

Chapitre 3

Topologie, courbes et surfaces discrètes

La topologie digitale est l'étude des propriétés des objets discrets qui sont indépendantes de leurs propriétés métriques. L'existence d'un trou dans un objet (au sens où un anneau a un trou et un pantalon a deux trous) n'est pas modifiée par une déformation "continue" de l'objet. D'un point de vue algorithmique, on cherche souvent à concevoir des méthodes de traitement d'image qui ne modifient pas la topologie des objets (connexité, existence d'un trou, etc). Le formalisme mathématique nécessaire pour définir de telles méthodes est assez abstrait.

Au sens de la topologie, on peut dire que toutes les courbes fermées simples sont équivalentes (ou homéomorphes), et toute courbe fermée simple dans le plan possède un trou, au sens où elle sépare le plan (théorème de Jordan). La notion de déformation continue est formalisée dans la notion d'homotopie. Cette notion permet d'associer aux objets discrets des objets algébriques (des groupes), de manière qu'à deux objets topologiquement équivalents soient associés deux groupes équivalents. Ces invariants algébriques sont fondamentaux dans l'étude des propriétés topologiques des objets. Cette même notion d'homotopie permet de définir les points simples, qui sont les points qu'on peut enlever d'un objet sans en modifier la topologie. Les points simples sont en particulier à la base des algorithmes de squelettisation topologique (cf. chapitre 8).

D'autres notions fondamentales en topologie sont les frontières et les surfaces. Par exemple, la frontière d'un objet connexe sans cavité est connexe. Une telle frontière doit satisfaire la propriété de séparation de Jordan. En topologie digitale, on se donne les outils pour définir des frontières et surfaces discrètes qui ont une bonne propriété de

Ce chapitre a été rédigé par Jacques-Olivier LACHAUD et Rémy MALGOUYRES.

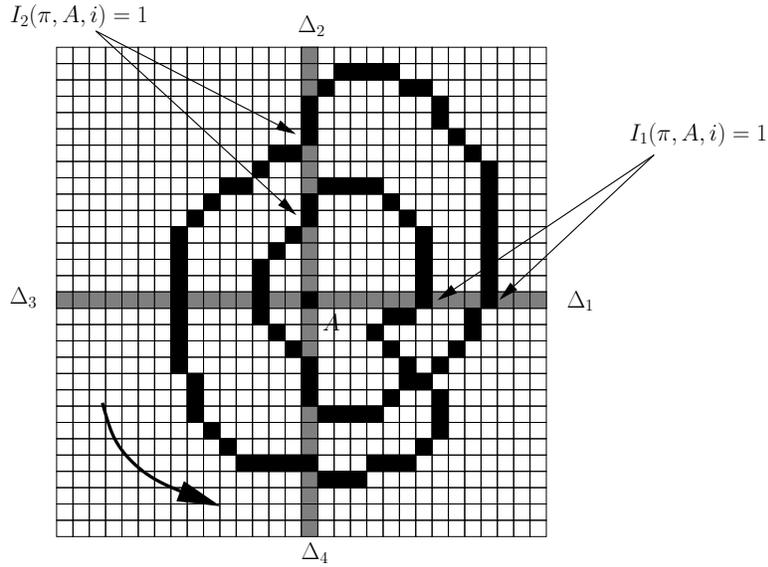


Figure 3.1. Exemple de chemin fermé π avec indice $I(\pi, A) = 2$

séparation. Ces frontières sont ensuite munies de structures de graphes, qui permettent de les construire et de les parcourir efficacement. Des outils existent ensuite pour estimer la géométrie de ces objets (chapitre 14) ou pour en fabriquer des modèles géométriques (chapitres 11 et 12).

3.1. Propriétés topologiques des chemins fermés dans \mathbb{Z}^2

Nous définissons ici la notion d'indice d'un chemin fermé autour d'un point A , qui représente intuitivement le nombre de tours que fait le chemin autour du point. Cet indice ne change pas lorsque le point se déplace continument sans toucher le chemin, ou lorsque le chemin est déformé continument sans toucher le point.

Soit $A = (x_A, y_A) \in \mathbb{Z}^2$ un point. Considérons Δ_1 la demi-droite horizontale (discrète) issue de A et dirigée vers la droite (voir la figure 3.1). Considérons aussi Δ_2 la demi-droite verticale issue de A et dirigée vers le haut.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x > x_A \text{ et } y = y_A\} \\ \Delta_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / y > y_A \text{ et } x = x_A\}\end{aligned}$$

Soit $\pi = (A_i)_{i=0, \dots, n}$ un 8-chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 ne passant pas par A . Nous cherchons à définir l'indice du chemin fermé π autour de A ([MAL 94]), qui représente intuitivement le nombre de tours que fait le chemin π autour de A (en positif ou en négatif suivant le sens trigonométrique). Nous allons calculer cet indice $I(\pi, A)$ en

utilisant la demi-droite Δ_1 , puis en utilisant la demi-droite Δ_2 . Nous montrerons que le résultat est indépendant de la demi-droite choisie, ce qui justifie la notion d'indice.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Notons $A_i = (x_i, y_i)$ les coordonnées du point A_i . Nous posons

$$I_1(\pi, A, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \in \Delta_1 \text{ et } y_{i+1} > y_A \\ -1 & \text{si } y_i > y_A \text{ et } A_{i+1} \in \Delta_1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Le nombre $I_1(\pi, A, i)$ s'appelle la contribution de i à l'indice de π autour de A calculé par rapport à Δ_1 . Nous pouvons de même définir la contribution de i à l'indice de π autour de A calculé par rapport à Δ_2 :

$$I_2(\pi, A, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \in \Delta_2 \text{ et } x_{i+1} < x_A \\ -1 & \text{si } x_i < x_A \text{ et } A_{i+1} \in \Delta_2 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On définit l'indice de π calculé par rapport à Δ_1 ou Δ_2

$$I_1(\pi, A) = \sum_{i=0}^{n-1} I_1(\pi, A, i) \quad \text{et} \quad I_2(\pi, A) = \sum_{i=0}^{n-1} I_2(\pi, A, i)$$

THEORÈME 3.1 *L'indice d'un 8–chemin fermé π autour de A ne dépend pas de la demi-droite par rapport à laquelle on le calcule : $I_1(\pi, A) = I_2(\pi, A)$.*

La preuve du théorème 3.1 se trouve en annexe du chapitre (section 3.8).

DÉFINITION 3.1 *On appelle indice du 8–chemin fermé π autour de A , et on note $I(\pi, A)$ le nombre $I_1(\pi, A) = I_2(\pi, A)$.*

REMARQUE 3.1 *On aurait aussi pu calculer l'indice de π autour de A par rapport aux autres demi-droites Δ_3 et Δ_4 issues de P et parallèles aux axes.*

Supposons maintenant que π est un 4–chemin fermé. Alors on peut calculer $I(\pi, A)$ par rapport à la demi-droite oblique $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = px\}$ avec $p \in \mathbb{R}^+$. Pour cela, on pose :

$$I_{\Delta}(\pi, A, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \leq px_i \text{ et } y_{i+1} > px_{i+1} \text{ et } y_i + px_i > y_A + px_A \\ -1 & \text{si } y_i > px_i \text{ et } y_{i+1} \leq px_{i+1} \text{ et } y_{i+1} + px_{i+1} > y_A + px_A \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On peut de même calculer l'indice par rapport aux autres demi-droites issues de P et à 45 degrés $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ ou Δ_8 . La preuve du théorème suivant est similaire à la preuve du théorème 3.1.

THEORÈME 3.2 *L'indice d'un 4–chemin fermé π autour de A peut être calculé par rapport à n'importe laquelle des demi-droites Δ issues de A . (démonstration en annexe du chapitre, section 3.8).*

La preuve du théorème 3.2 est basée sur le lemme suivant :

LEMME 3.1 *Soit $\alpha \in \{4, 8\}$. Soit π un α –chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 . Soient A et B deux points de \mathbb{Z}^2 qui sont $\bar{\alpha}$ –adjacents, avec $\bar{\alpha} = 12 - \alpha$. Supposons que π ne passe ni par A ni par B . Alors, $I(\pi, A) = I(\pi, B)$*

Démonstration : Nous distinguons 4 cas. *Premier cas :* $B = A + (1, 0)$ ou $A = B + (1, 0)$. Nous calculons $I(\pi, A)$ et $I(\pi, B)$ par rapport à la demi-droite horizontales et dirigée vers la droite $\Delta_1(A)$ et $\Delta_1(B)$ issues de A et de B respectivement. Ces deux demi-droites coïncident (sauf en un point) et ont les mêmes intersections avec π . Les indices calculés par rapport à $\Delta_1(A)$ et $\Delta_1(B)$ sont donc égaux. *Deuxième cas :* $B = A + (1, 1)$ ou $A = B + (1, 1)$. On est donc dans le cas où $\bar{\alpha} = 8$ et $\alpha = 4$. L'indice peut être calculé par rapport aux demi-droites à 45 degrés $\Delta_5(A)$ et $\Delta_5(B)$. A nouveau, les demi-droites $\Delta_5(A)$ et $\Delta_5(B)$ coïncident et le même raisonnement que dans le premier cas montre que $I_5(\pi, A) = I_5(\pi, B)$. Le troisième cas ($B = A + (0, 1)$ ou $A = B + (0, 1)$) et le quatrième cas ($B = A + (1, -1)$ ou $A = B + (1, -1)$) sont traités de manière similaire. \square

THEORÈME 3.3 *Soit $\alpha \in \{4, 8\}$. Soit $\pi = (A_0, \dots, A_n)$ un α –chemin fermé dans \mathbb{Z}^2 . Soit $X = \{A_i / i = 0, \dots, n\}$ l'ensemble des points de π . Soient A et B deux points du complémentaire \bar{X} de X . Supposons que A et B sont dans la même composante $\bar{\alpha}$ –connexe de \bar{X} , on a : $I(\pi, A) = I(\pi, B)$.*

Démonstration : Considérons un $\bar{\alpha}$ –chemin $\gamma = (B_0, \dots, B_m)$ du point A au point B qui ne rencontre pas X (et donc qui ne rencontre donc pas π). En utilisant le lemme 3.1, on démontre par récurrence sur j que $I(\pi, B_j) = I(\pi, A)$. \square

3.2. Courbes comme ensembles de pixels

DÉFINITION 3.2 Soit $d \in \{2, 3\}$ et soit $\alpha \in \{4, 8, 6, 18, 26\}$ une relation d'adjacence sur \mathbb{Z}^d .

