Projet ANR-15-CE40-0006

CoMeDiC

Convergent Metrics for Digital Calculus

Programme générique 2015

Ce document est à remplir par le coordinateur en collaboration avec les partenaires du projet. L'ensemble des partenaires doit avoir une copie de la version transmise à l'ANR.

Ce modèle doit être utilisé uniquement pour le compte-rendu de fin de projet.

A. Identification

Acronyme du projet	CoMeDiC
Titre du projet	Convergent Metrics for Digital Calculus
Coordinateur du projet (société/organisme)	Jacques-Olivier Lachaud (Université Savoie Mont Blanc)
Période du projet (date de début – date de fin)	1/10/2015 1/8/2021
Site web du projet, le cas échéant	https://lama.univ-savoie.fr/comedic/

B.

Rédacteur de ce rapport	
Civilité, prénom, nom	M Jacques-Olivier Lachaud
Téléphone	04.79.75.86.42
Adresse électronique	Jacques-olivier.lachaud@univ-smb.fr
Date de rédaction	11/2021

Si différent du rédacteur, indiquer un contact pour le projet	
Civilité, prénom, nom	
Téléphone	
Adresse électronique	

Liste des partenaires présents à la fin du projet (société/organisme et responsable scientifique)	- LAMA : Laboratoire de Mathématiques, UMR 5127 (CNRS / Université Savoie Mont Blanc, Jacques-Olivier Lachaud) - LIRIS : Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Système d'information, UMR 5205 (CNRS / INSA Lyon, David Coeurjolly) - LJK : Laboratoire Jean Kuntzmann, UMR 5224 (CNRS / Université Grenoble Alpes, Edouard Oudet) - LIGM : Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge, UMR 8049 (CNRS / ESIEE / Univ. Gustave Eiffel, Hugues Talbot)

B. Résumé consolidé public

Ce résumé est destiné à être diffusé auprès d'un large public pour promouvoir les résultats du projet, il ne fera donc pas mention de résultats confidentiels et utilisera un vocabulaire adapté mais n'excluant pas les termes techniques. Il en sera fourni une version française et une version en anglais. Il est nécessaire de respecter les instructions ci-dessous.

B.1. Instructions pour les résumés consolidés publics

Les résumés publics en français et en anglais doivent être structurés de la façon suivante.

Titre d'accroche du projet *(environ 80 caractères espaces compris)*

Titre d'accroche, si possible percutant et concis, qui résume et explicite votre projet selon une logique grand public : il n'est pas nécessaire de présenter exhaustivement le projet mais il faut plutôt s'appuyer sur son aspect le plus marquant.

Les deux premiers paragraphes sont précédés d'un titre spécifique au projet rédigé par vos soins.

Titre 1 : situe l'objectif général du projet et sa problématique *(150 caractères max espaces compris)*
Paragraphe 1 : *(environ 1200 caractères espaces compris)*
Le paragraphe 1 précise les enjeux et objectifs du projet : indiquez le contexte, l'objectif général, les problèmes traités, les solutions recherchées, les perspectives et les retombées au niveau technique ou/et sociétal

Titre 2 : précise les méthodes ou technologies utilisées *(150 caractères max espaces compris)*
Paragraphe 2 : *(environ 1200 caractères espaces compris)*
Le paragraphe 2 indique comment les résultats attendus sont obtenus grâce à certaines méthodes ou/et technologies. Les technologies utilisées ou/et les méthodes permettant de surmonter les verrous sont explicitées (il faut éviter le jargon scientifique, les acronymes ou les abréviations).

Résultats majeurs du projet *(environ 600 caractères espaces compris)*
Faits marquants diffusables en direction du grand public, expliciter les applications ou/et les usages rendus possibles, quelles sont les pistes de recherche ou/et de développement originales, éventuellement non prévues au départ.
Préciser aussi toute autre retombée= partenariats internationaux, nouveaux débouchés, nouveaux contrats, start-up, synergies de recherche, pôles de compétitivités, etc.

Production scientifique et brevets depuis le début du projet *(environ 500 caractères espaces compris)*
Ne pas mettre une simple liste mais faire quelques commentaires. Vous pouvez aussi indiquer les actions de normalisation

Illustration
Une illustration avec un schéma, graphique ou photo et une brève légende. L'illustration doit être clairement lisible à une taille d'environ 6cm de large et 5cm de hauteur. Prévoir une résolution suffisante pour l'impression. Envoyer seulement des illustrations dont vous détenez les droits.

Informations factuelles
Rédiger une phrase précisant le type de projet (recherche industrielle, recherche fondamentale, développement expérimental, exploratoire, innovation, etc.), le coordonnateur, les partenaires, la date de démarrage effectif, la durée du projet, l'aide ANR et le coût global du projet, par exemple « Le projet XXX est un projet de recherche fondamentale coordonné par xxx. Il associe aussi xxx, ainsi que des laboratoires xxx et xxx). Le projet a commencé en juin 2006 et a duré 36 mois. Il a bénéficié d'une aide ANR de xxx € pour un coût global de l'ordre de xxx € »

B.2. Résumé consolidé public en français

Suivre impérativement les instructions ci-dessus.

Un calcul différentiel convergent et stable sur des données numériques géométriques

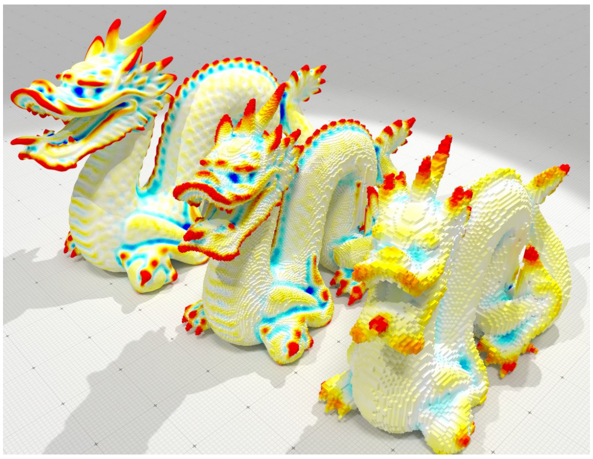
1. Comment transposer le calcul vectoriel ou différentiel classique sur des données géométriques réelles (images, maillages, nuages de points) avec des garanties ?

Ce projet vise à résoudre des problèmes variationnels en analyse d'image, en traitement de données géométriques numériques et en optimisation de forme, c'est-à-dire des problèmes modélisés à l'aide du calcul différentiel, mais appliqués à des données réelles. Le calcul différentiel classique est très puissant, mais perd de son sens sur des données réelles, qui sont non continues et souvent bruitées. Depuis quinze ans, le calcul extérieur discret est devenu très populaire pour résoudre ces problèmes concret car sa formulation évite le continu et est bien adapté aux maillages de bonne qualité. Néanmoins il offre peu de garanties sur des données réelles. Par exemple il est erroné sur des objets pixels/voxels définis dans les photos ou les images 3D (courantes en imagerie médicale). Même sur des maillages, il n'offre pas de résultats de stabilité lorsque les données sont perturbées, ce qui est le cas sur des données géométriques usuelles (e.g. Lidar). Ainsi les mesures, calculs et traitements peuvent donner des résultats erronés, voire aberrants, ce qui peut être très préjudiciable dans certains domaines d'application.

2. Corriger le calcul extérieur discret usuel en s'aidant d'informations géométriques extérieures qui ont des garanties de convergence.

L'idée est donc de corriger les métriques et opérateurs utilisés dans le calcul extérieur discret pour les adapter aux données. Ainsi pour des données pixels/voxels, on peut utiliser des résultats récents de convergences d'estimateurs géométriques et injecter ces estimations dans les opérateurs. Pour des données bruitées, on peut utiliser des résultats de théorie géométrique de la mesure pour montrer la stabilité des calculs. D'autres problèmes variationnels requiert une formulation spécifique aux données, par exemple en choisissant de placer les variables non aux sommets mais aux arêtes ou aux faces des mailles. Notre projet s'appuie sur 3 domaines d'application pour valider ce nouveau calcul : le traitement d'image, le traitement de données géométriques 3D, l'optimisation de formes. Il vise donc à concilier des résultats théoriques de convergence et stabilité avec des problèmes concrets appliqués à des données réelles.

Notre projet a développé des ponts réels entre mathématiques (modèles variationnels, théorie géométrique de la mesure, optimisation de formes) et de informatique (géométrie discrète et algorithmique, traitement et analyse d'image, traitement géométrique des données numériques), aboutissant à la conference Digital Geometry and Discrete Variational Calculus. Concrètement, la bibliothèque open-source DGtal (dgtal.org) a été enrichie avec les nouveaux outils de calcul développés. DGtal a obtenu le prix "software award" de la conférence Symposium on Geometry Processing 2016.



Stabilité et convergence de quantités géométriques différentielles (ici la courbure moyenne) sur des surfaces de voxels et des maillages triangulées.

Le projet CoMeDiC a suscité des publications dans des revues ou conférences d'audience internationale, à la fois en mathématiques, en informatique et à l'interface de ces deux disciplines: 38 articles dans des revues internationales (dont 11 multi-partenaires), et 20 communications dans des conférences internationales (dont 11 multi-partenaires).

Le projet CoMeDiC est un projet de recherche fondamentale coordonné par Jacques-Olivier Lachaud. Il associe le Laboratoire de Mathématiques (LAMA, CNRS / Université Savoie Mont Blanc), le Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Système d'information (LIRIS, CNRS / INSA Lyon), le Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK, CNRS / Université Grenoble Alpes), et le Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge (LIGM, CNRS / ESIEE / Université Gustave Eiffel). Le projet a commencé en octobre 2015 et a duré 70 mois. Il a bénéficié d'une aide ANR de 478.351 € pour un coût global de l'ordre de 2.672.984 €.

B.3. RÉSUMÉ CONSOLIDÉ PUBLIC EN ANGLAIS

Suivre impérativement les instructions ci-dessus.

