappa\lambda$ -bord par suivi en un temps proportionnel au nombre de bels (cf. chapitre 3), une isosurface triangulée peut être construite en un temps proportionnel au nombre de ses sommets. Pour des images 3D de taille N^3 , les surfaces discrètes ont généralement $O(N^2)$ sommets. En utilisant le suivi de surface discrète, on extrait donc des isosurfaces connexes en $O(N^2)$, ce qui améliore d'un ordre de grandeur l'algorithme du MC. On note néanmoins que l'algorithme MC marche très vite sur les configurations vides.

12.2.2.2. Polyédrisation de surface discrète par amincissement homotopique

BURGUET et MALGOUYRES [BUR 03] ont proposé une technique de triangulation de surface discrète basée sur un repérage de maxima de courbures et sur un amincissement homotopique. La triangulation produite est de densité de sommets adaptative : elle contient plus de sommets dans les zones plus courbées. L'erreur d'approximation n'est cependant pas quantifiée.

L'algorithme suit 3 étapes distinctes pour trianguler une surface discrète S composée de surfels. On reprend les notations du chapitre 3 pour les adjacences entre surfels, c'est-à-dire σ (deux surfels qui se touchent en au moins un sommet) et β (deux surfels qui se touchent en une arête). La technique est paramétrée par un nombre réel k entre 0 et 1, qui influence la densité générale de la surface triangulée en sortie, et un entier L qui détermine la densité minimale attendue. On suppose que la courbure maximale κ a été estimée en chaque surfel de S , par exemple par l'algorithme de LENOIR [LEN 97] (voir aussi le chapitre 14).

Choix des germes. Cette étape choisit des surfels “germes” dont la densité est proportionnelle à la courbure maximale des surfels. L'ensemble des germes obtenu est noté G . L'algorithme 28 décrit cette étape.

Amincissement. La surface S , privée de G , est amincie par un processus d'aminçissement parallèle qui préserve l'homotopie. L'ensemble obtenu T , équivalent homotopique de $S \setminus G$, dessine un squelette sur la surface S , assimilable à un diagramme de VORONOÏ “topologique” dont les germes seraient G . Chaque région ainsi délimitée est bien un disque topologique.

Triangulation. Chaque région est approchée par une ombrelle de triangles autour de son germe. L'ensemble de ces triangles constituent une surface triangulée fermée, qui est une approximation de la surface discrète S .

Algorithme 28 : Calculs d'un ensemble de germes sur une surface discrète, dont la densité croît avec la courbure.

Entrées : Surface discrète β -connexe S .

Sorties : Sous-ensemble G de S (les germes).

$G \leftarrow \emptyset$;

On choisit aléatoirement $x \in S$;

$b \leftarrow \text{Vrai}$;

tant que b faire

$G \leftarrow G \cup \{x\}$;

$l \leftarrow \min(1/\kappa(x), L)$;

 Parcours en largeur du graphe de β -adjacence de S , limité à une profondeur l , en marquant chaque surfel y visité et en mettant à jour $l \leftarrow \min(l, 1/\kappa(y))$;

si il reste des pixels non marqués alors

 on choisit aléatoirement un nouveau x parmi les surfels non-marqués β -voisins d'un surfel marqué.

sinon $b \leftarrow \text{Faux}$

Pour l'étape deux, on utilise les notions de surfels n -simples et (P, n) -simples, notions proches mais distinctes des pixels/voxels simples des chapitres 3 et 8. Soit (n, m) un couple de relations distinctes de surfel-adjacence dans $\{\sigma, \beta\}$ et X un sous-ensemble de surfels de S . Un surfel est n -intérieur dans X si son n -voisinage est

inclus dans X . Un surfel est n -simple dans X s'il n'est pas n -intérieur et si de plus ses n -voisins dans X forment un ensemble n -connexe.