1) Une α -courbe fermée simple X dans \mathbb{Z}^d est une partie de \mathbb{Z}^d telle que tout point de X soit α -adjacent à exactement deux autres points de X .

2) Une α -courbe fermée simple paramétrée est un α -chemin fermé $\pi = (A_0, \dots, A_n)$ telle que A_i soit α -adjacent à A_j si et seulement si $j \equiv n \in \{(i-1) \% n, (i+1) \% n\}$.

THEORÈME 3.4 Soit X une α -courbe fermée simple de \mathbb{Z}^d . Il existe une seule α -courbe fermée simple paramétrée π (à un changement d'indice $j = \pm i + i_0$ près) telle que l'ensemble des points de π soit exactement X . De plus, connaissant un point de X , la suite π peut être calculée en temps linéaire par rapport au cardinal de X . Le chemin π s'appelle une paramétrisation de X .

THEORÈME 3.5 (Théorème de Jordan 2D, [ROS 73]) Soit $\alpha \in \{4, 8\}$. Soit $\bar{\alpha} = 12 - \alpha$. Soit X une α -courbe fermée simple dans \mathbb{Z}^2 . Si $\alpha = 4$, on suppose que X a au moins 5 points. Si $\alpha = 8$, on suppose que X a au moins 4 points. Alors le complémentaire de X est formé d'exactly deux composantes $\bar{\alpha}$ -connexes.

Démonstration : Soit π une paramétrisation de X . Un point A de \bar{X} est dit *intérieur* à X si $I(\pi, A)$ est impair. Le point A est dit *extérieur* à X si $I(\pi, A)$ est pair. Le plan de la preuve est le suivant :

1) Nous montrons qu'il existe deux points A_1 et A_2 tels que $I(\pi, A_1) = 1$ et $I(\pi, A_2) = 0$. On en déduit que \bar{X} a au moins deux composantes α -connexes.

2) On démontre que tout point peut être connecté dans \bar{X} soit à A_1 soit à A_2 . On en déduit que \bar{X} a au plus deux composantes connexes.

1) Soit $A_0 = (x_0, y_0)$ un point de X dont la première coordonnée x_0 est maximale. Soit $A_1 = (x_0 - 1, y_0)$ et $A_2 = (x_0 + 1, y_0)$. comme on peut le voir en observant toutes les configurations locales possibles autour de A_0 (voir toutes les configurations locales de courbes fermées simples sur la figure 3.2), les points A_1 et A_2 sont dans \bar{X} (quitte à remplacer A_0 par le point immédiatement au dessous ou immédiatement au dessus dans le cas $\alpha = 4$). La demi-droite issue de A_2 et dirigée vers la droite ne rencontre pas X (donc pas π), donc $I(\pi, A_2) = 0$. La demi-droite Δ_1 issue de A_1 et dirigée vers la droite rencontre une seule fois le chemin π , au point A_0 . De plus (voir les configurations locales), le chemin π traverse Δ_1 au point A_0 . Donc $I(\pi, A_1) = \pm 1$. D'après le théorème 3.3, les points A_1 et A_2 sont dans des composantes $\bar{\alpha}$ -connexes différentes de \bar{X} .



Figure 3.2. Configurations locales de courbes fermées simples (à isométrie près)

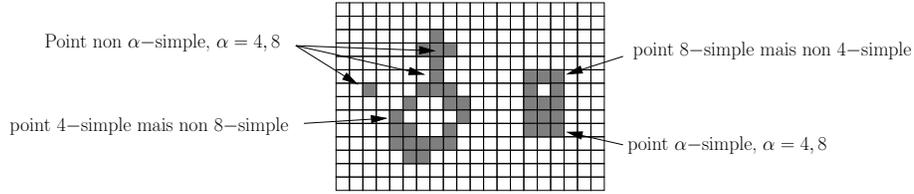


Figure 3.3. La notion de point α -simple

2) Soit M un point de X et soit A un point de $N_{\bar{\alpha}}(M) \cap \bar{X}$. Soit M' un point de $N_{\alpha}(M) \cap X$. Alors (voir les configurations locales de courbes fermées simples) le point A peut être $\bar{\alpha}$ -connecté (localement) dans \bar{X} à un point de $N_{\bar{\alpha}}(M') \cap \bar{X}$. De proche en proche, on peut connecter le point A dans \bar{X} à un point de $N_{\bar{\alpha}}(A_0) \cap \bar{X}$, et donc, soit à A_1 , soit à A_2 . Maintenant, tout point A de \bar{X} peut être $\bar{\alpha}$ -connecté dans \bar{X} à un point voisin de la courbe, et peut donc être $\bar{\alpha}$ -connecté dans \bar{X} soit à A_1 soit à A_2 . On voit donc que \bar{X} a au plus deux composantes connexes. Remarque : on voit de plus que tout point A de \bar{X} peut être connecté soit à A_1 soit à A_2 , et donc on a soit $I(\pi, A) = 0$, soit $I(\pi, A) = \pm 1$. \square

La notion de courbe comme ensemble de pixels a été généralisée pour définir des surfaces dans \mathbb{Z}^3 ([MOR 81], [MAL 94], [MAL 97], [MAL 99], [CIR 05] [BER 97]), mais dans ce cadre aucune définition ne s'est pour le moment imposée.

3.3. Points simples et homotopie

Soit X une partie de \mathbb{Z}^2 et soit $A \in X$. Intuitivement, le point A est simple dans X si la suppression de A dans X ne modifie pas la topologie ([ROS 73])(voir la figure 3.3). Plus précisément :

DÉFINITION 3.3 Soit X une partie de \mathbb{Z}^2 ayant un nombre fini de composantes α -connexes et dont le complémentaire a un nombre fini de composantes $\bar{\alpha}$ -connexes. Un point A de X est dit α -simple dans X si :

- 1) Les ensembles X et $X \setminus \{A\}$ ont le même nombre de composantes α -connexes ;

2) Les ensembles \overline{X} est $\overline{X \setminus \{A\}}$ ont le même nombre de composantes $\overline{\alpha}$ -connexes.

REMARQUE 3.2 Un point A est α -simple dans X si et seulement si A est $\overline{\alpha}$ -simple dans $\overline{X \setminus \{A\}}$.

THEORÈME 3.6 Un point A de $X \subset \mathbb{Z}^2$ est α -simple dans X si et seulement si :

1) Toute composante α -connexe de X contient exactement une composante α -connexe de $X \setminus \{A\}$;

2) Toute composante $\overline{\alpha}$ -connexe de $\overline{X \setminus \{A\}}$ contient exactement une composante $\overline{\alpha}$ -connexe de \overline{X} .

Démonstration : Si A vérifie les conditions du théorème 3.6, alors il est immédiat de A est α -simple dans X . Réciproquement, supposons que A est α -simple dans X . Soit Y la composante α -connexe de X qui contient A (la seule composante qui peut poser problème pour la propriété 1). Le point A ne peut pas être isolé dans Y (c'est à dire que A est α -voisin d'au moins un autre point de Y) car sinon $X \setminus \{A\}$ a une composante α -connexe de moins que X . Donc Y contient au moins une composante α -connexe de $X \setminus \{A\}$. Les composantes de X différentes de Y ne sont pas modifiées lors de la suppression de A . Donc, l'ensemble des composantes α -connexes de $X \setminus \{A\}$ est l'ensemble des composantes α -connexes de X privé de Y union l'ensemble des composantes α -connexes de $X \setminus \{A\}$ contenues dans Y . Les cardinaux de ces ensembles de composantes étant égaux, la composante Y ne contient qu'une composante α -connexes de $X \setminus \{A\}$.

Concernant les composantes $\overline{\alpha}$ -connexes du complémentaire et la propriété 2), le raisonnement est le même compte tenu de la remarque 3.2. \square

Les caractérisations de points simples données par la définition 3.3 et le théorème 3.6 sont globales, c'est à dire qu'avec ces caractérisations on a besoin d'examiner tout l'objet pour savoir si un point est simple (et l'algorithme est linéaire par rapport au nombre de pixels de l'image). Nous allons voir maintenant que la simplicité d'un point est une notion locale, c'est à dire qu'elle ne dépend en fait que du 8-voisinage du point. Ceci donnera un algorithme en temps constant pour déterminer si un pixel est simple.

DÉFINITION 3.4 (nombres de connexité 2D) (voir la figure 3.4) Soit A un point de $X \subset \mathbb{Z}^2$. On note $T_\alpha(A, X)$ le nombre de composantes α -connexes de $N_8(A) \cap X$ qui sont α -adjacentes à A . Le nombre $T_{\overline{\alpha}}(A, \overline{X})$ est le nombre de composantes $\overline{\alpha}$ -connexes de $N_8(A) \cap \overline{X}$ qui sont \overline{X} adjacentes à A .

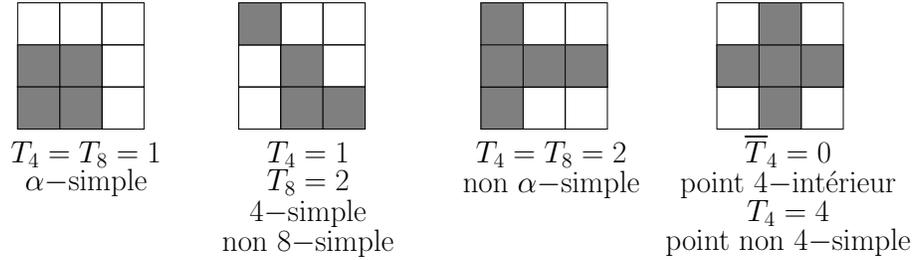


Figure 3.4. Les nombres de connexité et les points simples

LEMME 3.2 Soit A un point de $X \subset \mathbb{Z}^2$ non α -isolé dans X et non α -intérieur à X et (i.e. $T_\alpha(A, X) \neq 0$ et $T_{\overline{\alpha}}(A, \overline{X}) \neq 0$). Alors on a $T_\alpha(A, X) = T_{\overline{\alpha}}(A, \overline{X})$.

La démonstration du lemme 3.2 est laissée au lecteur.