A convergent and stable differential calculus on discrete geometric data

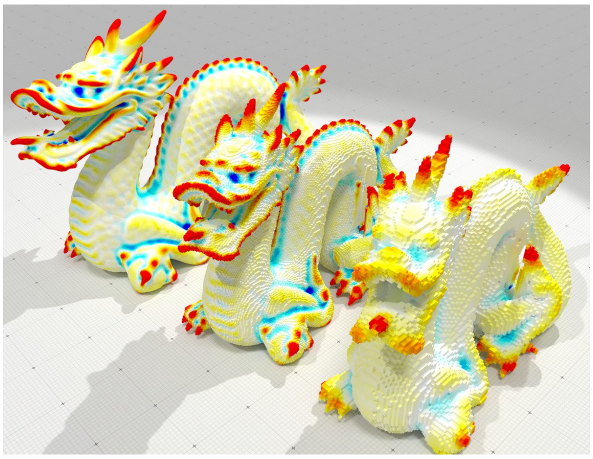
1. How can we transpose the classical vectorial or differential calculus on real geometric data (images, meshes, point clouds) with mathematical guarantees ?

This project aims at solving riational problems in image analysis, geometry processing and shape optimisation, i.e. problems formulated using differential calculus, applied to real data. Standard differential calculus is very powerful, but is essentially a mathematical model. As such, this approach loses some meaning on real data, since data are generally not continuous and often noisy or inaccurately acquired. In the last fifteen years, discrete exterior calculus has become very popular for solving these concrete problems, since its formulation avoids the continuous setting and is well adapted to high-quality meshes. However this discrete approach still lacks guarantees on real discrete data. For instance, it provides incorrect results on pixel/voxel objects defined in pictures and 3D images (which are routinely used in medical imaging). Even on meshes, it does not offer stability results when data are pertubated, which is the case on real geometric data (e.g. Lidar). Consequently, measures, computations and processing may yield erroneous, sometimes aberrant results, which can be detrimental to several fields of applications.

2. Correct the discrete exterior calculus by introducing external geometric information with convergence guarantees.

The project main idea is to correct metrics and operators used in the discrete exterior calculus to adapt them to real data. Concretely, for pixel/voxel image data, we can use recent results about the multigrid convegrence of discrete geometric estimators and inject these estimations into the operators. With respect to noisy data, we use results coming from geometric measure theory to show the stability of calculi. Other variational problems require dedicated formulations which are specific to the data, for instance by placing variables not on vertices but on edges or faces of meshes. Our project relies on three fields of applications to validate this new type of calculus : image processing and analysis, geometry processing and shape optimisation. Our objective is to reconcile theoretical convergence and stability results with concrete problems applied to real data.

Our project has developed several bridges between mathematics (variational modeling, geometric measure theory, shape optimisation) and computer science (digital and computational geometry, image processing and analysis, geometry processing), leading to the conference Digital Geometry and Discrete Variational Calculus. Concretely, the open-source library DGtal (dgtal.org) was enriched with new calculus operators and tools. DGtal has received the "software award" of the conference Symposium on Geometry Processing 2016.



Stability and convergence of geometric differential quantities (here mean curvature) on voxel surfaces and triangulated meshes.

The projet CoMeDiC has led to publications in journals and conferences of international audience, both in Mathematics, Computer Science, and at the interface of these two fields: 38 articles in international journals (11 of which involve multiple partners), and 20 papers in international conferences (11 of which involve multiple partners).

The projet CoMeDiC is a fundamental research project coordinated by Jacques-Olivier Lachaud. It brought togetherthe following partners: Laboratoire de Mathématiques (LAMA, CNRS / Université Savoie Mont Blanc), le Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Système d'information (LIRIS, CNRS / INSA Lyon), le Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK, CNRS / Université Grenoble Alpes), et le Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge (LIGM, CNRS / ESIEE / Université Gustave Eiffel). The project started on October 2015 and lasted 70 months. It has received an ANR funding of 478.351 € for a global cost of 2.672.984 €.

C. Mémoire scientifique

Maximum 5 pages*. On donne ci-dessous des indications sur le contenu possible du mémoire. Ce mémoire peut être accompagné de rapports annexes plus détaillés.*

Le mémoire scientifique couvre la totalité de la durée du projet. Il doit présenter une synthèse auto-suffisante rappelant les objectifs, le travail réalisé et les résultats obtenus mis en perspective avec les attentes initiales et l'état de l'art. C'est un document d'un format semblable à celui des articles scientifiques ou des monographies. Il doit refléter le caractère collectif de l'effort fait par les partenaires au cours du projet. Le coordinateur prépare ce rapport sur la base des contributions de tous les partenaires. Une version préliminaire en est soumise à l'ANR pour la revue de fin de projet.

Un mémoire scientifique signalé comme confidentiel ne sera pas diffusé. Justifier brièvement la raison de la confidentialité demandée. Les mémoires non confidentiels seront susceptibles d'être diffusés par l'ANR, notamment via les archives ouvertes http://hal.archives-ouvertes.fr.

Mémoire scientifique confidentiel : non

Le mémoire scientifique est concaténé à la fin du rapport.

D. Liste des livrables

Quand le projet en comporte, reproduire ici le tableau des livrables fourni au début du projet. Mentionner l'ensemble des livrables, y compris les éventuels livrables abandonnés, et ceux non prévus dans la liste initiale.

Date de livraison	**N°**	**Titre**	**Nature** (rapport, logiciel, prototype, données, …)	**Partenaires** (souligner le responsable)	**Commentaires**
T12	D1	Operationnal DEC DGtal package	logiciel	LIRIS	
T36	D2	Image analysis with DEC Dgtal package	logiciel	LIGM/LAMA	
T42	D3	Geometry processing with DEC Dgtal package	logiciel	LIRIS/LAMA	
	B1	Collective book around digital calculus	rapport	LAMA/LIRIS/LIGM/LJK	Un livre post-conférence C2 est en discussion.
	C1	Thematic colloquium on numerical approaches in Calculus of Variations	colloque	LJK /LAMA	Le colloque a été fusionnée avec le colloque final C2
T66	C2	Colloquium on discrete calculus, theory and applications	colloque	LAMA/LIRIS/LIGM/LJK	Prévu en juin 2020, il a été déplacé fin-mars-début avril 2021 à cause de la COVID.

E. Impact du projet

Ce rapport rassemble des éléments nécessaires au bilan du projet et plus globalement permettant d'apprécier l'impact du programme à différents niveaux.

E.1. Indicateurs d'impact

Nombre de publications et de communications (à détailler en E.2)

Comptabiliser séparément les actions monopartenaires, impliquant un seul partenaire, et les actions multipartenaires résultant d'un travail en commun.
***Attention** : éviter une inflation artificielle des publications, mentionner uniquement celles qui résultent directement du projet (postérieures à son démarrage, et qui citent le soutien de l'ANR et la référence du projet).*

		Publications multipartenaires	Publications monopartenaires
International	Revues à comité de lecture	10	28
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage	1	
	Communications (conférence)	11	9
France	Revues à comité de lecture		
	Ouvrages ou chapitres d'ouvrage		
	Communications (conférence)	1	
Actions de diffusion	Articles vulgarisation		
	Conférences vulgarisation		
	Autres	1	4

Autres valorisations scientifiques (à détailler en E.3)

Ce tableau dénombre et liste les brevets nationaux et internationaux, licences, et autres éléments de propriété intellectuelle consécutifs au projet, du savoir faire, des retombées diverses en précisant les partenariats éventuels. Voir en particulier celles annoncées dans l'annexe technique).

	Nombre, années et commentaires (valorisations avérées ou probables)
Brevets internationaux obtenus	
Brevet internationaux en cours d'obtention	

Brevets nationaux obtenus	
Brevet nationaux en cours d'obtention	
Licences d'exploitation (obtention / cession)	
Créations d'entreprises ou essaimage	
Nouveaux projets collaboratifs	Soumission projet ANR AAPG 2022 StableProxies Projet ANR JCJC 2018 Paradis
Colloques scientifiques	Conférences internationales : – Conference on Digital Geometry and Discrete Variational Calculus, organisée virtuellement au CIRM Tutoriaux: – ACPR 2019 Tutorial on Digital Geometry in Pattern Recognition : Extracting Geometric Features with DGtal and Applications with Reproducible Research – Graduate School on Digital Geometry
Autres (préciser)	Bibliothèque open-source DGtal https://dgtal.org

E.2. LISTE DES PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

*Répertorier les publications résultant des travaux effectués dans le cadre du projet. On suivra les catégories du premier tableau de la section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** en suivant les normes éditoriales habituelles. En ce qui concerne les conférences, on spécifiera les conférences invitées.*

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)

International	**Revues à comité de lecture**	1. [ALT21a] Daniel Martins Antunes, Jacques-Olivier Lachaud, and Hugues Talbot. An elastica-driven digital curve evolution model for image segmentation. J. Math. Imaging Vis., 63(1):1–17, 2021. 2. [CLG21] David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Pierre Gueth. Digital surface regularization with guarantees. IEEE Trans. Vis. Comput. Graph., 27(6):2896–2907, 2021. 3. [LMR20] Jacques-Olivier Lachaud, Jocelyn Meyron, and Tristan Roussillon. An Optimized Framework for Plane-Probing Algorithms. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 62(5):718–736, 2020. 4. [LRTC20] Jacques-Olivier Lachaud, Pascal Romon, Boris Thibert, and David Coeurjolly. Interpolated corrected curvature measures for polygonal surfaces. Comput. Graph. Forum, 39(5):41–54, 2020. 5. [BDLO19] Elie Bretin, Roland Denis, Jacques-Olivier Lachaud, and Edouard Oudet. Phase-field modelling and computing for a large number of phases. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 53(3):805–832, 2019. 6. [CCLR19] Thomas Caissard, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud, and Tristan Roussillon. Laplace–Beltrami operator on digital surfaces. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 61:359–379, 2019. 7. [BCGL18] N. Bonneel, D. Coeurjolly, P. Gueth, and J.-O. Lachaud. Mumford-shah mesh processing using the Ambrosio-Tortorelli functional. Computer Graphics Forum, 37(7):75–85, 2018. 8. [PRC+18] Kacper Pluta, Tristan Roussillon, David Cœurjolly, Pascal Romon, Yukiko Kenmochi, and Victor Ostromoukhov. Characterization of bijective digitized rotations on the hexagonal grid. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 60(5):707–716, 2018. 9. [LPR17] J.-O. Lachaud, X. Provençal, and T. Roussillon. Two plane-probing algorithms for the computation of the normal vector to a digital plane. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 59(1):23–39, 2017. 10. [CFGL16] D. Coeurjolly, M. Foare, P. Gueth, and J.-O. Lachaud. Piecewise smooth reconstruction of normal vector field on digital data. Comput. Graph. Forum, 35(7):157–167, 2016. Proc. of Pacific Graphics 2016.