Pour tout sous-ensemble Y de S , on note $A_n(x, Y)$ les surfels y de Y , qui sont σ -voisins de x et que l'on peut relier à x par un n -chemin dans l'union de x et de son n -voisinage. Si maintenant on se donne un ensemble $P \subset X$ et $x \in P$. Alors le surfel x est (P, n) -simple pour X ssi :

- il est n -simple dans X ;
- tout n -voisin de x appartenant à P est n -adjacent à un élément de $A_n(x, X \setminus P)$;
- tout m -voisin de x appartenant à P est m -adjacent à un élément de $A_m(x, S \setminus X)$.

On a la propriété remarquable que si $X' \subset X \subset S$, alors l'ensemble X' a la même "homotopie" que l'ensemble X ssi l'ensemble $P = X \setminus X'$ est (P, n) -simple pour X . En pratique cela signifie que quel que soit l'ordre dans lequel on retire les éléments de X pour aboutir à X' , ces surfels seront toujours n -simples. Puisque l'ordre n'a pas d'importance, cela permet de retirer ces surfels en parallèle mais aussi garantit que l'algorithme n'est pas dépendant de l'ordre dans lequel il traite les données. L'algorithme 29 décrit précisément ce processus : d'abord on amincit en parallèle puis, lorsque ce n'est plus possible, on amincit en séquentiel les quelques surfels simples qui restent.

Algorithme 29 : Amincissement d'un ensemble de surfels privé de germes : le résultat est une sorte de diagramme de VORONOÏ topologique sur cette surface.

```

Entrées : Surface discrète  $\beta$ -connexe  $S$ .
Entrées : Sous-ensemble  $G$  de  $S$  (les germes).
Sorties : Sous-ensemble aminci  $X$  de  $S \setminus G$ 
 $X \leftarrow S \setminus G$  ;
 $P \leftarrow \{x \in X \mid x \text{ est } m\text{-adjacent à } S \setminus X\}$  ;
// Amincissement parallèle
1 tant que  $\exists$  surfels  $(P, n)$ -simple pour  $X$  faire
    pour chaque  $x \in X$  faire
        si  $x$  est  $(P, n)$ -simple pour  $X$  alors marquer  $x$ 
     $X \leftarrow \{x \in X \mid x \text{ non marqué}\}$  ;
     $P \leftarrow \{x \in X \mid x \text{ est } m\text{-adjacent à } S \setminus X\}$  ;
// Amincissement séquentiel
2 tant que  $\exists$  surfels  $n$ -simple dans  $X$  faire
    si  $x$  n'est pas  $n$ -voisin d'un seul élément dans  $X$  alors
        retirer  $x$  de  $X$ 

```

Pour la troisième étape, X est un squelette de $S \setminus G$ qui ressemble à un diagramme de VORONOÏ dont les éléments de G seraient les germes. Les surfels restant de X sont soit adjacents à deux voisins dans X (ils appartiennent à une branche du diagramme) soit adjacents à trois ou plus voisins dans X (ils sont à l'intersection de trois cellules

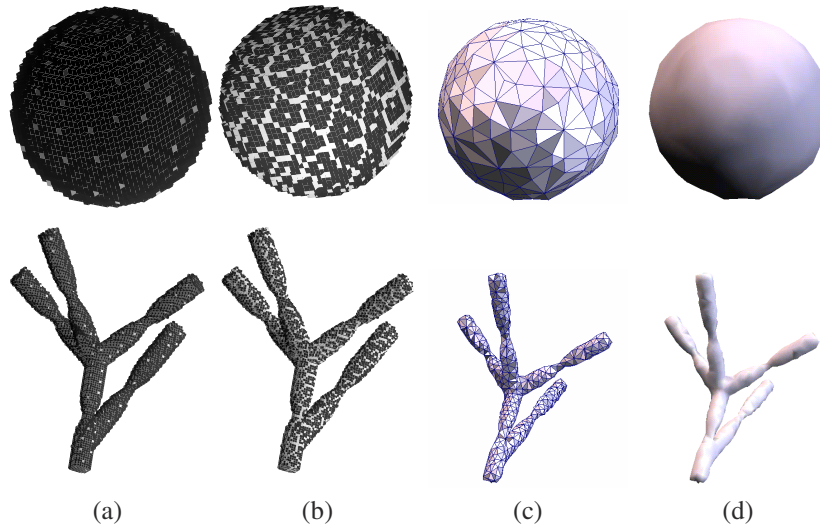


Figure 12.5. *Algorithme de polyédration de surfaces discrètes de BURGUET et MALGOUYRES. (a) Détermination de germes. (b) Amincissement de la surface privée des germes : obtention d'un diagramme de VORONOÏ topologique sur la surface initiale. (c) Triangulation des germes avec les surfels à l'intersection de trois ou plus cellules. (d) Rendu final.*