THEORÈME 3.7 Soit A un point de $X \subset \mathbb{Z}^2$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Le point A est α -simple dans X ;
- 2) Le point A n'est pas $\overline{\alpha}$ -intérieur à X et le nombre $T_\alpha(A, X)$ de composantes α -connexes de $N_8(A) \cap X$ qui sont α -adjacentes à A est égal à 1 ;
- 3) Le point A n'est pas α -isolé et le nombre $T_{\overline{\alpha}}(A, \overline{X})$ de composantes $\overline{\alpha}$ -connexes de $N_8(A) \cap \overline{X}$ qui sont $\overline{\alpha}$ -adjacentes à A est égal à 1.
- 4) $T_\alpha(A, X) = T_{\overline{\alpha}}(A, \overline{X}) = 1$.

Démonstration : Les propriétés 2) et 3) sont équivalentes en vertu du lemme 3.2. Nous montrons que 1) implique 2) et que 2) et 3) impliquent 1). Après avoir montré l'équivalence de 1, 2, et 3, l'équivalence de 4 est immédiate d'après lemme 3.2.

Supposons tout d'abord que A vérifie 2) et 3). Le point A n'est pas isolé dans X , donc aucune composante α -connexe de X ne disparaît par suppression de A . De plus, deux points B_1 et B_2 de $X \setminus \{A\}$ sont α -connectés dans $X \setminus \{A\}$ si et seulement s'ils sont α -connectés dans X . En effet, si un α -chemin π de B_1 à B_2 passe par A , on peut remplacer chaque occurrence de A dans π par une portion de α -chemin dans $N_8(A) \cap X$ (propriété 2), et on relie ainsi B_1 à B_2 sans passer par A . Cela prouve que X et $X \setminus \{A\}$ ont le même nombre de composantes α -connexes. En raisonnant de même dans le complémentaire, on voit que 3) implique que \overline{X} et $\overline{X} \setminus \{A\}$ ont le même nombre de composantes $\overline{\alpha}$ -connexes, ce qui prouve 1).

Pour montrer que 1) implique 2), nous supposons par contraposition que 2) est fausse, et nous montrons que A n'est pas α -simple dans X . Si $T_n(A, X) = 0$, alors

A est isolé dans X et A n'est donc pas α -simple dans X . Si $T_n(A, X) \geq 2$, soient B_1 et B_2 deux points de $N_n(A) \cap X$ qui ne sont pas α -connectés dans $N_8(A) \cap X$. Nous distinguons deux cas :

Premier cas : B_1 et B_2 ne sont pas α -connectés dans $X \setminus \{A\}$. Alors, B_1 et B_2 sont dans la même composante α -connexe de X mais dans des composantes α -connexes différentes de $X \setminus \{A\}$. D'après le théorème 3.6, le point A n'est pas α -simple dans X .

Deuxième cas : B_1 et B_2 sont α -connectés dans $X \setminus \{A\}$. Soit $\pi' = (A_1, \dots, A_{n-2})$, avec $n \in \mathbb{N}$, un (plus court) α -chemin de B_1 à B_2 dans $X \setminus \{A\}$. Posons $A_0 = A_{n-1} = A$ et considérons le α -chemin fermé $\pi = (A_0, \dots, A_{n-1})$. Les trois points B_1, B_2 et A sont dans l'une des configurations des points gris de la figure 3.2 (distinguer selon la valeur de α). Dans tous les cas, nous pouvons trouver une demi-droite Δ parmi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ou Δ_4 (considérer aussi des demi-droites obliques $y = px$ si $\alpha = 4$, voir la section 3.1) issue d'un pixel M de $N_{\bar{\alpha}}(A) \cap \bar{X}$, dont le deuxième pixel (considérer la discrétisation de la droite) est A , dont le troisième pixel est dans \bar{X} , et telle que B_1 et B_2 soient de part et d'autre de Δ . On voit que $I(\pi, M, 0) = \pm 1$ et que le troisième pixel N de Δ ne peut pas être $\bar{\alpha}$ -connecté à M sans toucher le α -chemin π (théorème 3.3). On voit que N n'est pas dans la même composante $\bar{\alpha}$ -connexe de \bar{X} que M . Or M et N sont dans la même composante $\bar{\alpha}$ -connexe de $\bar{X} \setminus \{A\}$. D'après le théorème 3.6, le point A n'est pas α -simple dans X . \square

3.4. Groupe fondamental 2D et trous

DÉFINITION 3.5 Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un ensemble fini et $\alpha \in \{4, 8\}$. Un $\bar{\alpha}$ -trou de X est une composante $\bar{\alpha}$ -connexe finie du complémentaire \bar{X} de X dans \mathbb{Z}^2 .

Cette définition des trous 2D possède deux généralisations en 3D : la notion de cavité, et les trous représentés par le groupe fondamental. La notion de cavité est de loin la plus facile à définir :

DÉFINITION 3.6 Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ un ensemble fini et $\alpha \in \{6, 18, 26\}$. Une $\bar{\alpha}$ -cavité de X est une composante $\bar{\alpha}$ -connexe finie du complémentaire \bar{X} de X dans \mathbb{Z}^3 .

Pour définir les trous, ou plus précisément le groupe fondamental ([KON 89a]), nous devons tout d'abord introduire la relation de α -homotopie entre α -chemins fermés. Intuitivement, deux chemins sont homotopes dans X si on peut "déformer continument" un chemin en l'autre par une suite de chemins (de mêmes extrémités)

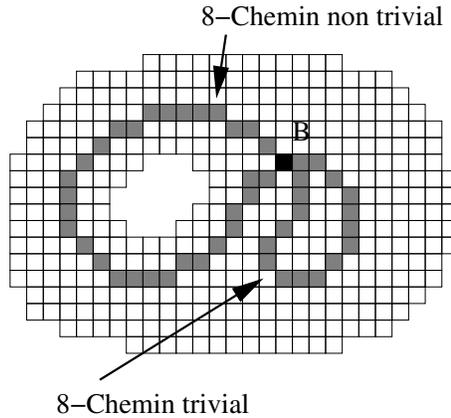


Figure 3.5. La notion de déformation d'un chemin fermé

dans X (voir la figure 3.5). Typiquement, si un chemin fait le tour d'un trou, on ne peut pas le déformer en un point. On parle alors de chemin non trivial. Voyons maintenant la définition formelle de la notion d'homotopie entre chemins (tout d'abord dans \mathbb{Z}^2).

Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un ensemble fini et $\alpha \in \{4, 8\}$. Soit $B \in X$ un point fixé une fois pour toutes et appelé *point base*. Soit $A_B^\alpha(X)$ l'ensemble de tous les α -chemins fermés $\pi = (A_0, \dots, A_p)$ dans X tels que $A_0 = A_p = B$.

Nous introduisons tout d'abord la notion de *déformation élémentaire*. On dit que deux α -chemins π et π' de $A_B^\alpha(X)$ sont les mêmes à une déformation élémentaire près s'ils sont tous deux de la forme d'une concaténation de trois chemins : $\pi = \pi_1 * \gamma * \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 * \gamma' * \pi_2$, les α -chemins γ et γ' ayant les mêmes extrémités et étant tous deux inclus dans un même carré unitaire $\{(x, y), (x+1, y), (x, y+1), (x+1, y+1)\}$. En d'autres termes, les deux chemins π et π' coïncident sauf peut-être sur une portion de leur longueur, et cette portion est incluse dans un carré unitaire.

Maintenant, les deux α -chemins π et π' sont dits α -homotopes (à extrémités fixées) dans X s'il existe une séquence finie de α -chemins $\pi = \pi_0, \dots, \pi_m = \pi'$ de $A_B^\alpha(X)$ tel que pour $i = 1, \dots, m$ les α -chemins π_{i-1} et π_i sont les mêmes à une déformation élémentaire près. En d'autres termes, il existe un chemin dans le graphe Γ dont les sommets sont les éléments de $A_B^\alpha(X)$, avec une arête entre deux chemins s'ils sont les mêmes à une déformation élémentaire près.

La relation d' α -homotopie entre chemins définit une relation d'équivalence sur $A_B^\alpha(X)$ (dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes du graphe Γ). Pour $\pi \in A_B^\alpha(X)$ on note $[\pi]$ la classe d'équivalence de π :

$$[\pi] = \{\pi' \in A_B^\alpha(X) / \pi' \text{ est } \alpha\text{-homotope à } \pi\}$$

On note $\Pi_1^\alpha(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $A_B^\alpha(X)$ pour la relation d' α -homotopie.

Considérons maintenant deux α -chemins π_1 et π_2 de $A_B^\alpha(X)$. On peut définir la concaténation $\pi_1 * \pi_2$ des deux chemins qui est un nouvel élément de $A_B^\alpha(X)$. Si π'_1 est α -homotope à π_1 et π'_2 est α -homotope à π_2 , alors, en déformant d'abord π_1 en π'_1 puis π_2 en π'_2 , on montre que $\pi_1 * \pi_2$ est α -homotope à $\pi'_1 * \pi'_2$. Cela permet de définir sans ambiguïté l'opération de concaténation sur les classes

$$[\pi_1] * [\pi_2] = [\pi_1 * \pi_2]$$

sachant que si l'on avait choisi d'autres représentants pour les classes, la classe de la concaténation aurait été la même.