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)		
International	**Ouvrages ou chapitres d'ouvrage**	1. [LCL17] J.O. Lachaud, D. Coeurjolly, J. Levallois. Robust and Convergent Curvature and Normal Estimators with Digital Integral Invariants. In Modern Approaches to Discrete Curvature. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 293-348, 2017.

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)

International	**Communications (conférence)**	1. [ALT21b] Daniel Martins Antunes, Jacques-Olivier Lachaud, and Hugues Talbot. A maximum-flow model for digital elastica shape optimization. In Joakim Lindblad, Filip Malmberg, and Natasa Sladoje, editors, Discrete Geometry and Mathematical Morphol- ogy, DGMM 2021, Uppsala, Sweden, May 24-27, 2021, Proceedings, volume 12708 of Lecture Notes in Computer Science, pages 429–440. Springer, 2021. 2. [TCKR20] Lama Tarsissi, David Coeurjolly, Yukiko Kenmochi, and Pascal Romon. Convexity preserving contraction of digital sets. In Shivakumara Palaiahnakote, Gabriella Sanniti di Baja, Liang Wang, and Wei Qi Yan, editors, Asian Conference on Pat- tern Recognition: 5th Asian Conference, ACPR 2019, Auckland, New Zealand, 26-29 November 2019, Proceedings, pages 611–624. Springer's Lecture Notes in Computer Science, 2020. 3. [ALT19] D. Antunes, J.-O. Lachaud, and H. Talbot. Digital curvature evolution model for image segmentation. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2019), Marne-la-Valle, France, volume 11414 of Lecture Notes in Computer Science, pages 15–26. Springer, 2019. 4. [KL19] Bertrand Kerautret and Jacques-Olivier Lachaud. Geometric total variation for image vectorization, zooming and pixel art depixelizing. In Shivakumara Palaiahnakote, Gabriella Sanniti di Baja, Liang Wang, and Wei Qi Yan, editors, Pattern Recognition - 5th Asian Conference, ACPR 2019, Auckland, New Zealand, November 26-29, 2019, Revised Selected Papers, Part I, volume 12046 of Lecture Notes in Computer Science, pages 391–405. Springer, 2019. 5. [RL19] T. Roussillon and J.-O. Lachaud. Digital plane recognition with fewer probes. In International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, volume 11414 of Lecture Notes in Computer Science, pages 380–393. Springer, 2019. 6. [CGL18] David Coeurjolly, Pierre Gueth, and Jacques-Olivier Lachaud. Regularization of voxel art. In ACM SIGGRAPH Talk, 2018. 7. [CCLR17] T. Caissard, D. Coeurjolly, J.-O. Lachaud, and T. Roussillon.Heat kernel laplace-beltrami operator on digital surfaces. In Walter G. Kropatsch, Nicole M. Artner, and Ines Janusch, editors, Discrete Geometry for Computer Imagery, pages 241–253, 2017. Springer International Publishing. 8. [CGL17] D. Coeurjolly, P. Gueth, and J.-O. Lachaud. Digital surface regularization by normal vector field alignment. In 20th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, Vienna, Austria, volume 10502 of Lecture Notes in Computer Science, pages 197–209, 2017. 9. [CFGL16] D. Coeurjolly, M. Foare, P. Gueth, and J.-O. Lachaud. Piecewise smooth reconstruction of normal vector field on digital data. Comput. Graph. Forum, 35(7):157–167, 2016. Proc. of Pacific Graphics 2016. 10. [FLT16a] M. Foare, J.-O. Lachaud, and H. Talbot. Image restoration and segmentation using the ambrosio-tortorelli functional and discrete calculus. In Proc. 23th International Conference on Pattern Recognition (ICPR2016), Cancun, Mexico, 2016. 11. [FLT16b] M. Foare, J.-O. Lachaud, and H. Talbot. Numerical implementation of the ambrosio-tortorelli functional using discrete calculus and application to image resoration and inpainting. In Proc. 1st Workshop on Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR2016), Cancun, Mexico, 2016.

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)		
France	**Communications (conférence)**	1. [CCLR16] T. Caissard, D. Coeurjolly, J.-O. Lachaud, T. Roussillon. Laplace-Beltrami operator on Digital Curves, JFIG Journées Françaises d'Informatique Graphique, Grenoble, 2016.

Liste des publications multipartenaires (résultant d'un travail mené en commun)		
Actions de diffusion	**Autres**	1. [FLT17a] M. Foare, J-O. Lachaud and H. Talbot. Image restoration and segmentation using the ambrosio-tortorelli functional and discrete calculus. invited talk, SHAPE 2017, Münster, Germany, Feb-March 2017.

Liste des publications monopartenaires (impliquant un seul partenaire)		
International	**Revues à comité de lecture**	1. [BFG21] Dorin Bucur, Ilaria Fragalà, and Alessandro Giacomini. Multiphase free discontinuity problems: monotonicity formula and regularity results. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 38(5):1553–1582, 2021. 2. [BO21] Beniamin Bogosel and Edouard Oudet. Longest minimal length partitions. Interfaces and Free Boundaries, 2021. 3. [OKO21] Edouard Oudet, Chiu-Yen Kao, and Braxton Osting. Computation of free boundary minimal surfaces via extremal Steklov eigenvalue problems. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 27:34, 2021. 4. [BBF20] Beniamin Bogosel, Dorin Bucur, and Ilaria Fragalà. Phase field approach to optimal packing problems and related Cheeger clusters. Appl. Math. Optim., 81(1):63–87, 2020. 5. [BFG20] Dorin Bucur, Ilaria Fragalà, and Alessandro Giacomini. Local minimality results for the Mumford-Shah functional via monotonicity. Anal. PDE, 13(3):865–899, 2020. 6. [DLO20] Charles Dapogny, Nicolas Lebbe, and Edouard Oudet. Optimization of the shape of regions supporting boundary conditions. Numerische Mathematik, 146(1):51–104, 2020. 7. [BC19] Nicolas Bonneel and David Coeurjolly. Spot: sliced partial optimal transport. ACM Transactions on Graphics (TOG), 38(4):1– 13, 2019. 8. [BF19a] Dorin Bucur and Ilaria Fragalà. On the honeycomb conjecture for Robin Laplacian eigenvalues. Commun. Contemp. Math., 21(2):1850007, 29, 2019. 9. [BF19b] Dorin Bucur and Ilaria Fragalà. Proof of the honeycomb asymptotics for optimal Cheeger clusters. Adv. Math., 350:97–129, 2019. 10. [BFG19] Dorin Bucur, Ilaria Fragalà, and Alessandro Giacomini. The multiphase Mumford-Shah problem. SIAM J. Imaging Sci., 12(3):1561–1583, 2019. 11. [MNTP19] Odyssée Merveille, Benoît Naegel, Hugues Talbot, and Nicolas Passat. nd variational restoration of curvilinear structures with prior-based directional regularization. IEEE Transactions on Image Processing, 28(8):3848–3859, 2019. 12. [MOV19] Annalisa Massaccesi, Edouard Oudet, and Bozhidar Velichkov. Numerical calibration of Steiner trees. Applied Mathematics & Optimization, 79(1):69–86, 2019. 13. [NPKDR19] Phuc Ngo, Nicolas Passat, Yukiko Kenmochi, and Isabelle Debled-Rennesson. Geometric preservation of 2D digital objects under rigid motions. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 61(2):204–223, 2 2019.

Liste des publications monopartenaires (impliquant un seul partenaire)

International	**Revues à comité de lecture**	14. [BFVV18] Dorin Bucur, Ilaria Fragalà, Bozhidar Velichkov, and Gianmaria Verzini. On the honeycomb conjecture for a class of minimal convex partitions. Trans. Amer. Math. Soc., 370(10):7149–7179, 2018. 15. [DPLPV18] Guido De Philippis, Jimmy Lamboley, Michel Pierre, and Bozhidar Velichkov. Regularity of minimizers of shape optimization problems involving perimeter. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 109:147–181, 2018. 16. [BFG18a] Dorin Bucur, Ilaria Fragalà, and Alessandro Giacomini. Optimal partitions for Robin Laplacian eigenvalues. Calc. Var. Partial Differential Equations, 57(5):Art. 122, 18, 2018. 17. [BOO18] Mauro Bonafini, Giandomenico Orlandi, and Édouard Oudet. Variational approximation of functionals defined on 1-dimensional connected sets: the planar case. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 50(6):6307–6332, 2018. 18. [DCSN18a] Sravan Danda, Aditya Challa, BS Daya Sagar, and Laurent Najman. Some theoretical links between shortest path filters and minimum spanning tree filters. Journal of Mathematical Imaging and Vision, pages 1–18, 2018. 19. [MTNP18] Odyssée Merveille, Hugues Talbot, Laurent Najman, and Nicolas Passat. Curvilinear structure analysis by ranking the orientation responses of path operators. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 40(2):304–317, 2018. 20. [AO17] P. R. S. Antunes and E. Oudet. Numerical minimization of dirichlet–laplacian eigenvalues of four-dimensional geometries. SIAM J. Sci. Comput., 39(3) : B508-B521. 21. [BBV17] José Carlos Bellido, Giuseppe Buttazzo, and Bozhidar Velichkov. Worst-case shape optimization for the dirichlet energy. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 153:117 – 129, 2017. Calculus of Variations, in honor of Nicola Fusco on his 60th birthday. 22. [MTV17] D. Mazzoleni, S. Terracini, B.Velichkov: Regularity Of The Optimal Sets For Some Spectral Functionals, Geometric & Functional Analysis, 27(2):373–426, 2017. 23. [Naj17] Laurent Najman. Extending the power watershed framework thanks to Gamma-convergence. SIAM Journal on Imaging Sciences, 10(4):2275–2292, 2017. 24. [APC+16] A. G. M. Ahmed, H. Perrier, D. Coeurjolly, V. Ostromoukhov, J. Guo, D. Yan, H. Huang and O. Deussen, Low-Discrepancy Blue Noise Sampling, ACM Transactions on Graphics, 2016. Proc. Of SIGGRAPH Asia 2016. 25. [BO16] B. Bogosel and E. Oudet. Partitions of minimal length on manifolds. Experimental Mathematics, 2016. 26. [dCMT16] P. M. M. de Castro, Q. Mérigot, and B. Thibert. Far-field reflector problem and intersection of paraboloids. Numerische Mathematik, 134(2):389–411, 2016. 27. [DPMSV16] G. De Philippis, A. Meszaros, F. Santambrogio, B. Velichkov : BV Estimates in Optimal Transportation and Applications. Arch. Rational Mech. Anal. 219 (2): 829–860, 2016. 28. [GSTOG16] V. Ganapathi-Subramanian, B. Thibert, M. Ovsjanikov, and L. Guibas. Stable region correspondences between non-isometric shapes. Computer Graphics Forum, volume 35, pages 121–133. Wiley Online Library, 2016. Proceedings of Symposium on Geometry Processing, Berlin.