ou plus du diagramme). La triangulation se fait ainsi : deux surfels “intersection” reliés par un chemin de surfels “branche” forment une arête, arête que l'on relie de chaque côté au germe adjacent pour former deux triangles. La figure 12.5 illustre les trois étapes de cet algorithme de polyédration de surfaces discrètes.

12.3. Approximation de maillages

Ici, nous ne couvrirons pas toutes les approches de simplification et remaillage de surfaces triangulées. Le lecteur pourra se référer à [ALL 05] pour un état de l'art plus détaillé.

12.3.1. Approximations successives

Une des premières approches de simplification de maillages utilisant des opérations élémentaires, proposée par HOPPE [HOP 96], emploie la contraction d'arête. La figure 12.6 montre une étape élémentaire de contraction d'arête.

Une série de contractions d'arêtes permet donc la création d'un modèle simplifié dont il est possible de contrôler le nombre de sommets. Cependant, le choix des arêtes à contracter n'est pas fixé. GARLAND et HECKBERT ont introduit la notion

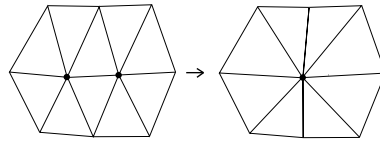


Figure 12.6. *Contraction d'arête : deux sommets (en gras) de la figure de gauche sont fusionnés. Le maillage résultant (droite) possède deux triangles et un sommet en moins.*

de Métrique d'Erreur Quadratique [GAR 97] (*Quadric Error Metric*, QEM en Anglais) qui permet une quantification objective de l'erreur introduite par une contraction d'arêtes. Couplée à une gestion des priorités, ce formalisme permet une simplification très efficace des maillages 3D, autant en termes de vitesse que de qualité d'approximation. Dans [HEC 99], il est montré que le comportement asymptotique d'une telle approche de simplification tend vers une approximation optimale, au sens où les triangles ainsi créés sont étirés le long des directions principales de courbure. Cette approche de simplification a été étendue aux traitements *hors coeur* (out of core en Anglais) [ISE 03], par traitement séquentiel des éléments du maillage, selon un ordre adéquat. Avec un traitement *hors coeur*, le modèle ne réside pas entièrement dans la mémoire de l'ordinateur ; seule une partie du maillage est stockée, ce qui rend cette approche très utile pour le traitement de grand modèles (possédant plusieurs millions/milliards d'éléments).

12.3.2. Approximation directe, approches variationnelles

En opposition avec les méthodes de simplification itératives citées précédemment, il est possible de simplifier les maillages en une seule passe, en regroupant entre-eux des éléments E , qui peuvent être soit les sommets ou les faces du maillage. La figure 12.7 montre les différents moyens pour créer un maillage à partir d'un partitionnement. Le maillage initial (a) est partitionné (b) et des points caractéristiques sont extraits du partitionnement. Deux approches duales de construction maillage sont possibles :

- les points adjacents à au moins trois partitions (points noirs sur la figure 12.7(b)) sont reliés pour générer un maillage polygonal (voir figure 12.7(c)). Ce maillage polygonal peut ensuite être triangulé en cas de besoin. Cette stratégie est utilisée dans [KAL 96, INO 99].

- les points représentant les différentes partitions (représentés par des carrés blancs sur la figure 12.7(b)) sont reliés entre-eux en fonction de l'adjacence des partitions pour créer une triangulation (voir figure 12.7(d)). C'est l'approche utilisée dans [LÖT 98]. Il faut remarquer que dans le cas où le maillage possède des bords, un effet de "rétrécissement" de la surface est perceptible, comme le montre la figure 12.7(d), et un post-traitement est alors nécessaire. On remarquera ici l'analogie avec l'approche décrite dans la section ??.