PROPOSITION 3.1 *L'opération $*$ ainsi définie sur les classes fait de $\Pi_1^\alpha(X)$ un groupe.*

Démonstration : L'associativité vient de l'associativité de l'opération de concaténation. La classe du α -chemin (appelé *chemin constant*) avec un seul point $\pi = (B, B)$ est un élément neutre pour l'opération $*$ sur les classes. Enfin, pour $\pi = (A_0, \dots, A_{p-1})$ considérons le α -chemin $\pi^{-1} = (A_{p-1}, \dots, A_0)$ alors, les chemins $\pi * \pi^{-1}$ et $\pi^{-1} * \pi$ sont tous deux α -homotope au chemin constant (B, B) . Donc $[\pi^{-1}]$ est un inverse de $[\pi]$ pour l'opération $*$ sur les classes. \square

DÉFINITION 3.7 *Le groupe $(\Pi_1^\alpha(X), *)$ s'appelle le α -groupe fondamental de X .*

DÉFINITION 3.8 *Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, *)$ deux groupes. Un morphisme f de G_1 dans G_2 est une application de G_1 dans G_2 telle que pour $g, g' \in G_1$ on ait $f(g * g') = f(g) * f(g')$. Un isomorphisme est un morphisme bijectif.*

THEORÈME 3.8 *Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ et $A \in \overline{X}$. Soit $B \in X$ un point base. Soient π et π' deux chemins de $A_B^\alpha(X)$ qui sont α -homotopes dans X . Alors $I(\pi, A) = I(\pi', A)$. L'application f qui à $[\pi]$ associe $I(\pi, A)$ est donc bien définie de $\Pi_1^\alpha(X)$ dans \mathbb{Z} . C'est un morphisme de groupes.*

Démonstration : Il suffit de montrer le résultat si π et π' sont les mêmes à une déformation élémentaire près. Le théorème s'en déduit par récurrence. Supposons

donc que π et π' sont tous deux de la forme d'une concaténation de trois chemins : $\pi = \pi_1 * \gamma * \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 * \gamma' * \pi_2$, les α -chemins γ et γ' ayant les mêmes extrémités et étant tous deux inclus dans un même carré unitaire $\mathcal{C} = \{(x, y), (x + 1, y), (x, y + 1), (x + 1, y + 1)\}$. On peut trouver une demi-droite Δ issue de A parmi les demi-droites parallèles aux axes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 telle que l'intersection de Δ avec \mathcal{C} soit soit vide, soit réduite à $\{A\}$. On voit que changer π en π' ne change pas les intersections du chemin avec Δ , donc ne change pas l'indice calculé par rapport à Δ . Le fait que f est un morphisme vient du fait que $I(\pi_1 * \pi_2, A) = I(\pi_1, A) + I(\pi_2, A)$ par définition de l'indice. \square

THEORÈME 3.9 *Soit X un rectangle plein. Alors $\Pi_1^\alpha(X)$ est un singleton (réduit à l'élément neutre).*

Démonstration : Soit $\pi \in A_B^\alpha$ et $B = (x_B, y_B)$ le point base. Notons $W(\pi)$ la somme des valeurs absolues de coordonnées $|x - x_B|$ et des coordonnées $|y - y_B|$ de tous les points de π . Si π n'est pas contenu dans $\{B\}$, montrons que nous pouvons faire décroître $W(\pi)$ par une déformation élémentaire. En effet, si nous prenons un point (x_i, y_i) dans le chemin π tel que $|x_i - x_B|$ soit maximum et $|y_i - y_B|$ soit maximum parmi les points de π de même valeur $|x - x_B|$. Par une déformation élémentaire, nous pouvons changer le point (x_i, y_i) dans π en un point (x, y) tel que $|x - x_B| + |y - y_B| < |x_i - x_B| + |y_i - y_B|$. Cela prouve que l'on peut par déformation de π faire décroître $W(\pi)$ jusqu'à ce qu'il soit nul. \square

THEORÈME 3.10 *Soit $X = N_8(A)$ le 8-voisinage d'un point. Alors, $\Pi_1^\alpha(X)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . De plus, l'application f qui à $[\pi]$ associe $I(\pi, A)$ est un isomorphisme de $\Pi_1^\alpha(X)$ dans \mathbb{Z} .*

Démonstration : f est un morphisme, il reste à montrer qu'il est bijectif. Un α -chemin π qui fait une fois le tour de $N_8(A)$ vérifie $I(\pi, A) = 1$ donc $f([\pi]) = 1$. Par composition, le morphisme f est surjectif. Montrons que f est injectif. Supposons que $I(\pi, A) = 0$, avec $\pi \in A_B^\alpha(X)$. Montrons que si π n'est pas réduit à un point, on peut décroître la longueur de π par déformation élémentaire. Il suffit de montrer qu'il y a une suite (a, b, a) dans π . Or dans le cas contraire, π traverse toujours la demi-droite Δ_1 dans le même sens, et on a $I(\pi, A) \neq 0$. \square

On peut calculer le groupe fondamental en 2D ; c'est un groupe libre dont le nombre de générateurs est égal au nombre de trous ([MAL 00]). On peut définir le groupe fondamental dans un cadre très général, et on peut calculer une présentation ([MAL 01])

3.5. Points simples et groupe fondamental

3.5.1. Cas 2D

Soient $Y \subset X \subset \mathbb{Z}^2$ et soit B un point base dans Y . Considérons l'application $i : A_B^\alpha(Y) \longrightarrow A_B^\alpha(X)$ qui à un chemin dans Y associe le même chemin dans X . Alors, si π est α -homotope à π' dans Y , la même déformation montre que π est α -homotope à π' dans X . Cela montre que l'application i est bien définie sur les classes, et définit une application

$$\begin{cases} i_* : \Pi_1^\alpha(Y) & \longrightarrow & \Pi_1^\alpha(X) \\ [\pi]_Y & \longmapsto & [\pi]_X \end{cases}$$

Cette application est un morphisme de groupes (car l'opération de concaténation est la même dans Y et dans X).

THEORÈME 3.11 *Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ et $A \in X$. Alors le point A est simple dans X si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *pour tout $B \in X \setminus \{A\}$ le morphisme $i_*^B : \Pi_1^\alpha(X \setminus \{A\}) \longrightarrow \Pi_1^\alpha(X)$ est un isomorphisme ;*

2) *pour tout $B \in \overline{X}$ le morphisme $i_*^B : \Pi_1^{\overline{\alpha}}(\overline{X}) \longrightarrow \Pi_1^{\overline{\alpha}}(\overline{X \setminus \{A\}})$ est un isomorphisme.*

En général, en 2D et dans les surfaces, un isomorphisme au niveau du groupe fondamental permet de caractériser la possibilité de réduire un ensemble à un autre par une suppression séquentielle de points simples ([MAL 00], [FOU 02]).

3.5.2. Cas 3D

La définition du groupe fondamental d'une partie $X \subset \mathbb{Z}^3$ est exactement la même qu'en 2D sauf pour ce qui est des déformations élémentaires.

Pour ce qui est de $\alpha = 6$ ou $\overline{\alpha} = 6$, nous devons distinguer si l'adjacence est associée à la 26 ou à la 18 adjacence dans le complémentaire. La notion d'adjacence et de connexité est la même, mais la notion de α -homotopie est différente dans les deux cas. Nous noterons 6^+ l'adjacence associée à la 18-adjacence dans le complémentaire, et 6^- l'adjacence associée à la 26-adjacence dans le complémentaire.

Dans le cas $\alpha = 18, 26, 6^+$, on dit que deux α -chemins de $A_B^\alpha(X)$ sont les mêmes à une déformation élémentaire près s'ils sont tous deux de la forme d'une

concaténation de trois chemins : $\pi = \pi_1 * \gamma * \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 * \gamma' * \pi_2$, les α -chemins γ et γ' ayant les mêmes extrémités et étant tous deux inclus dans un même cube unitaire

$$\{(x, y, z), (x + 1, y, z), (x, y + 1, z), (x + 1, y + 1, z), \\ (x, y, z + 1), (x + 1, y, z + 1), (x, y + 1, z + 1), (x + 1, y + 1, z + 1)\}.$$

Dans le cas $\alpha = 6^-$, on dit que deux α -chemins de $A_B^\alpha(X)$ sont les mêmes à une déformation élémentaire près s'ils sont tous deux de la forme d'une concaténation de trois chemins : $\pi = \pi_1 * \gamma * \pi_2$ et $\pi' = \pi_1 * \gamma' * \pi_2$, les α -chemins γ et γ' ayant les mêmes extrémités et étant tous deux inclus dans un même carré unitaire

$$\{(x, y, z), (x + 1, y, z), (x, y + 1, z), (x + 1, y + 1, z)\} \quad \text{ou} \\ \{(x, y, z), (x, y + 1, z), (x, y, z + 1), (x, y + 1, z + 1)\} \quad \text{ou} \\ \{(x, y, z), (x + 1, y, z), (x, y, z + 1), (x + 1, y, z + 1)\}$$

En dehors des déformations élémentaires, les définitions de l' α -homotopie et du groupe fondamental, du morphisme i_* associé à une inclusion de Y dans X sont les mêmes que dans le cas $2D$.

DÉFINITION 3.9 Soit $X \subset \mathbb{Z}^3$ et $A \in X$. Soit $\alpha \in \{6^-, 6^+, 18, 26\}$ Le point A est α -simple dans X si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) Toute composante α -connexe de X contient exactement une composante α -connexe de $X \setminus \{A\}$;
- 2) Toute composante $\bar{\alpha}$ -connexe de $\overline{X \setminus \{A\}}$ contient exactement une composante $\bar{\alpha}$ -connexe de \overline{X} .
- 3) pour tout $B \in X \setminus \{A\}$ le morphisme $i_*^B : \Pi_1^\alpha(X \setminus \{A\}) \longrightarrow \Pi_1^\alpha(X)$ est un isomorphisme ;
- 4) pour tout $B \in \overline{X}$ le morphisme $i_*^B : \Pi_1^{\bar{\alpha}}(\overline{X}) \longrightarrow \Pi_1^{\bar{\alpha}}(\overline{X \setminus \{A\}})$ est un isomorphisme.

Le point au centre de la configuration de la figure 3.6.(a) est 6^+ -simple, 6^- -simple, 18-simple et 26-simple. Le point A au centre de la configuration de la figure 3.6.(b) est 26-simple et 6^+ -simple et 6^- -simple. Par contre, il n'est pas 18-simple, car si y n'est pas 18-connecté au reste de la configuration dans \mathbb{Z}^3 , la suppression de A déconnecte l'objet. Si le point A est 18-connecté au reste de la configuration dans \mathbb{Z}^3 , la suppression de A supprime un 18-chemin fermé qui est un élément du groupe fondamental (voir le théorème 8.1 pour une justification plus précise). Le point A au centre de la configuration de la figure 3.6.(c) est 18-simple. Par

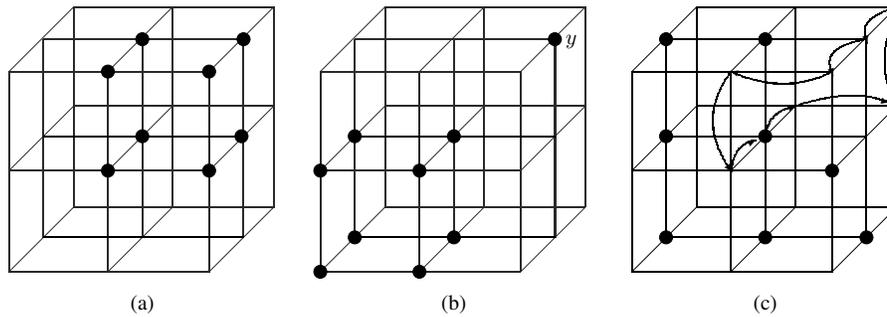


Figure 3.6. Exemples de configurations

contre, il n'est pas 26-simple car la suppression de A crée un 6-chemin fermé (représenté par des flèches sur la figure) qui est un élément du 6⁻groupe fondamental du complémentaire.