Liste des publications monopartenaires (impliquant un seul partenaire)

International	**Communications (conférence)**	1. [Lac21] Jacques-Olivier Lachaud. An alternative definition for digital convexity. In Joakim Lindblad, Filip Malmberg, and Natasa Sladoje, editors, Discrete Geometry and Mathematical Morphology - First International Joint Conference, DGMM 2021, Uppsala, Sweden, May 24-27, 2021, Proceedings, volume 12708 of Lecture Notes in Computer Science, pages 269–282. Springer, 2021. 2. [NPKDR18] Phuc Ngo, Nicolas Passat, Yukiko Kenmochi, and Isabelle Debled-Rennesson. Convexity invariance of voxel objects under rigid motions. In Proceedings of International Conference on Pat- tern Recognition, ICPR 2018, Beijing, August 20–24, 2018, pages 1157–1162, 8 2018. 3. [DCDSN17a] S. Danda, A. Challa, B. S. Daya Sagar, and L. Najman. Power Tree Filter: A Theoretical Framework Linking Shortest Path Filters and Minimum Spanning Tree Filters. In Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing (ISMM'2017), Lecture Note In Computer Sciences, May 2017. 4. [DCDSN17b] Sravan Danda, Aditya Challa, B S Daya Sagar, and Laurent Najman. Power Tree Filter: A Theoretical Framework Link- ing Shortest Path Filters and Minimum Spanning Tree Filters. In J. Angulo, S. Velasco-Forero, and F. Meyer, editors, Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing, volume 10225 of Lecture Note In Computer Sciences, pages 199–210, Fontainebleau, France, May 2017. Springer. 5. [NKDRP17] Phuc Ngo, Yukiko Kenmochi, Isabelle Debled-Rennesson, and Nicolas Passat. Convexity-preserving rigid motions of 2d dig- ital objects. In Walter G. Kropatsch, Nicole M. Artner, and Ines Janusch, editors, Discrete Geometry for Computer Imagery, pages 69–81, Cham, 2017. Springer International Publishing. 6. [APC+16] A. G. M. Ahmed, H. Perrier, D. Coeurjolly, V. Ostromoukhov, J. Guo, D. Yan, H. Huang and O. Deussen, Low-Discrepancy Blue Noise Sampling, ACM Transactions on Graphics, 2016. Proc. Of SIGGRAPH Asia 2016. 7. [GSTOCG16] V.Ganapathi-Subramanian, B. Thibert, M. Ovsjanikov, and L. Guibas. Stable region correspondences between non-isometric shapes. Computer Graphics Forum, volume 35, pages 121–133. Wiley Online Library, 2016. Proceedings of Symposium on Geometry Processing, Berlin. 8. [KKDRL16a] B. Kerautret, A. Krähenbühl, I. Debled-Rennesson, and J.-O. Lachaud. Centerline detection on partial mesh scans by confidence vote in accumulation map. In Proc. 23th International Conference on Pattern Recognition (ICPR2016), Cancun, Mexico, 2016. 9. [KKDRL16b] B. Kerautret, A. Krähenbühl, I. Debled-Rennesson, and J.-O. Lachaud. On the implementation of centerline extraction based on confidence vote in accumulation map. In Proc. 1st Workshop on Reproducible Research in Pattern Recognition (RRPR2016), Cancun, Mexico, 2016.

Actions de diffusion	**Liste des publications monopartenaires (impliquant un seul partenaire)**	
	Prépublications (HAL, arXiv)	1. [GOV20a] François Générau, Edouard Oudet, and Bozhidar Velichkov. Cut locus on compact manifolds and uniform semiconcavity estimates for a variational inequality. arXiv preprint arXiv:2006.07222, 2020. 2. [GOV20b] François Générau, Edouard Oudet, and Bozhidar Velichkov. Numerical computation of the cut locus via a variational approximation of the distance function. arXiv preprint arXiv:2006.08240, 2020. 3. [LRT19] Jacques-Olivier Lachaud, Pascal Romon, and Boris Thibert. Corrected curvature measures. working paper or preprint, hal-02193774, July 2019. 4. [BO18] Mauro Bonafini and Édouard Oudet. A convex approach to the gilbert-steiner problem. arXiv preprint arXiv:1810.05417, 2018.

E.3. LISTE DES ÉLÉMENTS DE VALORISATION

*La liste des éléments de valorisation inventorie les retombées (autres que les publications) décomptées dans le deuxième tableau de la section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**. On détaillera notamment :*

- *brevets nationaux et internationaux, licences, et autres éléments de propriété intellectuelle consécutifs au projet.*
- *logiciels et tout autre prototype*
- *actions de normalisation*
- *lancement de produit ou service, nouveau projet, contrat,…*
- *le développement d'un nouveau partenariat,*
- *la création d'une plate-forme à la disposition d'une communauté*
- *création d'entreprise, essaimage, levées de fonds*
- *autres (ouverture internationale,..)*

Elle en précise les partenariats éventuels. Dans le cas où des livrables ont été spécifiés dans l'annexe technique, on présentera ici un bilan de leur fourniture.

Le projet CoMeDiC a permis de développer de manière significative la bibliothèque open-source DGtal et son compagnon DGtalTools. Notez que DGtal a obtenu le prix "software award" de la conférence Symposium on Geometry Processing 2016. Trois livrables ont été intégrés à ces projets open-source :
Pour le livrable D1, il correspond essentiellement au package DiscreteExteriorCalculus de DGtal. De nouveaux outils le complètent régulièrement. Pour le livrable D2, des structures de données, des algorithmes et des outils pour débruiter les images et réaliser de l'inpainting sont maintenant présents dans le package ImageProcessing de DGtalTools. Pour le livrable D3, des algorithmes de régularisation de surfaces digitales sont présents dans le package Geometry de DGtal.
De façon plus globale, la version 1.0 de DGtal a été présentée à DGCI 2019. De plus, deux tutoriaux portant sur la géométrie digitale, le traitement géométrique de telles données et le calcul discret ont été donnés auprès de deux communautés très différentes :

– auprès de la communauté traitement d'image et reconnaissance de formes : ACPR 2019 Tutorial on Digital Geometry in Pattern Recognition : Extracting Geometric Features with DGtal and Applications with Reproducible Research, Asian Conference on Pattern Recognition 2019
– auprès de la communauté informatique graphique et traitement géométrique des données numériques : Graduate School on Digital Geometry, Symposium on Geometry Processing 2021

Enfin, nous avons organisé une conférence internationale, prévue au CIRM, mais finalement faite en virtuelle du 28 mars au 2 avril 2021 à cause des conditions sanitaires, qui a rassemblé plusieurs communautés autour du thème du calcul discret et des méthodes variationnelles (livrables C1 et C2):

– Conference on Digital Geometry and Discrete Variational Calculus, site du Centre International de Rencontres Mathématiques
– 10 orateurs invités de différentes communautés : géométrie discrète, géométrie algorithmique, approches graphes en analyse d'image, transport optimal, traitement géométrique des données numériques, calcul différentiel discret, apprentissage profond et opérateurs différentiels
– 14 autres présentations
– 127 participants inscrits

E.4. BILAN ET SUIVI DES PERSONNELS RECRUTÉS EN CDD (HORS STAGIAIRES)

Ce tableau dresse le bilan du projet en termes de recrutement de personnels non permanents sur CDD ou assimilé. Renseigner une ligne par personne embauchée sur le projet quand l'embauche a été financée partiellement ou en totalité par l'aide de l'ANR et quand la contribution au projet a été d'une durée au moins égale à 3 mois, tous contrats confondus, l'aide de l'ANR pouvant ne représenter qu'une partie de la rémunération de la personne sur la durée de sa participation au projet.
Les stagiaires bénéficiant d'une convention de stage avec un établissement d'enseignement ne doivent pas être mentionnés.

Les données recueillies pourront faire l'objet d'une demande de mise à jour par l'ANR jusqu'à 5 ans après la fin du projet.

Identification	Avant le recrutement sur le projet	Recrutement sur le projet	Après le projet

Nom et prénom	Sexe H/F	Adresse email (1)	Date des dernières nouvelles	Dernier diplôme obtenu au moment du recrutement	Lieu d'études (France, UE, hors UE)	Expérience prof. Antérieure, y compris post-docs (ans)	Partenaire ayant embauché la personne	Poste dans le projet (2)	Durée missions (mois) (3)	Date de fin de mission sur le projet	Devenir professionnel (4)	Type d'employeur (5)	Type d'emploi (6)	Lien au projet ANR (7)	Valorisation expérience (8)
GUETH Pierre	H	pierre.gueth@adobe.com	12/2021	Doctorat	France		LIRIS	Ingénieur de recherche	10	31/10/15	CDI	grande entreprise	Ingérieur R&D	non	oui
GUETH Pierre	H	pierre.gueth@adobe.com	12/2021	Doctorat	France		LAMA	Ingénieur de recherche	3	31/1/16	CDI	grande entreprise	Ingérieur R&D	non	oui
CAISSARD Thomas	H	thomas.caissard@adobe.com	12/2021	Master	France		LIRIS	Doctorant	36	9/11/18	CDI	grande entreprise	Ingérieur R&D	non	non
ANTUNES Daniel	H	danoan2008@gmail.com	12/2021	Master	France		LAMA	Doctorant	36	3/2/2020	CDI	PME	Ingénieur	non	non

Aide pour le remplissage

(1) Adresse email : indiquer une adresse email la plus pérenne possible
(2) Poste dans le projet : post-doc, doctorant, ingénieur ou niveau ingénieur, technicien, vacataire, autre (préciser)
(3) Durée missions : indiquer en mois la durée totale des missions (y compris celles non financées par l'ANR) effectuées sur le projet
(4) Devenir professionnel : CDI, CDD, chef d'entreprise, encore sur le projet, post-doc France, post-doc étranger, étudiant, recherche d'emploi, sans nouvelles
(5) Type d'employeur : enseignement et recherche publique, EPIC de recherche, grande entreprise, PME/TPE, création d'entreprise, autre public, autre privé, libéral, autre (préciser)
(6) Type d'emploi : ingénieur, chercheur, enseignant-chercheur, cadre, technicien, autre (préciser)
(7) Lien au projet ANR : préciser si l'employeur est ou non un partenaire du projet
(8) Valorisation expérience : préciser si le poste occupé valorise l'expérience acquise pendant le projet.