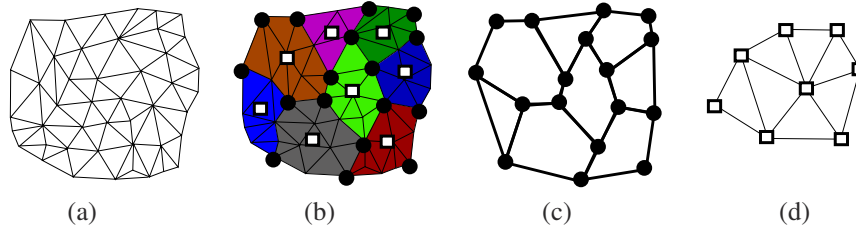


Figure 12.7. Principe du remaillage par partitionnement : un maillage initial (a) est partitionné (b). Les points caractéristiques de ce partitionnement sont extraits et sont utilisés pour créer un maillage polygonal (c) ou triangulaire (d)

Les critères de partitionnement peuvent être définis afin de maximiser la qualité de l'approximation [KAL 96, INO 99] ou la qualité des éléments générés [LÖT 98]. Enfin, pour palier le problème des maillages de forte complexité, des approches hors-cœur ont été développées, décomposant les éléments du maillages sur une grille régulière [LIN 00] ou adaptative [SCH 03]. Les approches variationnelles, bien que plus coûteuses en temps de calcul sont très intéressantes quant à la qualité des résultats obtenus. En effet, la définition d'une fonction objective de qualité permet une optimisation poussée des éléments ainsi créés. Les propositions les plus prometteuses utilisent le cadre théorique des Diagrammes de Voronoï Centroïdaux (DVC), dont les détails sont donnés dans [DU 99]. En effet, il a été prouvé que la création d'un DVC génère des partitions V_i minimisant la fonction objective définie par :

$$f = \sum_i \int_{V_i} \sigma(x) \|x - z_i\|^2 dx \quad (12.2)$$

où z_i est le site correspondant à la région (partition) V_i , et $\sigma(x)$ est une fonction de densité. Ce terme d'énergie donne une mesure objective de la compacité des régions. La construction de telles partitions peut généralement s'effectuer par la méthode des K-means [MAC 67] ou par relaxation de LLOYD [LLO 82], présenté par l'algorithme 30.

Algorithme 30 : Relaxation de LLOYD

Données : Un ensemble de n sites z_i dans un espace Euclidien Ω

Résultat : Les n sites et un partitionnement optimisés

- 1 **tant que** Convergence non détectée **faire**
 - 2 Calculer le Diagramme de Voronoï sur Ω en considérant les sites z_i ;
 - 3 Déplacer chaque site z_i à la position du barycentre de la cellule de Voronoï correspondante;
-

Dans le cadre du partitionnement de maillages, nous pouvons citer deux exemples d'approches variationnelles :

– COHEN STEINER *et al.* [COH 04] favorisent une approximation efficace du modèle original. Les partitions sont créées afin de minimiser soit l'erreur quadratique entre les deux maillages, soit la variance des normales sur les partitions. Cette deuxième métrique génère des maillages polygonaux capturant très efficacement l'anisotropie présente dans les modèles.

– VALETTE et CHASSERY [VAL 04, VAL 05] favorisent le facteur de forme des éléments créés, utilisant un terme énergétique considérant la compacité des partitions créées.

La première approche utilise un algorithme similaire à la relaxation de LLOYD, qui calcule à chaque itération un nouveau partitionnement du maillage de départ. La deuxième approche, que nous allons détailler dans ce chapitre, est itérative, et met à jour la partition afin de minimiser la fonction d'objectif. Le principe de l'algorithme est la mise en compétition des partitions entre-elles, par des tests élémentaires. En effet, il suffit de consulter les bords entre les partitions pour globalement faire évoluer le partitionnement. Dans ce cas, la relaxation de LLOYD n'est pas applicable, mais un algorithme plus proche des K-means est possible. Par la suite, nous envisageons que le partitionnement du maillage peut s'effectuer de deux manières différentes : regrouper les triangles du maillage, ou regrouper les sommets. Dans [VAL 05], il est montré que lorsque l'on considère un partitionnement discret (fusion d'éléments discrets), le terme d'énergie f défini par l'équation 12.2 devient :