Dans [BER 96], GILLES BERTRAND donne une caractérisation locale des points simples (voir le théorème 8.1) (le fait que la notion de point simple est locale était déjà connu [KON 89b]). Dans [FOU 03], on démontre que la condition 4) de la définition de point simple ci-dessous est redondante, c'est à dire qu'on peut supprimer cette condition sans changer la notion.

3.6. Courbes et surfaces comme arcs d'un graphe d'adjacence de \mathbb{Z}^d

La section précédente a montré qu'on pouvait définir des courbes et surfaces discrètes qui sont de simples sous-ensembles du plan discret \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 . Cette approche avait notamment comme attrait la simplicité de sa mise en œuvre, à la fois du point de vue de la représentation (ensemble de pixels ou voxels) et du point de vue des algorithmes de parcours. Cette approche a cependant quelques limitations. Par exemple, les α -bords d'objets discrets ne sont en général pas des courbes ou surfaces discrètes dans le sens donné ci-dessus. Cet aspect est réellement problématique lorsqu'on cherche à analyser des objets issus d'une discrétisation, par exemple pour estimer son aire ou ses points caractéristiques.

Nous présentons ici une autre approche aux surfaces discrètes, dont le formalisme a été essentiellement développé par G. T. HERMAN, J. K. UDUPA et T. Y. KONG. Une présentation assez complète de cette approche est dans [HER 98b]. On verra que ce formalisme, quoique plus général, rejoint quelque peu les approches interpixel comme la grille cellulaire de KOVALEVSKY [KOV 89] et la topologie de KHALIMSKY *et al.* [KHA 90]. Contrairement à ce que l'on a vu précédemment, les courbes ou surfaces ne seront pas des sous-ensembles de pixels ou voxels, mais des ensembles d'éléments plus fins, appelés *surfels*, qui sont situés « entre » deux pixels ou deux voxels. Un autre

intérêt de cette approche est de conduire à des algorithmes d'extraction de surfaces par *suivi*. Un exemple d'application est en imagerie médicale tridimensionnelle. Par la technique précédente, on peut reconstruire une isosurface par suivi à partir d'un point initial, sans parcourir l'image toute entière. On gagne ainsi un ordre de grandeur de complexité par rapport à un algorithme type *marching-cube* (voir chapitre 12).

Dans cette section, nous allons d'abord présenter cette approche dans un cadre assez général avec les résultats essentiels sur ces surfaces. Nous allons ensuite introduire la notion d'image binaire et nous intéresser aux bords entre pixels/voxels noirs (0) et blancs (1). Enfin, nous allons définir des voisinages sur ces surfaces et en déduire des algorithmes d'extraction par suivi, dont nous discuterons de la complexité.

3.6.1. Espace discret, surface, intérieur et extérieur

De façon plus formelle, un *espace discret* est un couple (V, W) , où V est un ensemble dénombrable et W une relation symétrique sur $V \times V$. De plus, la fermeture transitive de W est exactement $V \times V$. De façon équivalente, (V, W) est un graphe connexe de sommets V dont les arcs satisfont $(u, v) \in W$ ssi $(v, u) \in W$. Les sommets V représentent les pixels en 2D ou les voxels en 3D. On les appellera *spels*, pour *spatial elements*, et marquer ainsi le fait que le formalisme présenté est plus général que les grilles 2D ou 3D. Les arêtes de W constituent une relation d'adjacence entre pixels/voxels, appelée relation de *proto-adjacence*. Géométriquement, comme chaque arête relie deux sommets adjacents, on peut le voir comme un élément à l'intersection de deux spels adjacents. Par exemple, on vérifie facilement que $(\mathbb{Z}^2, 4)$ et $(\mathbb{Z}^3, 6)$ sont des espaces discrets pour les relations usuelles de 4-adjacence et de 6-adjacence. Dans $(\mathbb{Z}^2, 4)$, chaque arête est identifiée à l'intersection de deux carrés fermés de côté 1, un segment qui sépare les deux pixels, souvent appelé *lignel*. Dans $(\mathbb{Z}^3, 6)$, chaque arête est identifiée à l'intersection de deux cubes fermés de côté 1, un carré qui sépare les deux voxels. On appellera donc *surfel*, pour *surface element*, un arc du graphe d'adjacence, car sa représentation géométrique est un morceau de surface commun à deux spels, qui sont des éléments volumiques. Par rapport aux adjacences classiques du chapitre 1, la proto-adjacence désigne l'adjacence minimale entre les pavés de l'espace. D'autres adjacences plus fortes seront construites dessus. Enfin, si on considère tous les arcs qui partent d'un pavé, ils représentent tous les éléments de son bord.

Nous introduisons quelques définitions. Formellement, il faudrait toujours leur rajouter l'expression « dans l'espace discret (V, W) », mais nous l'omettrons car nous ne travaillerons que dans un seul espace à la fois. Dans ce formalisme, une *surface (discrète)* est un sous-ensemble non-vide de W .¹ Cette définition est paradoxalement

1. Attention, quand un arc est dans la surface, son arc opposé n'est pas forcément dans la surface.

très simple comparée à l'approche surface de pixels/voxels. Toute surface est alors un ensemble *fin*, dont les arcs peuvent définir une *orientation*. Ces surfaces ne sont néanmoins pas forcément *séparantes*. Un surfel sera noté comme un couple (orienté) de deux spels proto-adjacents. Si O et Q sont deux sous-ensembles de V , alors leur *frontière* $\partial(O, Q)$ est l'ensemble $\{(u, v) \in W \mid u \in O \wedge v \in Q\}$. On va étudier plus en détails la notion de séparation des surfaces.

DÉFINITION 3.10 Soit S une surface dans (V, W) . Alors,

- l'intérieur immédiat $II(S)$ de S est l'ensemble $\{u \mid (u, v) \in S \text{ pour un } v \in V\}$.
- l'extérieur immédiat $IE(S)$ de S est l'ensemble $\{v \mid (u, v) \in S \text{ pour un } u \in V\}$.
- la surface opposée \bar{S} à S est l'ensemble $\{(v, u) \mid (u, v) \in S\}$.

On appellera relation d'*adjacence entre spels* toute relation symétrique ρ telle que $W \subset \rho \subset V \times V$. Un ρ -chemin est une séquence de spels telle que chaque couple d'éléments consécutifs sont ρ -adjacents. Comme toute relation, la fermeture transitive d'une adjacence ρ définit naturellement des ρ -composantes dans tout sous-ensemble W de V , c'est-à-dire les sous-ensembles maximaux de W tels que toute paire de spels est reliable par un ρ -chemin dans W . Si W ne contient qu'une seule ρ -composante, on dit qu'il est ρ -connexe. On dira qu'un W -chemin *traverse la surface* S si S ou \bar{S} contient un arc du W -chemin.

Par analogie avec l'espace euclidien, l'intérieur ou l'extérieur d'une surface sont les parties de l'espace où il existe un chemin qui la relie avec la surface sans la toucher. L'*intérieur* $I(S)$ de S (resp. l'*extérieur* $E(S)$ de S) est l'ensemble des spels $c \in V$ tel qu'il existe un W -chemin de c à un élément de $II(S)$ (resp. de $IE(S)$) qui ne traverse pas S .

Les notions précédentes sont illustrées sur la figure 3.7. La partie gauche montre un exemple de surface dans l'espace standard \mathbb{Z}^2 muni de la 4-connexité. La partie droite montre que le formalisme est plus général. Le plan discret est muni d'une adjacence moins fournie que la 4-connexité. Cela n'empêche pas de définir surface, intérieur, etc.

3.6.2. Surfaces de Jordan

On va pouvoir aborder l'équivalent discret du théorème de JORDAN, à savoir est-ce que intérieur et extérieur partitionnent l'espace. Il est facile de montrer que, quelle que soit la surface S , $I(S) \cup E(S) = V$ (Lemme 3.2.1, [HER 98b]). Il reste donc à savoir si $I(S) \cap E(S) = \emptyset$. Évidemment, toutes les surfaces ne satisfont pas cette propriété, mais nous allons isoler les caractéristiques de telles surfaces.

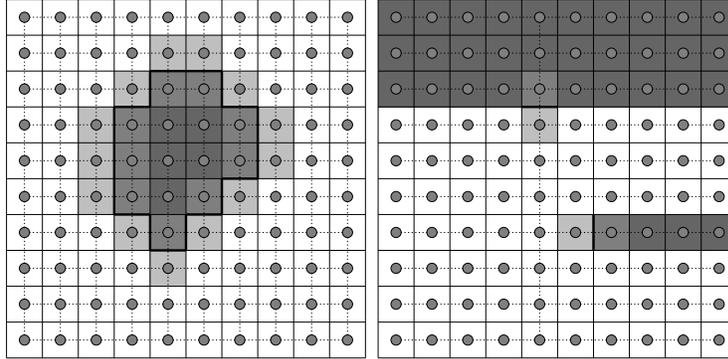


Figure 3.7. Illustration de quelques notions sur les espaces discrets. A gauche, l'espace discret $(\mathbb{Z}^2, 4)$, avec les adjacences tracées en pointillés, une surface discrète tracée en noir épais, et les ensembles $I(S)$, $II(S)$, $IE(S)$, et $E(S)$ peints respectivement du plus foncé au plus clair. A droite, mêmes conventions mais pour l'espace \mathbb{Z}^2 muni de la proto-adjacence indiquée.

On dira qu'une surface est *presque-Jordan* ssi tout W -chemin d'un élément de $II(S)$ à un élément de $IE(S)$ traverse S . Le résultat suivant justifie cette définition :

LEMME 3.3 (Lemme 3.2.2, [HER 98b]) Pour S surface de (V, W) , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) S est presque-Jordan.
- (ii) Tout W -chemin de $I(S)$ à $E(S)$ traverse S .
- (iii) $I(S) \cap E(S) = \emptyset$.

De plus, si elles sont vérifiées, on a $S = \partial(I(S), E(S))$.

