TD: Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : Appartenance à un plan

Soit un plan P contenant trois points $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, -1, 1)$, $C = (2, 4, 2)$. Proposez deux méthodes différentes pour vérifier si $Q = (0, 0, 1)$ appartient bien à ce plan P.

Exercice 2 : Plan, distance et rayon

Soit un plan P passant par $A = (1, 0, 0)$, $B = (-1, 3, 0)$, $C = (2, -1, 2)$.

- Trouvez une normale $\vec{n}$ puis une équation implicite de ce plan.
- Quelle est la distance du point $Q = (0, 0, 0)$ à ce plan ?
- Soit le rayon partant de $R = (0, 0, 10)$ de direction $\vec{u} = (0, 0, -1)$. A quelle distance de R touche-t'il le plan P ?

Exercice 3 : De quel côté du toit tombe la neige ?

Vous avez construit une maison avec un toit pyramidal, avec les coordonnées suivantes: le sommet S est en $(0, 0, 5)$ et la base du toit est un rectangle avec les points $A = (2, 1, 3)$, $B = (-2, 1, 3)$, $C = (-2, -1, 3)$ et $D = (2, -1, 3)$. Pendant la nuit la neige est tombée drue dans la direction $\vec{u} = (-1, 1, -3)$. Quel est le côté du toit qui a reçu le plus de neige (ABS, BCS, CDS, DAS) ?

Exercice 4 : Quels sont les côtés du toit qui voient le soleil ?

On reprend la même maison qu'au dessus. Le soleil est dans la direction $(1, -1, 3)$. Quel est le côté du toit qui voit le plus le soleil ? Est-ce que tous les pans du toit voit le soleil ?

Le soleil est ensuite plus couchant avec une direction $(2, -3, 1)$. Quels sont les côtés du toit qui sont encore ensoleillés ?

Exercice 5 : Point dans triangle dans l'espace

On se donne trois points A, B, C dans l'espace, non colinéaires. Ils définissent donc un plan $\mathcal{P}$, qui est le seul à les contenir tous les trois. Soit Q un point appartenant aussi au plan $\mathcal{P}$. On veut savoir si Q est à l'intérieur du triangle ABC. Ecrivez une fonction DansTriangle($\underline{\text{E}}$ A, B, C, Q : Point) : booléen, qui répond à cette question. On pourra utiliser produit scalaire et/ou produit vectoriel.

Exercice 6 : Ombre portée

Soit S une boule de rayon r centrée en A. Soit P un point de l'espace.

- Soit L une source de lumière à l'infini dans la direction $(0, 0, 1)$. Comment déterminer si P est dans l'ombre de la boule S ?
- Même question si maintenant L est dans la direction $\vec{v}$ quelconque, $\|\vec{v}\| = 1$.
- Même question si on suppose maintenant que L est une source ponctuelle de lumière placée en un point B (hors de S).

Exercice 7 : Back-face culling

Une technique classique pour accélerer l'affichage de surfaces triangulées (ou plus généralement dont les faces sont planes) est de n'afficher que les triangles qui sont visibles du point de vue de l'observateur. Quand on regarde un solide, on ne voit que les faces devant nous, pas celles de l'autre côté, donc environ la moitié des faces ne sont pas visibles.

Soit un triangle ABC de normale $\vec{n}$ tournée vers l'extérieur. Soit P la position de l'observateur. Montrez que l'observateur voit le point A du triangle (i.e. $\vec{PA} \cdot \vec{n} \leq 0$) si et seulement si il voit tous les points du triangle ! Un simple test avec un des points du triangle suffit donc.

Exercice 8 : Collision boule et plan (*)

Soit B une boule de centre c et de rayon r. Soit maintenant un plan P passant par un point a et de normale orientée vers l'extérieur $\vec{n}$, et notons H le demi-espace sous le plan P et incluant P.

1. (/2) Ecrire une fonction $\textsc{Collision}(c, r, a, \vec{n})$ qui retourne vrai si et seulement si la boule B est en collision avec le demi-espace H.
2. (/1) Ecrire maintenant une fonction $\textsc{Distance}(c, r, a, \vec{n})$ qui retourne la distance entre la boule B et le demi-espace H (c'est-à-dire la distance entre les deux points les plus proches de B et H).
3. (/3) La boule suit maintenant une trajectoire, i.e. c dépend du temps. On fait donc évoluer cette boule le long de cette trajectoire (on a donc les coordonnées $c(t)$ pour tout t). Dans l'exécution la boule n'intersecte pas H en t_0 mais l'intersecte en t_1. Proposez un algorithme qui détermine le moment t_i d'intersection avec une précision ϵ arbitraire.
4. (/1) Connaissant le vecteur vitesse $\vec{v}(t_i)$ de la boule au moment de l'intersection, trouvez le vecteur de vitesse de la boule après collision en supposant que le rebond est parfait.

Exercice 9 : Base d'un espace (*)

Soient des points A, B, C non alignés dans l'espace.

On veut trouver une base orthogonale de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ telle que $\vec{u}, \vec{v}$ appartiennent au plan ABC et $\vec{w}$ est orthogonal à ce plan-là. On rappelle que dans une base orthogonale de l'espace, les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux.

1. (/0,5) Comment vérifier si deux vecteurs sont orthogonaux ?
2. (/1) Trouvez d'abord un vecteur orthogonal au plan, noté $\vec{w}$.
3. (/1) Trouvez ensuite un vecteur dans le plan, noté $\vec{u}$. L'idée est de soustraire à $\vec{AB}$ son projeté sur la direction $\vec{w}$.
4. (/0,5) Trouvez enfin le dernier vecteur $\vec{v}$ (qui est aussi dans le plan)
5. (/1) Comment obtenir une base *orthonormée* $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$, c'est-à-dire dont les vecteurs sont unitaires ?
6. (/1) Soit maintenant un point D quelconque de l'espace. A quoi correspond $|\vec{AD}.\vec{w}'|$? Si maintenant D est dans le plan ABC (en particulier si $D = A$ ou B ou C), que vaut cette valeur ? Que représente en fin de compte le triplet $(\vec{AD}.\vec{u}', \vec{AD}.\vec{v}', \vec{AD}.\vec{w}')$?