Les informations personnelles recueillies feront l'objet d'un traitement de données informatisées pour les seuls besoins de l'étude anonymisée sur le devenir professionnel des personnes recrutées sur les projets ANR. Elles ne feront l'objet d'aucune cession et seront conservées par l'ANR pendant une durée maximale de 5 ans après la fin du projet concerné. Conformément à la loi n° 78-17 du 6 janvier 1978 modifiée, relative à l'Informatique, aux Fichiers et aux Libertés, les personnes concernées disposent d'un droit d'accès, de rectification et de suppression des données personnelles les concernant. Les personnes concernées seront informées directement de ce droit lorsque leurs coordonnées sont renseignées. Elles peuvent exercer ce droit en s'adressant l'ANR (http://www.agence-nationale-recherche.fr/Contact).

C. Mémoire scientifique

Mémoire scientifique confidentiel : non

C.1 Résumé du mémoire

Ce résumé peut être repris du résumé consolidé public.

Le calcul extérieur discret s'est imposé dans les quinze dernières années comme un outil puissant pour résoudre des problèmes variationnels en traitement et analyse d'image et de données géométriques. Il simplifie à la fois la formulation des problèmes et leur résolution numérique, et rend souvent possible l'extraction d'optimum globaux. Cependant, le calcul discret souffre d'un défaut important. Rien ne garantit que ce calcul discret converge vers le résultat attendu du calcul vectoriel standard dans le cas où les objets ou domaines d'intérêt sont des courbes ou surfaces discrètes plongées dans un espace de dimension plus grande. Le projet CoMeDiC vise à combler cet écart entre calcul discret et calcul vectoriel pour les ensembles de l'espace digital $\mathbb{Z}^n$. L'idée générale est de définir des métriques adaptées pour le calcul discret qui le font converger vers les valeurs continues attendues.

Cette approche est maintenant envisageable grâce aux avancées récentes en géométrie digitale sur la mise au point d'estimateurs géométriques locaux convergents. Ce nouveau calcul, appelé calcul digital, permet d'attaquer des problèmes variationnels impliquant des domaines discrétisés comme des surfaces, courbes, ou graphes, vivant dans un espace ambiant de dimension supérieure, de même que des problèmes avec discontinuités, de bord libre, ou avec des conditions aux bords subtiles.

Ce projet s'attaque à la fois aux problèmes théoriques liés à la mise au point d'un calcul digital, du choix des bons estimateurs pour les métriques, de l'établissement de ses propriétés de convergence, ainsi qu'à sa résolution numérique efficace. Le projet étudie aussi tout particulièrement les problèmes variationnels difficiles pour les méthodes numériques standards, comme les problèmes à discontinuitées ou à frontières libres, les problèmes impliquant des domaines de codimension supérieure ou à égale à un comme les surfaces ou les courbes. Enfin, le projet CoMeDiC vise trois domaines d'applications naturels du calcul digital — l'analyse d'image, le traitement de données géométriques, et l'optimisation de formes — à la fois pour guider et nourrir les développements théoriques et pour servir de banc d'essai pour le calcul digital.

C.2 Enjeux et problématique, état de l'art

Présenter les enjeux initiaux du projet, la problématique formulée par le projet, et l'état de l'art sur lequel il s'appuie. Présenter leurs éventuelles évolutions pendant la durée du projet (les apports propres au projet sont présentés en C.4).

Contexte. Ce projet vise à résoudre des problèmes variationnels en analyse d'image, en traitement numérique de données géométriques et en optimisation de formes. Les problèmes variationnels sont ubiquitaires dans ces domaines et constituent souvent les modèles de références pour de nombreuses applications, par exemple en segmentation, filtrage, analyse, mise en correspondance, reconstruction, extraction de caractéristiques ou mesures géométriques. Il est donc crucial de discrétiser ces problèmes de façon cohérente pour pouvoir les résoudre numériquement sur des données réelles de façon précise et efficace. À côté des schémas numériques classiques comme les différences finies, les volumes finis, les éléments finis ou les méthodes de Galerkin discontinues, le *calcul discret — calcul extérieur discret* selon les communautés — a émergé depuis une quinzaine d'années comme étant un outil majeur pour modéliser et résoudre ces problèmes [48, 29, 20, 23]. L'idée principale est donner une description combinatoire du problème variationnel ou différentiel, sans définir le problème comme une limite comme dans le calcul vectoriel continu classique. Il n'y a donc pas de discrétisation postérieure via un schéma numérique. Le modèle est discret et donc adapté aux données, qui sont souvent par nature discrètes aussi. L'approche a donc suscité un grand intérêt dans plusieurs communautés, que ce soit en image ou en traitement de mailles ou de données géométriques.

Verrous scientifiques. Même si le calcul discret se révèle en pratique très stable, il présente quelques inconvénients. En général, rien ne garantit que la solution du problème formulé en calcul discret converge vers la solution du problème équivalent continu formulé avec le calcul classique. Il existe des résultats limités de convergence de certains opérateurs pour des surfaces triangulées spécifiques, par exemple pour l'équation de Poisson [28]. Sur des données digitales (type sous-ensembles de pixels dans une image ou de voxels dans une image 3D), certains problèmes variationnels ne convergent pas vers les solutions continues attendues, même avec des résolutions plus fines. Pour le fameux modèle de Mumford-Shah en restauration/segmentation d'image, cela conduit à des artefacts dits de métrication [6]. Le même type de problème apparaît lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes variationnels sur des données géométriques de codimension 1 ou plus, par exemple calculer des géodésiques sur une surface discrète.

Enjeux initiaux. La problématique était donc de définir un calcul discret cohérent sur des données habituellement non incluses dans le cadre de ce type de calcul, comme les surfaces digitales (bords d'ensemble de voxels), les maillages bruités, les courbes ou arbres 1d en 3d, tout en tentant de garantir des propriétés de convergence ou de stabilité. L'équipe du projet réunissait justement des compétences à la fois en mathématiques fondamentales (théorie géométrique de la mesure, modèles variationnels), en mathématiques plus appliquées (calcul discret, optimisation combinatoire ou continue) et en informatique (traitement et analyse d'image, géométrie discrète, traitement de données géométriques), afin de garantir que les nouveaux modèles théoriques développés constituent des avancées réelles pour des applications pratiques.

Etat de l'art. Le calcul discret trouve ses origines dans les travaux de Regge [52] en physique quantique, ainsi que sur l'analyse spectrale sur les graphes. D'autres travaux plus récents ont nettement préparé l'avènement du calcul discret, notamment la fameuse formule des cotangentes [48] et son application à l'extraction de surfaces minimales. Les liens avec la méthode des éléments finis sont connus depuis longtemps aussi (voir [44]). Depuis l'"école allemande" a développé un *calcul différentiel discret* qui généralise la formule des cotangentes, et qui est basé sur des éléments finis conformes ou non-conformes [49], avec de nombreux résultats théoriques et pratiques intéressants (théorème de Stokes, etc). Néanmoins ce calcul est restreint aux surfaces triangulées avec des triangles obtus seulement. Une version plus générale est le *calcul extérieur discret* [29, 20], qui utilise une construction primale-duale et s'appuie sur des opérateurs de Hodge entre ces deux structures. Ce calcul n'est pas restreint comme le premier, mais ne cherche pas à converger ou s'approcher du calcul différentiel classique. Les métriques jouent un rôle très important dans ce calcul. Enfin, un autre *calcul discret* s'est développé dans la communauté image, graphes et circuits électriques, résumé dans l'ouvrage [23]. Là encore, les métriques peuvent être incorporées, mais n'ont en général pas de lien avec un modèle de calcul continu. D'autres calculs sont apparus en théorie géométrique de la mesure [24, 25], mais n'apparaissent pas calculables par ordinateur. Enfin, la notion d'holomorphisme issue de l'analyse complexe a permis de développer quelques opérateurs différentiels sur les surfaces digitales [46, 47] ainsi que des applications en paramétrisation et placage de texture [9].

De très nombreux travaux ont développé ces travaux initiaux sur et autour du calcul discret, et dans très nombreuses directions. Il est difficile d'être exhaustif, mais on peut néanmoins donner les directions principales et quelques travaux représentatifs.

- *convergence du calcul discret*, notamment du Laplacien [28, 57].
- *stabilité de mesures de quantités géométriques différentielles* comme les courbures [58, 12, 11]
- *problèmes de métrication* en traitement et analyse d'image [5, 2, 10, 13]
- Γ-*convergence de problèmes variationnels géométriques* [1, 4, 36, 35, 53, 8]
- *convergence multigrille d'estimateurs géométriques discrets* de longueur et normales [38, 19, 17], d'aire [37], de courbures [51, 50, 41, 31, 32, 42]
- *géodésiques sur des ensembles discrets* [55, 33].
- *modèles variationnels discrets en analyse d'image* [7, 22, 14, 15, 21]
- *modèles variationnels discrets en traitement numérique de données géométriques* (voir le panorama [44]), notamment liés au transport optimal [54, 40, 39], ou des distances géodésiques [16], remaillage [43].
- *modèles variationnels en optimisation de formes*, problèmes d'existence et régularité [30, 27, 26], relaxations via Γ-convergence [35, 34].