On constate que la notion d'intérieur et extérieur d'une surface non distinguables est équivalente au problème de trouver un chemin qui ne traverse pas S et qui relie intérieur et extérieur immédiat. Un autre résultat intéressant est que la surface est bien la frontière entre intérieur et extérieur, ce qui est le cas dans le continu.

La figure 3.7 montre deux exemples de surfaces presque-Jordan (dans deux espaces discrets différents). Sur l'espace discret à droite, tout surfel isolé définit une surface presque-Jordan ! On voit que la relation de proto-adjacence est un équivalent discret des systèmes d'ouverts ou de voisinages de la topologie classique, et qu'un même espace peut être vu sous des topologies différentes.

3.6.3. Connexité intérieur et extérieur, surface $\kappa\lambda$ -Jordan

Un aspect important du théorème de JORDAN est que l'intérieur et l'extérieur sont tous deux connexes. Un équivalent « naturel » serait de demander à $I(S)$ et $E(S)$ d'être W -connexe. Malheureusement, même dans des espaces discrets standards comme $(\mathbb{Z}^2, 4)$, on voit assez facilement (voir par exemple la figure 1.9, droite, page 32) que des surfaces presque-Jordan n'ont pas leur intérieur ou leur extérieur 4-connexe. Nous allons donc associer une spel-adjacence spécifique à l'intérieur et une autre spécifique à l'extérieur. Dans la suite κ et λ désigneront des relations d'adjacence entre spels.

Une surface est alors $\kappa\lambda$ -Jordan ssi elle est presque-Jordan, son intérieur est κ -connexe et son extérieur est λ -connexe. Ces surfaces nous intéressent vraiment, car elles ont effectivement toutes les propriétés analogues des surfaces euclidiennes. Or, le théorème suivant montre que le(s) bord(s) des objets discrets a bien cette propriété :

THEORÈME 3.12 (Théorème 3.3.3, [HER 98b]) *Si O est un sous-ensemble propre de V κ -connexe et si Q est une union λ -connexe de W -composantes du complémentaire de O dans V , alors la frontière $S = \partial(O, Q)$ est $\kappa\lambda$ -Jordan, et $E(S) = Q$ et $I(S) = V \setminus Q$.*

La surface entre l'objet et une composante du fond est donc de Jordan. Son extérieur est égal à cette composante, son intérieur contient l'objet, mais aussi les autres composantes du fond, en fait les cavités de l'objet. On voit donc que les surfaces frontières ont bien les propriétés de JORDAN dans ce formalisme. Nous terminons ce paragraphe avec une caractérisation étonnante des surfaces WW -Jordan.

THEORÈME 3.13 (Théorème 3.3.5, [HER 98b]) *Si S est une surface de (V, W) , alors S est WW -Jordan ssi S est minimalement presque-Jordan.²*

Dans le cas continu, les surfaces sont toujours minimales car leur enlever un point connecte intérieur et extérieur. Dans le cas discret, si la surface est minimalement presque-Jordan, alors intérieur et extérieur satisfont la proto-connexité de l'espace discret. La figure 3.7, gauche, montre une surface minimalement presque-Jordan, et on vérifie la 4-connexité de son intérieur et de son extérieur. Sur la même figure à droite, la surface n'est pas minimalement presque-Jordan, car on peut enlever un des deux surfels et obtenir dans les deux cas encore une surface presque-Jordan. On vérifie que l'intérieur n'est pas W -connexe.

2. Au sens où tout sous-ensemble propre de S n'est pas presque-Jordan.

3.6.4. Image binaire, $\kappa\lambda$ -bord, paire de Jordan

Les paragraphes précédents ont montré que la frontière entre un objet discret connexe et des composantes de son complémentaire avait de bonnes propriétés. En imagerie, les objets ne sont pas toujours connexes. De même on s'intéresse aussi aux propriétés des images dans leur globalité. On définit donc une *image binaire*³ comme le triplet (V, W, f) où (V, W) est un espace discret et f une fonction de domaine V à valeur dans $\{0, 1\}$. Les spels de V de valeur 1 par f (resp. 0 par f) seront appelés *1-spels* (resp. *0-spels*).

Une surface S est un $\kappa\lambda$ -bord dans l'image (V, W, f) ssi il existe une κ -composante O de 1-spels et une λ -composante Q de 0-spels avec $S = \partial(O, Q)$. Les bords d'une image binaire caractérisent son contenu : leurs propriétés comme leur extraction sont des problématiques importantes. Le paradoxe de connexité de la figure 1.9, page 32, indique déjà que les 4,4-bords d'une image binaire ne sont en général pas 4,4-Jordan. Est-il alors possible de trouver des couples de connexités pour lesquels tout bord dans n'importe quelle image est de Jordan ? Ces connexités seraient alors privilégiés dans tout processus d'analyse d'une image binaire. La réponse quoique non directe est positive, comme le montre la suite.

On se restreint maintenant aux adjacences *serrées*.⁴ En fait, toutes les adjacences usuelles sont serrées et par exemple toutes les adjacences locales dans \mathbb{Z}^d (les coordonnées diffèrent de 1 maximum) sont serrées.

DÉFINITION 3.11 *Une paire $\{\kappa, \lambda\}$ d'adjacences serrées est une paire de Jordan (resp. paire de Jordan forte) de (V, W) ssi tout $\kappa\lambda$ -bord fini (resp. infini) dans toute image sur (V, W) est presque-Jordan.*

THEORÈME 3.14 (Théorème 5.3.8, [HER 98b]) *Pour de telles connexités, tout $\kappa\lambda$ -bord est $\kappa\lambda$ -Jordan.*⁵

Maintenant, quelles sont les paires de Jordan pour différents espaces ? Le tableau 3.1 donne les définitions de quelques adjacences dans l'espace discret \mathbb{Z}^d , les

3. En anglais, *binary picture*.

4. ρ est une adjacence serrée ssi $(u, v) \in \rho$ implique qu'il existe un W -chemin de u à v dont chaque élément intermédiaire est soit ρ -adjacent à u ou à v .

5. Le lecteur attentif aura remarqué que la paire de Jordan garantit certes le presque-Jordan mais aucunement les connexités de l'intérieur ou de l'extérieur. Ce dernier résultat vient des propriétés des bords comme séparation entre 0-spels et 1-spels, et de la contrainte *serrée* des adjacences.

notation	définition	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}^3
ω_d	$u\omega_d v \Leftrightarrow \ u - v\ _1 = 1$	4	6
α_d	$u\alpha_d v \Leftrightarrow \ u - v\ _\infty = 1$	8	26
δ_d	$u\delta_d v \Leftrightarrow u\alpha_d v \wedge \ u - v\ _1 \leq 2$	8	18
$\gamma_{n,d}$	$u\gamma_{n,d} v \Leftrightarrow u\alpha_d v \wedge \sum_{i=1, i \neq n}^d u_i - v_i \leq 2$	8	14

Tableau 3.1. Quelques exemples d'adjacences dans \mathbb{Z}^d et leurs équivalents en 2D et 3D.

espace discret	paires de Jordan	références
$(\mathbb{Z}^2, 4)$	$\{8, 4\}, \{8, 8\}$	[HER 92]
$(\mathbb{Z}^3, 6)$	$\{18, 6\}, \{26, 6\}, \{14, 6\}$	[HER 83, MIG 95, KON 92]
$(\mathbb{Z}^2, 6)$ (grille hex.)	$\{6, 6\}$	[HER 98a]
(\mathbb{Z}^d, ω_d)	$\{\delta_d, \omega_d\}, \{\alpha_d, \omega_d\}, \{\gamma_{n,d}, \omega_d\}$	[HER 92, HER 98b]

Tableau 3.2. Exemples de paires de Jordan pour divers espaces discrets. La 6-adjacence dans \mathbb{Z}^2 est la 4-adjacence usuelle plus deux adjacences diagonales opposées (par exemple sud-ouest/nord-est).

relations ω_2 et ω_3 correspondant aux proto-adjacences classiques (4 et 6) en dimensions 2 et 3. Le tableau 3.2 liste quelques paires d'adjacences pour différents espaces discrets. La figure 3.8 illustre l'importance des paires de Jordan dans l'espace $(\mathbb{Z}^2, 4)$ pour définir des bords qui ont une propriété de Jordan.

3.6.5. Adjacences entre surfels le long d'un bord ; suivi de surface

Même si le concept est valide pour des espaces plus généraux, on se limite désormais à la grille \mathbb{Z}^d . Grâce aux paires de Jordan, on connaît maintenant les paires

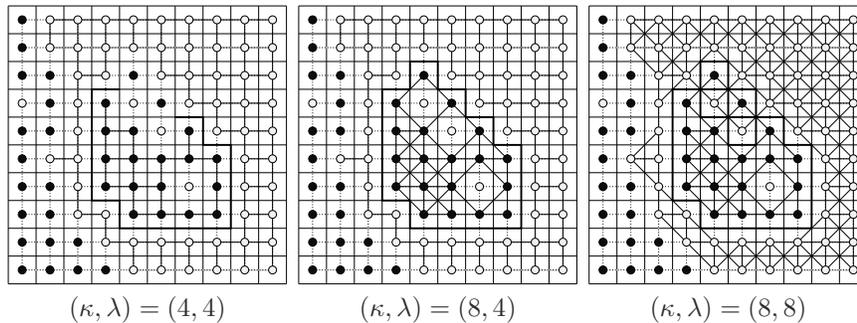


Figure 3.8. Illustration de $\kappa\lambda$ -bords dans $(\mathbb{Z}^2, 4)$. À gauche, la paire $(4, 4)$ n'est pas de Jordan et le bord n'est pas presque-Jordan. Au milieu et à droite, les paires sont de Jordan pour $(\mathbb{Z}^2, 4)$ et les bords sont bien de Jordan.

d'adjacences qui définissent des bords cohérents dans les images binaires. Quoiqu'on sache mathématiquement que le bord a la bonne propriété, nous n'avons encore guère avancé sur l'aspect algorithmique de l'extraction de ce bord. Le seul algorithme naturel est de parcourir les ensembles O et Q pour découvrir les surfels frontières, ce qui reste peu efficace. Une solution alternative est de définir une relation d'adjacence entre surfels frontières d'une image. Si cette adjacence est calculable simplement, alors un $\kappa\lambda$ -bord pourra être extrait par suivi de ces adjacences.