$$f = \sum_i \left(\sum_{E_j \in V_i} \rho_j \|z_i - \gamma_j\|^2 \right) + \sum_j A_j \quad (12.3)$$

avec

$$A_j = \int_{E_j} \sigma(x) \|x - \gamma_j\|^2 dx$$

$$\sigma_j = \int_{E_j} \sigma(x) dx$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\sigma_j} \int_{E_j} \sigma(x) x dx$$

où E_j est un élément discret du maillage (un sommet ou un triangle, selon le type de partitionnement choisi). Le domaine E_j considéré pour le calcul intégral est le

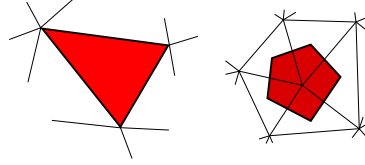


Figure 12.8. Domaines considérés pour le calcul intégral : pour un regroupement des triangles, les domaines élémentaires sont les triangles eux-mêmes. Pour un regroupement des sommets, les domaines sont les cellules duales des sommets considérés.

triangle correspondant ou la cellule duale du sommet considéré dans le cas d'un regroupement de sommets. (la figure 12.8 montre les différences entre ces deux cas). Les termes A_j étant constants vis-à-vis du partitionnement, le dernier terme de l'équation 12.3 peut donc être omis. Des simplifications similaires mènent à la définition d'un nouveau terme d'énergie g dont la minimisation est équivalente à la minimisation de f :

$$g = \sum_i \left[\|z_i\|^2 \sum_{E_j \in V_i} \sigma_j - 2z_i^T \sum_{E_j \in V_i} \sigma_j \gamma_j \right]$$

Ici, la définition de z_i est encore libre. En définissant z_i comme étant le barycentre de sa région (en analogie avec la définition continue des DVC) :

$$z_i = \frac{\sum_{E_j \in V_i} \sigma_j \gamma_j}{\sum_{E_j \in V_i} \sigma_j}$$

minimiser g est alors équivalent à minimiser un nouveau terme h :

$$h = - \sum_i \frac{\left\| \sum_{E_j \in V_i} \sigma_j \gamma_j \right\|^2}{\sum_{E_j \in V_i} \sigma_j} \quad (12.4)$$

Le point intéressant de cette fonction d'objectif est que les test locaux effectués pour la minimisation d'énergie (décrits par la figure 12.9 et l'algorithme 31) ont une complexité constante vis à vis du nombre d'éléments du maillage de départ et du maillage simplifié [VAL 04].

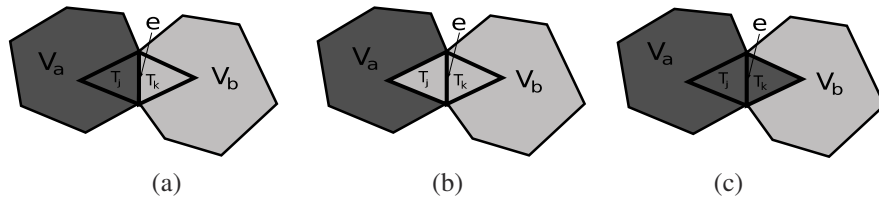


Figure 12.9. Tests élémentaires de minimisation : (a) la configuration initiale du partitionnement : l'arête e_j est une frontière entre deux partitions V_a et V_b . (b) V_a grandit et V_b rétrécit. (c) V_a rétrécit et V_b grandit.