Evolution de l'état de l'art. Depuis le début du projet, de multiples avancées ont eu lieu dans ces domaines (cf. sections suivantes), que ce soit sur des aspects fondamentaux de stabilité ou de convergence, de généricité du calcul, ou sur des applications concrètes dans les domaines précités. Un bouleversement majeur est venu influencer aussi considérablement ces domaines: il s'agit du développement des méthodes d'apprentissage profond. Ceux-ci sont en un sens des problèmes variationnels, mais à nombre inconnu de variables utiles et de relations entre ces variables, dont la résolution est liée beaucoup plus à la qualité des données et la puissance des calculs. De fait en image et en *geometry processing*, ces méthodes ont connu un grand développement, même si elles n'offrent pas vraiment de garanties théoriques ou numériques.

C.3 Approche scientifique et technique

Le projet CoMeDiC cherche à étendre le calcul vectoriel classique à des données géométriques discrètes traditionnellement difficiles, comme les courbes ou surfaces de l'espace discret $\mathbb{Z}^n$, ou des maillages bruitées. L'idée est de s'inspirer du calcul discret, mais en adaptant ses métriques et opérateurs pour qu'ils tiennent compte de la géométrie particulière de ces données. Une telle approche, sorte de *calcul digital*, est rendu possible par le développement récent de nombreux estimateurs géométriques dans ces espaces digitaux, avec des propriétés de convergence multigrille de longueur, aire, normales ou courbures.

Le calcul discret fournit une base cohérente pour développer un calcul digital convergent, où la convergence des métriques permettrait dans certains cas d'établir la convergence du calcul ou du problème variationnel. Dans ce formalisme, il est relativement aisé d'imposer les conditions aux bords classiques, voire à bord libre, de représenter des structures de différentes dimensions, et même des objets arborescents ou non-variétés, et de nombreux algorithmes d'optimisation existent, qui proviennet soit d'algèbre linéaire (diagonalisation, solveurs itératifs), soit d'optimisation combinatoire (coupes dans les graphes, méthodes proximales). Tous ces travaux font l'objet de la Tâche 1.

Afin de ne pas développer une théorie "hors-sol", une partie importante du projet CoMeDiC vise à développer ce type de calcul pour qu'il soit effectif sur des problèmes variationnels classiques, souvent mal résolus par les méthodes standards (Tâche 2). Ainsi 3 domaines d'applications sont visés, avec à chaque fois des formulations variationnelles ou différentielles classiques, souvent difficiles à résoudre: le traitement et l'analyse d'image (fonctionnelle de Mumford-Shah, d'Ambrosio-Tortorelli, variation totale), l'optimisation de formes (problème de Plateau, fractures, problème du nid d'abeille), le traitement numérique de la géométrie (*geometry processing*, débruitage, remaillage, paramétrisation).

Enfin, nous nous intéressons à l'implémentation effective des opérateurs de calcul digital, ainsi que de certains méthodes de résolution de problèmes variationnels, dans la bibliothèque open-source DGtal [56] (Sous-tâche 1.3, livrables D1, D2, D3).

C.4 Résultats obtenus

Positionner les résultats par rapports aux livrables du projet et aux publications, brevets etc. Revisiter l'état de l'art et les enjeux à la fin du projet.

Les travaux effectués sont classés par grandes tâches du projet, même si certains travaux sont transversaux à plusieurs tâches.

Task 1: Digital Calculus : convergence, variational models, computation issues

Subtask 1.1: Metric definitions and convergence of digital operators

Thomas Caissard a soutenu sa thèse le 6/12/18. Elle portait sur la définition d'un opérateur Laplace-Beltrami ayant des propriétés de convergence asymptotique point à point sur des surfaces digitales. T. Caissard, D. Coeurjolly, J.-O. Lachaud et T. Roussillon ont pu donner une réponse positive à ces questions [CCLR16, CCLR17, CCLR18]. L'opérateur Laplace-Beltrami proposé est basé sur une intégration dans laquelle l'estimation de la mesure (d'aire) d'un élément de surface est cruciale. Néanmoins ces travaux montre qu'on ne peut espérer de convergence point à point pour un opérateur de calcul discret local [CCLR18].

Sur un plan plus fondamental, P. Romon, B. Thibert et J.-O. Lachaud ont travaillé sur une extension de la définition de courants normaux associés à une courbe ou surface non lisse, notamment digitale, sur lequel on peut calculer les mesures de courbures de Lipschitz-Killing de façon générale, avec une normale donnée par échantillonnage semi-local. Un résultat de stabilité de ces mesures a été établi. De plus des résultats de convergences asymptotique avec des mesures explicites sont obtenus. En pratique, les estimateurs de courbure obtenus sont meilleurs que l'état de l'art [LRTC20,LRT19].

Les travaux précédents s'appuient sur une estimation correcte du champ de normales sur les surfaces digitales. T. Roussillon et J.-O. Lachaud ont proposé une nouvelle variante d'un algorithme de "sondage" de surface digitale (type [LPR17]), garantissant l'exactitude de la normale en sortie sur des plans digitaux ainsi qu'une complexité optimale [RL19,LMR20]. J.-O. Lachaud a proposé une nouvelle définition de la convexité des ensembles digitaux, qui garantit leur connexité et simple-connexité, et qui est caractérisable par des critères morphologiques [Lac21]: elle permet de définir sans-ambiguïté la notion de tangence, avec des applications en reconstruction réversible de surface.

SubTask 1.2: Adaptation of variational problems to digital calculus

D. Bucur, I. Fragalà et A. Giacomini se sont intéressés à plusieurs problèmes autour de la fonctionnelle de Mumford-Shah, notamment dans le cas multiphase. Ainsi, dans [BFG18a], ils démontrent que la solution du problème de Neumann correspondant à la régularisation d'une image dans la fonctionnelle de Mumford-Shah (en absence de sauts) est un minimum local de l'énergie de Mumford-Shah. La conséquence de ce résultat est qu'une méthode numérique qui prend comme point de départ cette régularisation de l'image ne peut pas initier des contours (par exemple avec une dérivée topologique).

Dans [BFG18b], ils démontrent l'existence d'une partition optimale pour un problème multiphase minimisant la somme des valeurs propres fondamentales du Laplacien-Robin des cellules disjointes. Cette question est le prototype d'un problème multi-phase à discontinuités libres avec des énergies d'interfaces plus complexes, impliquant la solution d'une équation aux dérivées partielles.

Dans [BFG18], ils analysent qualitativement les solutions locales d'un problème à discontinuité libre multiphase. La notion de solution locale est entendue au sens des presque-quasiminimiseurs, ce qui permet la prise en compte des énergies d'interface complexes. En particulier, cette notion pénalise seulement les contacts entre deux phases qui correspondent à des sauts. Ils démontrent que le problème est bien posé, que la solution existe est que l'ensemble des discontinuités est fermé topologiquement et Ahlfors régulier.

Enfin, dans [BFG19], les mêmes auteurs font une analyse rigoureuse de la version multi-phase de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Une caractéristique importante est la présence d'une vraie partition d'une image (donc en deux dimensions des contours fermés), chaque cellule de la partition pouvant contenir à son tour des sauts internes. Le partitionnement se fait de façon nontriviale si des termes de type statistique ou des poids dépendant des phases sont présents dans l'énergie. En particulier, une version multi-phase du résultat de De Giorgi-Carriero-Leaci est démontrée.

SubTask 1.3 Performance issues in digital calculus

Sur la période concernée, une version 1.0 de la bibliothèque DGtal a été diffusée (dgtal.org). Il s'agit d'une étape majeure dans le développement de cette plate-forme open source au coeur du projet COMEDIC (reprenant les résultats autour de la régularisation de surface, des opérateurs de Laplace-Beltrami et de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli). Cette version majeure a été présentée lors de la conférence DGCI 2019 (Discrete Geometry for Computer Imagery). Elle a également servi de support au cours de géométrie discrète (D. Coeurjolly & J.-O. Lachaud) lors de la *Graduate School* de la conférence *Symposium on Geometry Processing* 2021.

Task 2: Applications of digital calculus to various variational problems

SubTask 2.1: Digital calculus for image analysis

D. Antunes a soutenu sa thèse le 3/11/2020 sur l'introduction de contraintes géométriques dans les méthodes variationnelles en image. D. Antunes, J.-O. Lachaud et H. Talbot ont proposé un modèle entièrement digital de flot de Willmore (pénalisation de la courbure au carré), mélangeant estimateurs géométriques discrets convergents de courbure et optimisation combinatoire (variantes de KBPO) [ALT19,ALT21a]. Une variante de ce modèle permet de calculer l'évolution d'un elastica (longueur et courbure au carré) en utilisant un algorithme combinatoire de type min-cut/max-flow, tout en incorporant des énergies d'attache aux données [ALT21b]. Il exploite les propriétés de convergence multigrille des estimateurs de courbure par "digital integral invariant" [LCL17].

B. Kerautret et J.-O. Lachaud ont formulé une variation totale géométrique discrète; valide dans toute triangulation d'un domaine, et dont la minimisation se fait par suite de flips locaux (algorithme glouton randomisé). Cela permet de faire de la super-résolution et de la vectorisation d'image, et dépixelise les images "pixel-art" [KL19].

Il est connu que des transformations géométriques telles que les rotations dégradent généralement la qualité géométrique et topologique des images, bien que elles sont appliquées avec l'objectif de préserver certains éléments géométriques et topologiques. La préservation de convexité a été étudiée via une approche de polygonalisation/polyhedrisation en 2D/3D par P. Ngo, N. Passat, Y. Kenmochi et I. Debled-Rennesson [NKDP17, NPKDR18, NPKDR19]. Également les rotations bijectives sur la grille hexagonale a été arithmétiquement caractérisée par K. Pluta, T. Roussillon, D. Coeurjolly, P. Ramon, Y. Kenmochi et V. Ostromoukhov [PRC+18]. Dans le contexte d'évolution digitale, L. Tarsissi, D. Coeurjolly, Y. Kenmochi et P. Romon ont étudié la déformation d'une forme numérique préservant la convexité avec l'approche combinatoire des mots [TCKR20].