On appellera *bel* d'une image binaire $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}^d, \omega_d, f)$ tout surfel (u, v) tel que u est un 1-spel et v un 0-spel. On notera aussi $B(\mathcal{C})$ l'ensemble des bels de cette image binaire. Il n'est pas difficile de voir que cette surface est presque-Jordan. On définit une relation d'adjacence « maximale » σ entre deux surfels distincts, telle que $(u, v)\sigma(u', v')$ ssi les 4 spels u, v, u', v' sont tous deux à deux α_d -adjacents.

Pour toute image binaire \mathcal{C} , une famille β de relations binaires $\beta_{\mathcal{C}}$ sur $B(\mathcal{C})$ est une famille d'adjacences entre bels ssi les conditions suivantes sont vérifiées pour toute image binaire \mathcal{C} : la relation $\beta_{\mathcal{C}}$ est irreflexive, de fermeture transitive symétrique, locale ($\beta_{\mathcal{C}} \subset \sigma$) et localement déterminée.⁶ Géométriquement, deux bels peuvent être adjacents seulement si leurs plongements géométriques (lignel en 2D, carré en 3D, etc) se touchent. On va chercher les bels-adjacences qui permettent d'extraire un $\kappa\lambda$ -bord par simple suivi. Formellement, on recherche donc :

DÉFINITION 3.12 *Soit β une famille d'adjacences entre bels, on dira qu'un $\kappa\lambda$ -bord S dans l'image binaire \mathcal{C} est $\kappa\lambda\beta_{\mathcal{C}}$ -Jordan ssi S est $\kappa\lambda$ -Jordan et une $\beta_{\mathcal{C}}$ -composante de $B(\mathcal{C})$. Un triplet (κ, λ, β) est dit triplet de Jordan ssi tout $\kappa\lambda$ -bord dans toute image binaire \mathcal{C} est $\kappa\lambda\beta_{\mathcal{C}}$ -Jordan.*

La définition précédente induit directement un algorithme d'extraction de bord par suivi des adjacences entre bels (algorithme 2). Cet algorithme est très général et est finalement un simple parcours en largeur d'un graphe dont les adjacences sont calculées à la volée. Au vu des résultats précédents, le triplet $(\alpha_d, \alpha_d, \sigma)$ est un triplet de Jordan, car la relation maximale entre surfels σ , restreinte aux bels d'une image binaire, garantit la connexité entre bels des bords. Cette adjacence entre bels n'est malheureusement pas la plus efficace, car tout surfel a potentiellement 6 voisins dans \mathbb{Z}^2 , 32 voisins dans \mathbb{Z}^3 , 120 voisins dans \mathbb{Z}^4 , $(d^2 - 1)2^{d-1}$ dans \mathbb{Z}^d . Ainsi la ligne 4 de cet algorithme se révèle assez coûteuse en grande dimension.

Plusieurs travaux ont donc porté sur la réduction du nombre de surfels à examiner dans le voisinage d'un bel, tout en extrayant encore le bord complet. La figure 3.9

6. Informellement, l'adjacence ne dépend que de la valeur des spels autour des bels, dans un voisinage limité. Cela implique par exemple que l'adjacence est invariante par translation.

Algorithme 2 : Algorithme d'extraction par suivi du $\kappa\lambda$ -bord d'une image \mathcal{C} qui contient le bel initial b_0 .

Entrées : Image binaire \mathcal{C} , bel initial $b_0 \in B(\mathcal{C})$, une famille β d'adjacences de bels avec (κ, λ, β) triplet de Jordan

Sorties : Le $\kappa\lambda$ -bord qui contient b_0 .

- 1 ML : Ensemble // les bels déjà visités ;
 QU : File // les bels touchant ML et qui restent à propager ;
 OL : Liste // la liste des bels en sortie ;
 - 2 Mettre b_0 dans QU et ML ;
 - 3 **tant que** QU est non vide **faire**

Retirer b de QU et le mettre dans OL ;			
pour chaque b' tel que $\beta_{\mathcal{C}}(b, b')$ et $b' \in B(\mathcal{C})$ faire			
<table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">si $b' \notin ML$ alors</td> </tr> <tr> <td style="padding: 0 10px;"> <table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Mettre b' dans QU et dans ML</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	si $b' \notin ML$ alors	<table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Mettre b' dans QU et dans ML</td> </tr> </table>	Mettre b' dans QU et dans ML
si $b' \notin ML$ alors			
<table style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">Mettre b' dans QU et dans ML</td> </tr> </table>	Mettre b' dans QU et dans ML		
Mettre b' dans QU et dans ML			
-

montre plusieurs familles d'adjacences de bels plus efficaces que σ . En restreignant les adjacences entre bels aux surfels qui partagent une arête commune,⁷ comme le fait β^e , on diminue déjà considérablement le nombre de voisins à examiner. Il suffit en fait de ne regarder qu'un seul sens pour chaque direction de voisinage avec un choix judicieux de ces sens pour extraire la même surface. C'est ce que fait la famille β^{e+} définie en dimension quelconque [ART 81, HER 83, UDU 94]. Enfin, en 3D, on peut restreindre encore le voisinage à considérer comme le fait la famille β^{e+*} : seulement un bel sur trois doit regarder deux directions, deux bels sur trois n'ont qu'un seul successeur [GOR 89, KON 92]. Dans \mathbb{Z}^3 , une borne inférieure stricte est donnée par Herman ([HER 98b], Théorème 1.9.1), qui montre qu'on ne peut se contenter d'examiner une seule direction suivante par bel si l'on veut être sûr d'extraire toute la composante.⁸ Ce dernier résultat montre que la famille β^{e+*} est très proche de cette borne inférieure stricte et que l'on ne pourra guère améliorer ce résultat.

La figure 3.10 illustre le comportement de l'algorithme 2 pour les trois familles d'adjacences précitées (β^e , β^{e+} , β^{e+*}). Les surfaces extraites lorsque l'algorithme se termine sont équivalentes. Le tableau 3.3 résume le gain de ces approches dans (\mathbb{Z}^d, ω_d) . D'autres triplets de Jordan existent dans la grille \mathbb{Z}^d [LAC 00]. On peut noter que ces notions de suivi de surface sont extensibles à d'autres espaces discrets, comme la grille hexagonale 2D, les grilles BCC et FCC 3D, etc [HER 98b].

7. Une arête en 3D et une face de dimension $d - 2$ dans \mathbb{Z}^d .

8. Plus formellement, il n'existe pas forcément de cycle hamiltonien dans le graphe d'adjacence des bels sur le bord d'une δ_3 -composante de 1-spels.

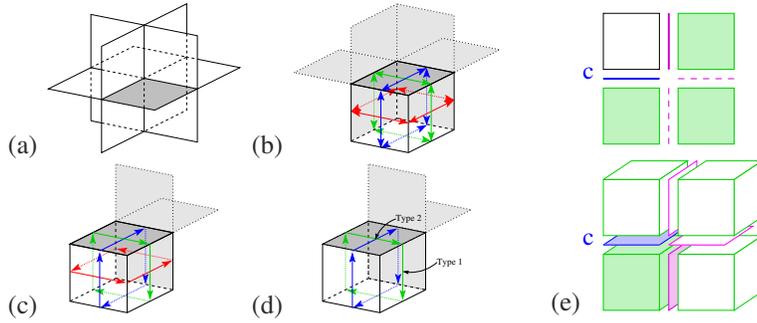


Figure 3.9. Familles d'adjacences entre bels dans \mathbb{Z}^3 . (a) vision partielle de celle induite par σ (chaque bel doit examiner potentiellement 32 autres surfels). Dans (bcd), les familles d'adjacences entre bels sont toutes des restrictions de plus en plus forte de σ à des bels qui partagent au moins une arête. (b) Adjacence β^e par arête dans toutes les directions et dans les deux sens (12 surfels). (c) Adjacence β^{e+} de Artzy et. al. [ART 81] où on regarde toutes les directions mais un seul sens (6 surfels). (d) Adjacence β^{e+*} de Gordon et Udupa [GOR 89] où on ne regarde qu'un seul sens et les deux tiers du temps une seule direction (6 ou 3 surfels). (e) Pour les adjacences de bels limitées aux arêtes, on définit un seul bel successeur parmi les 3 surfels possibles dans la direction d'une arête, par exemple le premier bel en tournant dans le sens trigonométrique.

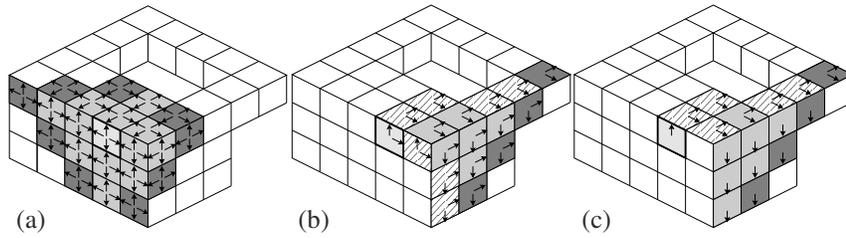


Figure 3.10. Suivi de surface par application de l'Algorithme 2 pour différentes relations d'adjacences entre bels : (a) adjacence β_e , (b) adjacence β_e^+ , (c) adjacence β_e^{+*} .

Triplet de Jordan $\mathbb{Z}^d / \mathbb{Z}^3$	Nb surfels exa./bel	Nb voisins $\mathbb{Z}^d / \mathbb{Z}^3$
$(\alpha_d, \omega_d, \sigma)$	$(26, 6, \sigma)$	$(d^2 - 1)2^{d-1}$ 32
$(\delta_d, \omega_d, \beta^e)$	$(18, 6, \beta^e)$	$6(d - 1)$ 4
$(\delta_d, \omega_d, \beta^{e+})$	$(18, 6, \beta^{e+})$	$3(d - 1)$ 2
$(\gamma_{n,3}, \omega_3, \beta^{e+*})$	$(14, 6, \beta^{e+*})$	4 (moy.) $\frac{4}{3}$

Tableau 3.3. Quelques triplets de Jordan et nombre de voisins pour différentes adjacences entre bels.