Algorithme 31 : Génération d'un partitionnement optimisé

Données : Un maillage, avec n sites germes

Résultat : Un partitionnement optimisé du maillage en n parties

1 tant que Convergence non détectée **faire**

2 pour Chaque arête e_j frontière entre deux partitions **faire**

3 Calculer les trois termes d'énergie h_1 , h_2 et h_3 correspondant aux trois configurations possibles (voir figure 12.9);

4 Mettre à jour l'association des deux triangles en fonction de la configuration donnant le plus petit terme d'énergie;

Sachant que le terme d'énergie f est toujours positif, la convergence d'un tel algorithme de minimisation des termes f , g ou h est garantie. La figure 12.10 montre les résultats de partitionnement de cette approche sur un plan densément triangulé (a). Cette triangulation possède quatre régions différemment échantillonnées. Elles possèdent respectivement 10000, 20000, 40000 et 80000 sommets (a). Malgré cette forte variabilité d'échantillonnage initial, l'approche proposée partitionne le plan d'une manière similaire à une relaxation de LLOYD. Dans cet exemple, un partitionnement uniforme a été choisi ($\sigma(x) = 1$ et donc $\sigma_j = \text{aire}(E_j)$). Les définitions précédentes de DVC sont valables dans le plan, mais elle restent aussi tout à fait utilisables pour les maillages surfaciques. En effet, les termes d'énergie f , g et h impliquent uniquement des mesures de distances et des fonctions de pondérations. Un équivalent strict impliquerait le calcul de distances géodésiques. Mais cette introduction pénaliserait l'algorithme par sa complexité de calcul très importante. De plus, si on considère la simplification de maillages fortement échantillonnés, l'erreur introduite par l'utilisation de la distance euclidienne plutôt que la distance géodésique reste faible. Cependant, des améliorations sont possibles pour que l'approche soit plus adaptée aux maillages 3D. La position des points z_i du maillage simplifié peut être optimisée [VAL 05]. En effet, l'équation 12.4 implique que les points z_i sont les barycentres de leurs régions respectives, ce qui pénalise fortement la qualité de l'approximation dans les régions courbes. Un remplacement utilisant le formalisme des QEM proposé dans [LIN 00] permet d'améliorer fortement la qualité d'approximation des maillages obtenus. Enfin, ce formalisme peut aussi être injecté directement dans l'algorithme de minimisation en

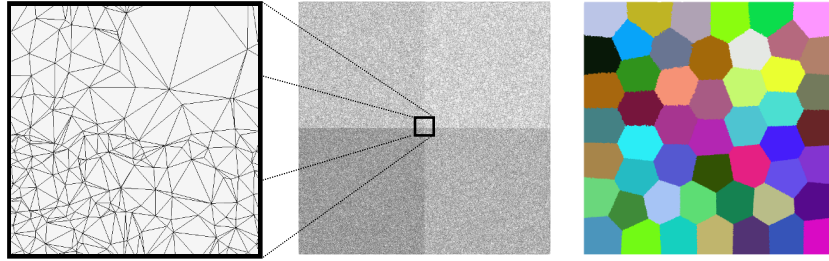


Figure 12.10. Partitionnement d'un plan triangulé (centre, vue rapprochée à gauche). Les triangles sont regroupés afin de maximiser la compacité des régions créées. Malgré des variations brusques d'échantillonnage initial, les régions créées sont uniformément réparties (droite)

utilisant le terme d'énergie g (equation 12.3) au lieu de h , au prix d'une complexité plus grande (mais les tests élémentaires sont toujours de complexité constante). Enfin, il est possible de modifier la fonction de densité σ afin d'obtenir un maillage simplifié dont l'échantillonnage est adapté à la courbure locale du modèle original [VAL 05].

La figure 12.11 montre les résultats obtenus avec cette approche sur le modèle de l'ange Lucy (propriété du Stanford 3D Scanning Repository). Le modèle original possède 28 millions de triangles. Le modèle simplifié (affiché dans son intégralité à gauche de la figure) possède 1 million de points. La partie droite de la figure montre des zones agrandies du modèle simplifié, en affichant les arêtes du maillage, montrant l'efficacité de cette approche pour l'échantillonnage adaptatif. En effet, les régions relativement planes du modèle sont faiblement échantillonnées, en opposition avec les régions possédant une forte courbure locale.

12.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques techniques de construction de surfaces triangulées à partir de volumes de données ou de surfaces discrètes et nous avons abordé le problème de l'approximation et de la simplification des surfaces triangulées et des maillages. Ces techniques permettent de passer du monde discret au monde de la géométrie euclidienne et ainsi de bénéficier des outils classiques développées sur les surfaces subdivisées plongées en géométrie euclidienne, par exemple pour le rendu ou l'extraction de caractéristiques géométriques.