Le filtrage est un technique de base pour réduire la complexité spatiale des images: réduire le bruit, simplifier les contours, etc. La plupart des filtres existants classiques n'utilisent que l'information basé sur les pixels, c'est à dire, dans le cadre du calcul discret, sur les sommets. Le filtrage tenant compte des arêtes est un ensemble de techniques récentes, plus performantes et plus flexibles dans de nombreux cas. Dans [DCSN18a, DCSN18ab] S. Danda, A. S. Challa, B. S. Daya Sagar et L. Najman tissent un lien entre deux familles de filtrage basées sur les arêtes ("edge aware") : les filtres de plus court chemin et les filtres d'arbres couvrants minimaux. Il s'agit d'une extension du cadre de la ligne de partage des eaux "puissance" (Power Watershed). Dans [MTNP18, MNTP19], O. Merveille, B. Naegel, H. Talbot et N. Passat formulent une notion de famille d'opérateur de régularisation qui tient compte de l'orientation locale. Cet opérateur linéaire est formulé dans le cadre du calcul discret, et peut servir de régularisation intéressante et utilise en présence d'objets fins: fibres, textures, vaisseaux sanguins, etc., dans un cadre variationnel. L'opérateur est formulé en dimension arbitraire et se réduit à une régularisation isotrope classique lorsqu'il n'y a pas d'orientation locale marquée. Ceci permet d'éviter de générer des artefacts indésirables lorsqu'une régularisation orientée est forcée. Les opérateurs présentés sont peu coûteux en mémoire et efficaces. Les résultats obtenus sur des images où des textures fines ou des objets fins sont présents dépassent ceux de l'état de l'art.

SubTask 2.2: Digital calculus for geometry processing

D. Coeurjolly, P. Gueth et J.-O. Lachaud ont proposé un processus variationnel de régularisation de surfaces digitales [CGL17]. En utilisant un champ de normales estimé, ce processus aligne les arêtes orthogonalement à ces normales. Le processus garantit que l'objet régularisé est proche en L2 de l'objet initial. Une extension de cette approche permet des reconstructions multiphases, avec des garanties topologiques et géométriques L-inf [CGL18,CLG21].

N. Bonneel, D. Coeurjolly, P. Gueth et J.-O. Lachaud ont étendu le modèle de calcul discret de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli (proposé dans [FLT16a] sur les images et [CFGL16] sur les surfaces digitales) aux surfaces triangulées, et montré l'intérêt de cette approximation calculable de Mumford-Shah combinée avec le processus de régularisation précédent pour traiter ces surfaces dans de multiples applications : débruitage, inpainting, segmentation, embossing [BCGL18].

N. Bonneel et D. Coeurjolly ont également proposé une nouvelle approche générique par coupe permettant de résoudre un transport optimal discret pour lequel les deux distributions discrètes n'ont pas de même cardinalité [BC19]. Cette approche *sliced* a été utilisée pour le transfert de couleur dans des images ou encore le recalage rigide de nuages de points.

SubTask 2.3: Digital calculus for shape optimisation

E. Bretin, R. Denis, J.-O. Lachaud et E. Oudet ont proposé un nouveau modèle multiphase pour résoudre des problèmes d'optimisation de formes nécessitant un grand nombre de phases [BDLO19]. Ce modèle permet de concentrer les phases autour de leur fonction caractéristique. Cela autorise des structures de données très compactes en 2D comme en 3D, dont la taille augmente peu par rapport au nombre de phases. Ils ont appliqué cette approche à la fameuse conjecture de Kelvin ou honeycomb 3D, et confirmé que la partition de Weire et Phelan est toujours la meilleure candidate. Suite aux avancées proposées dans [BOO18], M. Bonafini et E. Oudet ont pu proposer une nouvelle convexification du problème se Steiner dans le cadre euclidien et des variétés plongées de dimension 2 [BO18]. Ce travail est à notre connaissance, la première démarche introduite pour approcher, de manière convexe donc quantifiable, les arbres de Steiner sur des objets courbes. Pour mener à bien cette démarche, les auteurs ont dû porter une attention particulière à la discrétisation des opérateurs différentiels sur la surface.

Récemment, A. Fraser et R. Schoen ont étudié le problème de la maximisation de $\sigma_1 L$ par rapport à la métrique d'une surface avec bord, où σ_1 est la première valeur propre de Steklov non nulle et L est la longueur du bord. Pour un genre et un nombre de composantes de frontière fixés, ils ont prouvé l'existence et la régularité de métriques extrémales. Une observation clé de leur étude est le fait que toute métrique critique correspond à un espace propre de dimension 3 qui contient des fonctions propres paramétrant une surface minimale à frontière libre dans la boule unité B^3. Dans [OKO21], nous avons résolu numériquement ce problème aux valeurs propres et reproduit ces résultats. Nous avons ainsi obtenu de nouvelles surfaces minimales de genre 0 dans la boule. Cette approximation numérique a été délicate pour plusieurs raisons : (i) il n'est pas standard de calculer les valeurs propres de Steklov de domaines non simplement connexes avec une grande précision (ii) le paramétrage des classes conformes est un problème délicat et les paramétrisations naïves sont extrêmement redondantes (iii) une valeur propre extrémale est souvent multiple, donc non différentiable, ce qui rend la fonction objectif dans le problème d'optimisation non lisse.

Pour S une surface analytique réelle compacte sans bord plongée dans $\mathbb{R}^3$ et $b \in S$ un point quelconque de S (qui peut être considéré comme un point de base). Le *cut locus* de b dans S peut être défini comme la fermeture de l'ensemble des points $p \in S$ telle qu'il existe au moins deux géodésiques minimisantes de S entre p et b. Une démarche naturelle pour approximer un cut locus d'une surface serait d'utiliser une méthode de type *fast marching* qui fournit un moyen efficace d'approcher des fonctions distance sur une variété. Malheureusement, ces algorithmes classiques n'assurent aucunement la convergence du gradient de l'approximation. Nous pensons que cette absence d'estimation rend l'approximation des cut loci par ces algorithmes difficile à prouver.

Dans [GOV20a, GOV20b], inspirés par l'étude de l'axe médian proposée par F. Chazal et A. Leutier, nous avons introduit une notion stabilisée adaptée à l'approximation variationnelle des cut loci. Notre démarche pourrait à première vue sembler très similaire, mais de nombreuses nouvelles difficultés sont apparues provenant du contexte de variété (non plate). Ce cadre plus général a nécessité une analyse minutieuse afin d'étudier la convergence de schémas d'approximation d'ordres élevés adaptés à notre relaxation.

1 C.5 Exploitation des résultats

Le projet a donné lieu à de nombreuses publications dans des revues académiques internationales (38 publications, dont 10 multi partenaires) et dans des conférences internationales (20 communications, dont 9 multi partenaires). Notez que la plupart des publications sont dans les meilleures revues et conférences du domaine, en Mathématiques comme en Informatique.

Cette collaboration entre plusieurs disciplines s'est aussi matérialisée par l'organisation d'une nouvelle conférence internationale, *Conference on Digital Geometry and Discrete Variational Calculus*, `https://dgdvc.sciencesconf.org`, prévue au Centre International de Rencontres Mathématiques à Luminy, finalement organisée en virtuelle du 28 mars au 2 avril 2021 à cause des conditions sanitaires. Elle a rassemblé plusieurs communautés autour du thème du calcul discret et des méthodes variationnelles (livrables C1 et C2):

- 10 orateurs invités de différentes communautés : géométrie discrète, géométrie algorithmique, approches graphes en analyse d'image, transport optimal, traitement géométrique des données numériques, calcul différentiel discret, apprentissage profond et opérateurs différentiels
- 14 autres présentations
- 127 participants inscrits.

Un serveur Discord permettait des interactions nombreuses entre les participants.

Enfin, les résultats obtenus dans le projet ont été diffusés auprès de communautés diverses de différentes façons :

Logiciels De nombreux travaux de CoMeDiC ont donné lieu à du code réexploitable, intégré à la bibliothèque open source DGtal (`https://dgtal.org`) et à sa compagnon DGtalTools, via les livrables D1, D2, D3. La version 1.0 de DGtal a été présentée à DGCI 2019. La qualité de cette bibliothèque et ses outils est reconnue même au-delà de sa communauté d'origine puisqu'elle a reçu le prix "software award" de la conférence Symposium on Geometry Processing 2016 (`http://awards.geometryprocessing.org`).

Tutoriels Deux tutoriels portant sur la géométrie digitale, le traitement géométrique de telles données, le calcul discret et la bibliothèque DGtal ont été donnés auprès de deux communautés très différentes :

- auprès de la communauté traitement d'image et reconnaissance de formes : ACPR 2019 Tutorial on Digital Geometry in Pattern Recognition : Extracting Geometric Features with DGtal and Applications with Reproducible Research[1] ;
- auprès de la communauté informatique graphique et traitement géométrique des données numériques : *Graduate School on Digital Geometry, Symposium on Geometry Processing 2021*[2]

C.6 Discussion

Discussion sur le degré de réalisation des objectifs initiaux, les verrous restant à franchir, les ruptures, les élargissements possibles, les perspectives ouvertes par le projet, l'impact scientifique, industriel ou sociétal des résultats.

Par rapport aux objectifs initiaux, nous avons réussi à définir des opérateurs avec des propriétés de convergence (e.g. opérateur de Laplace-Beltrami), et des quantités géométriques différentielles stables par discrétisation (e.g. mesures corrigées de courbure). De nombreux autres travaux ont permis d'avancer sur les modèles variationnels et leur bonne discrétisation.

[1] `https://kerautret.github.io/ACPR19-DGPRTutorial/`
[2] `https://perso.liris.cnrs.fr/david.coeurjolly/talk/digital-geometry/`

Néanmoins, injecter des métriques convergentes n'a pas suffi à rendre tous les opérateurs du calcul digital convergent et ce projet a permis de mieux comprendre les limites des différentes formulations du calcul discret. De nouvelles pistes sont en cours d'exploration, notamment une extension du calcul par face [18], par injection d'une géométrie extérieure. Il reste ensuite à montrer la convergence de cette approche, au moins pour les opérateurs différentiels du premier ordre. De même, de nouveaux modèles de calcul extérieur discret sur les complexes simpliciaux permettent de modéliser des fibrés vectoriels, et satisfont les axiomes usuels du calcul différentiel [3]. Il s'agit donc de voir si ces modèles permettent la correction de la géométrie dans leur formulation.