3.6.6. Quelques considérations de mise en œuvre

L'extraction d'une surface de surfels entre des voxels blancs et noirs requiert une représentation efficace des surfels. D'après le formalisme précédent des espaces discrets, un surfel est représentable comme un arc orienté d'un graphe. D'un point de vue informatique, un surfel est alors un couple de spels W -adjacents (dans \mathbb{Z}^d , couple de voxels ω_d -adjacent). Cette représentation, quoique générique, n'est pas très efficace et assez coûteuse dans le cas de la grille \mathbb{Z}^d . Une première solution est de définir un surfel avec $d + 1$ entiers, les d premiers étant les coordonnées du premier voxel, le dernier étant la direction pour aller au voxel adjacents (entre 1 et $2d$).

Une solution plus astucieuse est d'utiliser l'équivalence entre grille cellulaire et grille de Khalimsky. Il suffit donc de doubler l'espace selon chaque coordonnée. Les voxels ont alors leurs coordonnées toutes impaires et deux voxels ω_d -adjacents diffèrent sur une seule coordonnée de 2. Un surfel entre ces deux voxels a donc les coordonnées moyennes de ces deux voxels qui l'entourent, c'est-à-dire les mêmes coordonnées impaires sauf une coordonnée paire sur la coordonnée qui diffère. En fait toute cellule de la grille est alors représentable par un tuple de coordonnées entières, auquel on adjoint un booléen pour donner l'orientation. Déterminer les voisins d'un bel revient à modifier quelques coordonnées du bel considéré.

Pour finir sur cet problème, on peut coder de façon encore plus compacte les cellules de \mathbb{Z}^d en utilisant un seul entier [LAC 03]. Les surfaces discrètes ont alors une représentation compacte et efficace avec des opérations ensemblistes en $O(1)$.

Un autre point délicat de la mise en œuvre de l'algorithme 2 réside dans le test de la ligne 5 et l'insertion située à la ligne suivante. Si N est le cardinal de ML , une structure d'ensemble classique induit un test de complexité $O(\log N)$. Cela peut donc être coûteux. On peut réduire de façon significative la taille de l'ensemble de test pour les adjacences β^{e+} , β^{e+*} en utilisant un autre algorithme de parcours, qui ne mémorise que les bels qui seront redécouverts par l'arbre d'exploration. Sur la figure 3.10bc, il s'agit des bels hachurés et du bel de départ encadré en trait plus épais. Cet ensemble de bels est beaucoup plus restreint que ML et, pour des structures de données d'ensemble sensibles au cardinal, cet algorithme aura une meilleure complexité. Nous référons le lecteur à [HER 98b], page 182, pour plus de détails. L'implémentation par ensemble caractéristique des surfaces discrètes de [LAC 03] n'est en fait pas sensible au cardinal et est en pratique plus efficace. Par exemple, le bord d'une boule de rayon 240 dans une image $512 \times 512 \times 512$, comportant plus d'un million de bels, est extraite par l'algorithme 2 en 1.88s pour l'adjacence β^e et en 1.85s pour l'adjacence β^{e+} (tests réalisés sur un Celeron 450 Mhz (128Mo de cache, 512Mo mémoire vive).

3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés topologiques des espaces discrets et de leurs composantes : objets et leur bord, surface, image binaire. Nous avons présenté deux approches aux courbes et surfaces discrètes, la première les définissant comme sous-ensemble du plan discret \mathbb{Z}^d , la deuxième les définissant comme sous-ensemble des arcs d'un graphe. Nous avons ensuite exhibé des algorithmes d'extraction de bord par suivi, avec des complexités proches de l'optimal. Quoique assez théorique, ce chapitre a des implications profondes dans plusieurs domaines de la géométrie discrète. On citera plus particulièrement les techniques de squelettisation et amincissement homotopique (chapitre 8), certains algorithmes de reconstruction de surface triangulée (12). Les surfaces discrètes ainsi définies peuvent aussi être analysées géométriquement (chapitre 14).

3.8. Annexe : Démonstrations techniques

Démonstration du théorème 3.1 : Notons $\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x \geq x_A \text{ et } y > y_A\}$ le premier quadrant. Pour $num \in \{1, 2\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, notons $S_{num}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} I_{num}(W, A, i)$. On a $I_{num}(W, A) = S_{num}(n)$. Pour simplifier la démonstration nous supposons que le point A_0 se trouve dans le premier quadrant \mathcal{Q} (la démonstration est similaire dans les autres cas). Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que A_k soit dans le premier quadrant, on a $S_1(k) = S_2(k)$. Pour $k = n$, on aura notre résultat que $S_1(n) = S_2(n)$, ce qui revient à dire que $I_1(W, A) = I_2(W, A)$. Reste à formaliser la récurrence.

Le résultat est évident pour $k = 0$ car on a $S_1(0) = 0 = S_2(0)$. Supposons que le résultat soit vrai pour un certain k , c'est à dire que A_k est dans le premier quadrant, et on a $S_1(k) = S_2(k)$. Soit k' le plus petit entier supérieur à k et tel que $A_{k'}$ soit dans le premier quadrant. Montrons que $S_1(k') = S_2(k')$. Si $k' = k+1$, le résultat est évident puisque $I_1(W, A, k) = I_2(W, A, k) = 0$. Sinon, pour tout i tel que $k < i < k' - 1$ on a $I_1(W, A, i) = I_2(W, A, i) = 0$. Seulement quatre cas peuvent se produire :

- 1) Premier cas : $I_2(W, A, k) = 1$ et $I_1(W, A, k' - 1) = 1$
- 2) Deuxième cas : $I_1(W, A, k) = -1$ et $I_1(W, A, k' - 1) = 1$
- 3) Troisième cas : $I_1(W, A, k) = -1$ et $I_2(W, A, k' - 1) = -1$
- 4) Quatrième cas : $I_2(W, A, k) = 1$ et $I_2(W, A, k' - 1) = -1$

Dans tous les cas on conclut que $S_1(k') = S_2(k')$. \square

3.9. Bibliographie

- [ART 81] ARTZY E., FRIEDER G., HERMAN G., « The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm », *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 15, p. 1-24, 1981.
- [BER 96] BERTRAND G., « A Boolean characterization of three-dimensional simple points. », *Pattern Recognition Letters*, vol. 17, n°2, p. 115-124, 1996.
- [BER 97] BERTRAND G., COUPRIE M., « Some Structural Properties of Discrete Surfaces. », *DGCI*, p. 113-124, 1997.
- [CIR 05] CIRIA J. C., DE MIGUEL A., DOMÍNGUEZ E., FRANCÉS A. R., QUINTERO A., « Local Characterization of a Maximum Set of Digital (26, 6)-Surfaces. », *DGCI*, p. 161-171, 2005.
- [FOU 02] FOUREY S., MALGOUYRES R., « Intersection number and topology preservation within digital surfaces. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 283, n°1, p. 109-150, 2002.
- [FOU 03] FOUREY S., MALGOUYRES R., « A concise characterization of 3D simple points. », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 125, n°1, 2003.
- [GOR 89] GORDON D., UDUPA J. K., « Fast surface tracking in three-dimensional binary images », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 45, n°2, p. 196-241, février 1989.
- [HER 83] HERMAN G., WEBTSE D., « A topological proof of a surface tracking algorithm », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 23, p. 162-177, 1983.
- [HER 92] HERMAN G. T., « Discrete Multidimensional Jordan Surfaces », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 54, n°6, p. 507-515, novembre 1992.
- [HER 98a] HERMAN G. T., « Finitary 1-Simply Connected Digital Spaces », *Graphical Models and Image Processing*, vol. 60, n°1, p. 46-56, janvier 1998.
- [HER 98b] HERMAN G. T., *Geometry of digital spaces*, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [KHA 90] KHALIMSKY E., KOPPERMAN R., MEYER P. R., « Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets », *Topology and its Applications*, vol. 36, p. 1-17, 1990.
- [KON 89a] KONG T. Y., « A digital fundamental group. », *Computers & Graphics*, vol. 13, n°2, p. 159-166, 1989.
- [KON 89b] KONG T. Y., ROSENFELD A., « Digital topology : Introduction and survey. », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 48, n°3, p. 357-393, 1989.
- [KON 92] KONG T., UDUPA J., « A justification of a fast surface tracking algorithm », *CV-GIP : Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, n°6, p. 507-515, novembre 1992.
- [KOV 89] KOVALEVSKY V. A., « Finite Topology as Applied to Image Analysis », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 46, n°2, p. 141-161, mai 1989.
- [LAC 00] LACHAUD J.-O., MONTANVERT A., « Continuous analogs of digital boundaries : A topological approach to iso-surfaces », *Graphical Models*, vol. 62, p. 129-164, Academic Press, 2000.
- [LAC 03] LACHAUD J.-O., « Coding cells of digital spaces : a framework to write generic digital topology algorithms », DEL LUNGO A., DI GESÙ V., KUBA A., Eds., *Proc. Int.*

Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2003), Palermo, Italy, vol. 12 de *Electronic Notes in Discrete Mathematics (ENDM)*, Elsevier, 2003.

- [MAL 94] MALGOUYRES R., Une définition des surfaces de Z^3 , PhD thesis, Université Clermont I, 1994.
- [MAL 97] MALGOUYRES R., « A Definition of Surfaces of Z : A new 3D Discrete Jordan Theorem. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 186, n° 1-2, p. 1-41, 1997.
- [MAL 99] MALGOUYRES R., BERTRAND G., « Complete Local Characterization of Strong 26-Surfaces : Continuous Analogs for Strong 26-Surfaces. », *IJPRAI*, vol. 13, n°4, 1999.
- [MAL 00] MALGOUYRES R., « Homotopy in Two-Dimensional Digital Images. », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 230, n° 1-2, p. 221-233, 2000.
- [MAL 01] MALGOUYRES R., « Computing the Fundamental Group in Digital Spaces. », *IJPRAI*, vol. 15, n°7, 2001.
- [MIG 95] MIGUET S., PERROTON L., « Discrete surfaces of 26-connected sets of voxels », *Proc. of 5th Discrete Geometry for Computer Imagery*, Clermont-Ferrand, France, septembre 1995.
- [MOR 81] MORGENTHALER D. G., ROSENFELD A., « Surfaces in Three-Dimensional Digital Images », *Information and Control*, vol. 51, n°3, p. 227-247, 1981.
- [ROS 73] ROSENFELD A., « Arcs and Curves in Digital Pictures. », *J. ACM*, vol. 20, n°1, p. 81-87, 1973.
- [UDU 94] UDUPA J. K., « Multidimensional Digital Boundaries », *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, vol. 56, n°4, p. 311-323, juillet 1994.