12.5. Bibliographie

[ALL 05] ALLIEZ P., UCELLI G., GOTSMAN C., ATTENE M., « Recent Advances in Remeshing of Surfaces », *Part of the state-of-the-art report of the AIM@SHAPE EU network*, 2005.

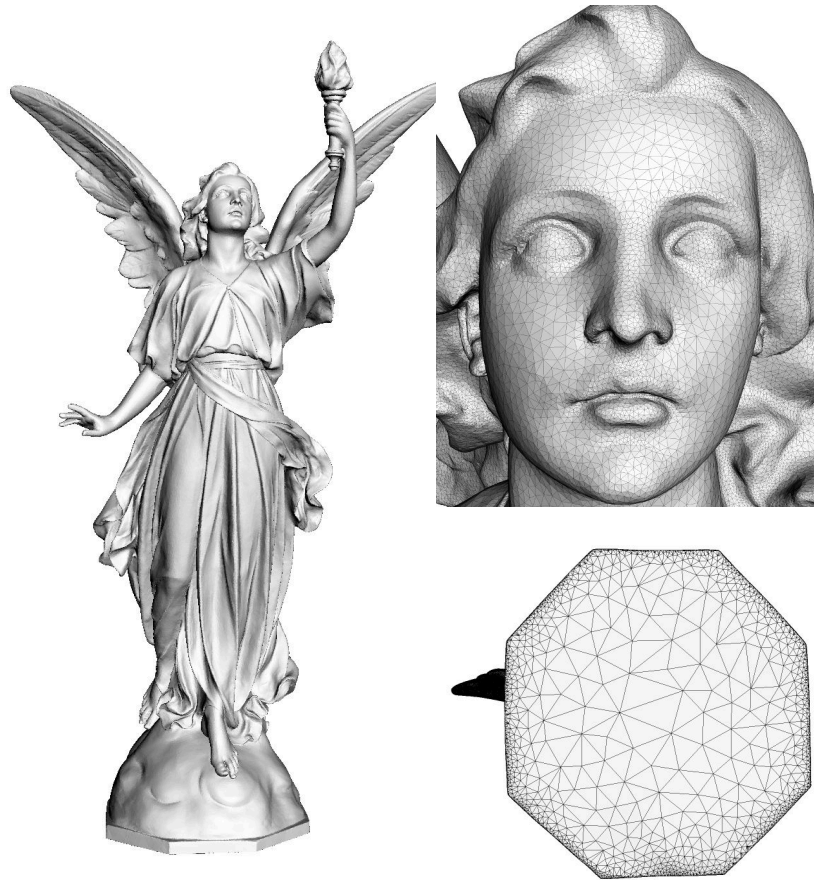


Figure 12.11. Exemple de simplification du modèle "Lucy" (propriété du Stanford 3D Scanning Repository). Gauche : le modèle simplifié. Droite : vues rapprochées du visage et du socle de la statue.

- [BHA 04] BHANIRAMKA P., WENGER R., CRAWFIS R., « Isosurface Construction in Any Dimension Using Convex Hulls », *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 10, n°2, p. 130-141, IEEE Computer Society, 2004.
- [BUR 03] BURGUET J., MALGOUYRES R., « Strong thinning and polyhedric approximation of the surface of a voxel object », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 125, p. 93-114, 2003.
- [COH 04] COHEN-STEINER D., ALLIEZ P., DESBRUN M., « Variational Shape Approximation », *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, vol. 23, n°3, p. 905-914, 2004.
- [DAR 05] DARAGON X., COUPRIE M., BERTRAND G., « Discrete Surfaces and Frontier Orders », *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 23, p. 379-399, 2005.