Ce projet a aussi suscité de nouveaux projets scientifiques:

- Projet ANR JCJC 2018 Paradis : ce projet porte sur l'analyse de la géométrie des surfaces discrètes par algorithme par sondage de plans. Il permettra entre autres de définir de nouveaux estimateurs géométriques discrets convergents.

- Projet ANR AAPG 2022 StableProxies (en évaluation phase 1) : ce projet porte sur le calcul et le traitement de données géométriques hétérogènes, avec comme idée principal que les structures voxeliques peuvent résumer les données hétérogènes et supporter les calculs et les traitements géoémtriques. Il s'agit donc de la poursuite directe du projet CoMeDiC, avec des aspects stabilité et convergence, mais aussi des contraintes de performances, via une décomposition hiérarchique du calcul discret [45].

Enfin, la bibliothèque DGtalet les contributions du projet CoMeDiC, nous ont permis de réaliser des prototypes lors de discussions avec différents acteurs (chercheurs en informatique/géométrie, d'autres disciplines, industriels, etc.). Le projet StableProxies (avec des applications science des matériaux) en est un exemple.

C.7 Conclusions

Le projet a très bien fonctionné de notre point de vue, avec des interactions et des échanges très productifs. L'interaction mathématiciens - informaticiens est particulièrement intéressante et stimulante, car non seulement elle ouvre des discussions et des échanges de connaissances, mais elle permet aussi souvent d'avancer sur des sujets qu'il aurait été difficile d'aborder sinon. Tout ne s'est pas traduit encore sous forme de publications, mais de nombreuses pistes de recherche sont en cours. L'organisation du colloque final en mars-avril 2021 au CIRM a été l'occasion de réunir différentes communautés, même si évidemment nous aurions préféré être sur place ensemble au CIRM. Nous souhaitons vivement continuer à travailler ensemble sur les pistes de recherche envisagées, notamment dans le cadre de notre projet ANR soumis StableProxies.

C.8 Références

[1] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via Γ-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8):999–1036, 1990.

[2] B. Appleton and H. Talbot. Globally minimal surfaces by continuous maximal flows. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 28(1):106–118, 2006.

[3] Daniel Berwick-Evans, Anil N Hirani, and Mark D Schubel. Discrete vector bundles with connection and the bianchi identity. *arXiv preprint arXiv:2104.10277*, 2021.

[4] B. Bourdin and A. Chambolle. Implementation of an adaptive finite-element approximation of the mumford-shah functional. *Numerische Mathematik*, 85(4):609–646, 2000.

[5] Y. Boykov, V. Kolmogorov, D. Cremers, and A. Delong. An integral solution to surface evolution pdes via geo-cuts. In *Proc. European Conf. on Computer Vision (ECCV2006)*, volume 3953 (III) of *LNCS*, pages 409–422. Springer, 2006.

[6] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 23(11):1222–1239, 2001.

[7] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 23(11):1222–1239, 2001.

[8] E. Bretin, J.-O. Lachaud, and É. Oudet. Regularization of discrete contour by willmore energy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(2):214–229, 2011.

[9] C. Cartade, C. Mercat, R. Malgouyres, and C. Samir. Mesh parameterization with generalized discrete conformal maps. *Journal of mathematical imaging and vision*, 46(1):1–11, 2013.

[10] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(1):120–145, 2011.

[11] F. Chazal, D. Cohen-Steiner, A. Lieutier, and B. Thibert. Stability of curvature measures. *Computer Graphics Forum*, 28:1485–1496, 2009.

[12] D. Cohen-Steiner and J.-M. Morvan. Second fundamental measure of geometric sets and local approximation of curvatures. *Journal of Differential Geometry*, 74(3):363–394, 2006.

[13] C. Couprie, L. Grady, H. Talbot, and L. Najman. Combinatorial continuous maximum flow. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(3):905–930, 2011.

[14] C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot. Power watershed: A unifying graph-based optimization framework. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 33(7):1384–1399, 2011.

[15] C. Couprie, L. Grady, L. Najman, J.-C. Pesquet, and H. Talbot. Dual constrained tv-based regularization on graphs. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(3):1246–1273, 2013.

[16] K. Crane, C. Weischedel, and M. Wardetzky. Geodesics in heat: a new approach to computing distance based on heat flow. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(5):152, 2013.

[17] L. Cuel, J.-O. Lachaud, and B. Thibert. Voronoi-based geometry estimator for 3d digital surfaces. In *Proc. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2014)*, volume 8668 of *LNCS*, pages 134–149. 2014.

[18] Fernando De Goes, Andrew Butts, and Mathieu Desbrun. Discrete differential operators on polygonal meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 39(4):110–1, 2020.

[19] F. de Vieilleville, J.-O. Lachaud, and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. *Journal of Mathematical Image and Vision*, 27(2):471–502, February 2007.

[20] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, and J. E. Marsden. Discrete exterior calculus. *arXiv preprint math/0508341*, 2005.

[21] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bougleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: a framework for image and manifold processing. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 17(7):1047–1060, 2008.

[22] L. Grady. Random walks for image segmentation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 28(11):1768–1783, 2006.

[23] L. J. Grady and J. Polimeni. *Discrete calculus: Applied analysis on graphs for computational science*. Springer, 2010.

[24] J. Harrison. Stokes' theorem for nonsmooth chains. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29(2):235–242, 1993.

[25] J. Harrison. Flux across nonsmooth boundaries and fractal gauss/green/stokes' theorems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(28):5317, 1999.

[26] A. Henrot and E. Oudet. Minimizing the second eigenvalue of the laplace operator with dirichlet boundary conditions. *Archive for rational mechanics and analysis*, 169(1):73–87, 2003.

[27] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2005.

[28] K. Hildebrandt, K. Polthier, and M. Wardetzky. On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geometriae Dedicata*, 123(1):89–112, 2006.

[29] A. N. Hirani. *Discrete exterior calculus*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2003.

[30] D. Bucur and G. Buttazzo. *Variational methods in shape optimization problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 65. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[31] D. Coeurjolly, J.-O. Lachaud, and J. Levallois. Integral based curvature estimators in digital geometry. In *Proc. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2013)*, volume 7749 of *LNCS*, pages 215–227. Springer, 2013.

[32] D. Coeurjolly, J.-O. Lachaud, and J. Levallois. Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry. *Computer Vision and Image Understanding*, 129:27–41, 2014.

[33] D. Coeurjolly, S. Miguet, and L. Tougne. 2d and 3d visibility in discrete geometry: an application to discrete geodesic paths. *Pattern Recognition Letters*, 25(5):561–570, 2004.

[34] É. Oudet. Numerical minimization of eigenmodes of a membrane with respect to the domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 10(03):315–330, 2004.

[35] É. Oudet. Approximation of partitions of least perimeter by γ-convergence: around kelvin's conjecture. *Experimental Mathematics*, 20(3):260–270, 2011.

[36] É. Oudet and F. Santambrogio. A modica-mortola approximation for branched transport and applications. *Archive for rational mechanics and analysis*, 201(1):115–142, 2011.

[37] J.-O. Lachaud and B. Thibert. Properties of gauss digitized sets and digital surface integration, 2014. Hal preprint hal-01070289.

[38] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image and Vision Computing*, 25(10):1572–1587, October 2007.

[39] N. Bonneel, J. Rabin, G. Peyré, and H. Pfister. Sliced and radon wasserstein barycenters of measures. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 51(1):22–45, 2015.

[40] N. Bonneel, M. van de Panne, S. Paris, and W. Heidrich. Displacement interpolation using lagrangian mass transport. *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH ASIA 2011)*, 30(6), 2011.

[41] T. Roussillon and J.-O. Lachaud. Accurate curvature estimation along digital contours with maximal digital circular arcs. In *Proc. Int. Work. Comb. Image Analysis (IWCIA2011)*, volume 6636 of *LNCS*, pages 43–55, 2011.

[42] J. Levallois, D. Coeurjolly, and J.-O. Lachaud. Parameter-free and multigrid convergent digital curvature estimators. In *Proc. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2014)*, volume 8668 of *LNCS*, pages 162–175. Springer, 2014.

[43] B. Levy and N. Bonneel. Variational anisotropic surface meshing with voronoi parallel linear enumeration. In *Proc. 21st Int. Meshing Roundtable (IMR'12)*, October 2012.

[44] B. Lévy and H. Zhang. Spectral Mesh Processing. Technical report, SIGGRAPH Asia 2009 Courses, 2008.

[45] Hsueh-Ti Derek Liu, Jiayi Eris Zhang, Mirela Ben-Chen, and Alec Jacobson. Surface multigrid via intrinsic prolongation. *ACM Trans. Graph.*, 40(4), 2021.

[46] C. Mercat. Discrete riemann surfaces and the ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 218(1):177–216, 2001.

[47] C. Mercat. Discrete complex structure on surfel surfaces. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 4992 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 153–164. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[48] U. Pinkall and K. Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental mathematics*, 2(1):15–36, 1993.

[49] K. Polthier and E. Preuss. Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decomposition. *Visualization and Mathematics*, 3:113–134, 2003.

[50] H. Pottmann, J. Wallner, Q. Huang, and Y. Yang. Integral invariants for robust geometry processing. *Computer Aided Geometric Design*, 26(1):37–60, 2009.

[51] H. Pottmann, J. Wallner, Y. Yang, Y. Lai, and S. Hu. Principal curvatures from the integral invariant viewpoint. *Computer Aided Geometric Design*, 24(8-9):428–442, 2007.

[52] T. Regge. General relativity without coordinates. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 19(3):558–571, 1961.

[53] R. Schätzle. The Willmore boundary problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 37(3-4):275–302, 2010.

[54] J. Solomon, R. Rustamov, L. Guibas, and A. Butscher. Earth Mover's Distances on Discrete Surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):67:1—-67:12, 2014.

[55] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In *Proc. 11th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2003)*, volume 2886 of *LNCS*, pages 114–123. Springer, 2003.

[56] DGtal: Digital Geometry tools and algorithms library. `http://dgtal.org`, 2015.

[57] M. Wardetzky, S. Mathur, F. Kaelberer, and E. Grinspun. Discrete Laplace operators: No free lunch. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pages 33–37, 2007.

[58] P. Wintgen. Normal cycle and integral curvature for polyhedra in riemannian manifolds. *Differential Geometry. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York*, 1982.