- [DU 99] DU Q., FABER V., GUNZBURGER M., « Centroidal Voronoi Tessellations : applications and algorithms », *SIAM Review*, vol. 41, n°4, 1999.
- [GAR 97] GARLAND M., HECKBERT P. S., « Surface Simplification Using Quadric Error Metrics », *Computer Graphics*, vol. 31, n° Annual Conference Series, p. 209–216, 1997.
- [HEC 99] HECKBERT P. S., GARLAND M., « Optimal Triangulation and Quadric-Based Surface Simplification », *Journal of Computational Geometry : Theory and Applications*, vol. 14, n°1–3, p. 49–65, November 1999.
- [HOP 96] HOPPE H., « Progressive Meshes », *Computer Graphics*, vol. 30, n° Annual Conference Series, p. 99–108, 1996.
- [INO 99] INOUE K., ITOH T., YAMADA A., FURUHATA T., SHIMADA K., « Clustering large number of faces for 2-dimensional mesh generation », *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*, p. 281–292, 1999.
- [ISE 03] ISENBURG M., LINDSTROM P., GUMHOLD S., SNOEYINK J., « Large Mesh Simplification using Processing Sequences », *IEEE Visualization conference proceedings*, 2003.
- [KAL 96] KALVIN A. D., TAYLOR R. H., « Superfaces : Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error », *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 16, n°3, p. 64–77, mai 1996.
- [LAC 96] LACHAUD J.-O., « Topologically Defined Iso-surfaces », SPRINGER-VERLAG, Ed., *Proc. 6th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'96)*, vol. 1176 of Lecture Notes in Computer Science, p. 245–256, 1996.
- [LAC 98] LACHAUD J.-O., MONTANVERT A., « Digital Surfaces as a Basis for Building Iso-surfaces », *Proc. 5th IEEE Int. Conference on Image Processing (ICIP'98)*, vol. 2, p. 977–981, 1998.
- [LAC 00] LACHAUD J.-O., MONTANVERT A., « Continuous analogs of digital boundaries : A topological approach to iso-surfaces », *Graphical Models and Image Processing*, vol. 62, p. 129–164, Academic Press, 2000.
- [LEN 97] LENOIR A., « Fast Estimation of Mean Curvature on the Surface of a 3D Discrete Object », *Proc. 7th Int. Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'97)*, Montpellier, France, London, UK, Springer-Verlag, p. 175–186, 1997.
- [LIN 00] LINDSTROM P., « Out-of-Core Simplification of Large Polygonal Models », AKELEY K., Ed., *Siggraph 20000, Computer Graphics Proceedings*, ACM Press / ACM SIGGRAPH / Addison Wesley Longman, p. 259–262, 2000.
- [LLO 82] LLOYD S. P., « Least squares quantization in PCM », *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 28, p. 129–137, Mar. 1982.
- [LOR 87] LORENSEN W. E., CLINE H. E., « Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm », *SIGGRAPH '87 : Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, New York, NY, USA, ACM Press, p. 163–169, 1987.
- [LÖT 98] LÖTJÖNEN J., REISSMAN P.-J., MAGNIN I. E., NENONEN J., KATILA T., « A Triangulation Method of an Arbitrary Point Set for Biomagnetic Problems », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, n°4, p. 2228–2233, 1998.

- [MAC 67] MACQUEEN J., « Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations », *Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 1, p. 281–297, 1967.
- [SCH 03] SCHAEFER S., WARREN J., « Adaptive Vertex Clustering Using Octrees », *Proceedings of SIAM Geometric Design and Computing*, 2003.
- [VAL 04] VALETTE S., CHASSERY J.-M., « Approximated Centroidal Voronoi Diagrams for Uniform Polygonal Mesh Coarsening », *Computer Graphics Forum (Eurographics 2004 proceedings)*, vol. 23, n°3, p. 381-389, 2004.
- [VAL 05] VALETTE S., KOMPATSIARIS I., CHASSERY J.-M., « Adaptive Polygonal Mesh Simplification With Discrete Centroidal Voronoi Diagrams », *proceedings of 2nd International Conference on Machine Intelligence ICMI 2005*, p. 655–662, November 2005.
- [VAN 94] VAN GELDER A., WILHELMS J., « Topological Considerations in Isosurface Generation », *ACM Transactions on Graphics*, vol. 13, n°4, p. 337-375, octobre 1994.